DOI: 10.22199/S07160917.1982.0003.00011

# SOBRE EL TEOREMA DE HAHN-BANACH EN ESPACIOS LOCALMENTE K-CONVEXOS

JAIME SEGUEL CANPODONICO

## I. CUERPOS ESFERICO - COMPLETOS.

Sea K un cuerpo, K se dice no - arquimediano si $\psi : K \to R$ tal que :

$$\begin{array}{ll} (V1) & \psi(\alpha) > 0 \\ (V2) & \psi(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0 \\ (V3) & \psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\,\psi(\beta) \\ (V4) & \psi(\alpha+\beta) < \text{máx}\,\{\psi(\alpha), \psi(\beta)\} \end{array}$$

Anotamos $\psi(\alpha) = |\alpha|$ y la llamamos valuación no arquimediana sobre K.

Nótese que (V1), (V2) y (V3) son propiedades del módulo complejo. De ellas (tal como en el caso complejo) se desprenden :

$$\begin{array}{ll} (1) & |1| = 1 \\ (2) & |-1| = 1 \\ (3) & |-\alpha| - |\alpha| \end{array}$$

Además de (V4) podemos implicar : $|\alpha+\beta| < |\alpha| + |\beta|$ o sea, $|\ \ |$ es una norma sobre K.

Tenemos además la siguiente propiedad :

(5) $\quad |\alpha| < |\beta| \rightarrow |\alpha+\beta| = |\beta|$

En efecto: de (V4) : $|\alpha+\beta| \leqslant |\beta|$

si suponemos $\quad |\alpha+\beta| < |\beta|$

entonces: $\quad |\beta| = |\alpha+\beta-\alpha|$

$< \text{máx}\{ |\alpha+\beta| \quad |-\alpha| \}$

o sea : $|\beta| < |\alpha \quad \beta| \quad |\beta| < |\alpha|$

lo que es contradictorio. #

$(k, |\ |)$ es un espacio topológico y las vecindades basales de $\alpha o \varepsilon k$ son los discos abiertos:

$$\overset{o}{B_r}(\alpha o) = \{\alpha \varepsilon K / \ |\alpha - \alpha o| < r\}$$

Los discos cerrados serán llamados, brevemente : discos.

$$B_r(\alpha o) = \{\alpha \varepsilon K / |\alpha - \alpha o| \leqslant r\}$$

es el disco cerrado de centro $\alpha o$ y radio $r$:

PROPOSICION 1 :

$$B_{r1}(\alpha_1) \cap B_{r2}(\alpha_2) \neq \emptyset \wedge r_1 \leqslant r_2$$

$$B_{r1}(\alpha_1) \subset B_{r2}(\alpha_2)$$

DM :

$$\text{sean:} \begin{cases} \alpha^* \varepsilon B_{r1}(\alpha_1) \cap B_{r2}(\alpha_2) \\ \\ \alpha \varepsilon B_{r1}(\alpha_1) \end{cases}$$

$$\text{entonces : } |\alpha-\alpha_2| = |(\alpha-\alpha_1) + (\alpha_1-\alpha^*) + (\alpha^*-\alpha_2)|$$

$$\leq \text{máx}\,\{\,|\alpha-\alpha_1|\,,\ |\alpha_1-\alpha^*|,\ |\alpha^*-\alpha_2|\,\}$$

$$< r_2$$

#

Se sigue de esta proposición que : Dada una familia finita de discos tal que dos cualesquiera de sus elementos tienen intersección no vacía, entonces la intersección sobre toda la familia es no vacía. Realmente, ella puede ordenarse totalmente por la inclusión.

Es claro, también, que si $\beta$ es una familia arbitraria de discos tal que dos cualesquiera de sus miembros, tienen intersección no vacía, entonces, $(\beta\ ,\ \ )$ es totalmente ordenado; sin embargo,

$$\bigcap_{\beta\,\varepsilon\,\beta} \beta$$

puede ser vacía a menos que K satisfaga un cierto requisito de completitud. Esta observación motiva la siguiente definición :

K, se dice <u>esférico - completo</u> si: "Toda familia de discos en K, tal que la intersección de dos cualesquiera de sus miembros es no vacía, tiene intersección no vacía".

<u>PROPOSICION 2</u> :

K esférico - completo $\Rightarrow$ K $|\ |$ - completo.

<u>DM</u> :

$$\text{sean: } \begin{cases} (\alpha_n) & \text{sucesión } |\ | \text{ - Cauchy en K} \\ B_n = & \{\alpha \,\varepsilon\, K \,/\, |\alpha-\alpha_n| \leq \underset{k \geq n}{\text{máx}} |\alpha_k-\alpha_{k+1}|\,\} \end{cases}$$

$$\text{entonces : } \alpha_{n+1}\ \varepsilon\ B_n \cap B_{n+1}$$

$$\text{además: } \underset{k \geq n}{\text{máx}}\, |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \geq \underset{k \geq n+1}{\text{máx}}\, |\alpha_k - \alpha_{k+1}|$$

de donde : $B_n \supset B_{n+1}$ , $\forall n$.

En consecuencia : $B_n \cap B_m \neq \emptyset$ , $\forall n, m$.

Luego, como K es esférico-completo: $\bigcap_{n \in N} B_n \neq \emptyset$

sea $\alpha_o \in \bigcap_{n \in N} B_n$

Obviamente: $\alpha_n \to \alpha_o$ en $| \ |$.

#

Examinamos a continuación la clase de sucesiones que va ligada a esta noción de completitud esférica.

Una sucesión $(\alpha_n)$ en K se dice <u>pseudo convergente</u>.

si :

$$n < m < s \Rightarrow |\alpha_s - \alpha_m| < |\alpha_m - \alpha_n|$$

<u>PROPOSICION 3</u> :

Si $(\alpha_n)$ es pseudo convergente; entonces:

$$n < m \Rightarrow |\alpha_m - \alpha_n| = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$$

<u>DM</u> :

$$n < n + 1 \leqslant m \Rightarrow |\alpha_m - \alpha_{n+1}| < |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$$

pero: $|\alpha_m - \alpha_n| = |(\alpha_m - \alpha_{n+1}) + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)|$

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n|$$

esta última igualdad gracias a (5).

#

Se llama pseudo-límite de la sucesión pseudo-convergente $(\alpha_n)$, a un elemento $\alpha_o \in K$ tal que :

$$|\alpha_o - \alpha_n| = |\alpha_{n+1} - \alpha_n| , \forall n \in N$$

TEOREMA :

Para que K sea esférico - completo es necesario y suficiente que toda sucesión pseudo - convergente en K, tenga un pseudo - límite.

DM :

Suponiendo K esférico - completo y $(\alpha_n)$ pseudo - convergente en K.

sea : $B_n = \{\alpha \in k \ / \ |\alpha - \alpha_n| \leq |\alpha_{n+1} - \alpha_n|\}$

sean : $m, n \in N$

Si : $n < m$ , $|\alpha_m - \alpha_n| = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$

Luego: $\alpha_m \in B_n$

o sea : $B_m \cap B_n \neq \emptyset$

de la hipótesis : $\bigcap_{n \in N} B_n \neq \emptyset$

sea : $\alpha_o \in \bigcap B_n$

Supongamos: $n_o \in N$ tal que $|\alpha_o - \alpha_{n_o}| < |\alpha_{n_o+1} - \alpha_{n_o}|$

Entonces : $|\alpha_o - \alpha_{n_o+1}| = |(\alpha_o - \alpha_{n_o}) + (\alpha_{n_o} - \alpha_{n_o+1})|$

$$= |\alpha_{n_o} - \alpha_{n_o+1}| \text{ (gracias a (5)}.$$

Ahora, de :

$$n_o < n_o + 1 < n_o + 2 < n_o + 3$$

se tiene : $|\alpha_o - \alpha_{n_o+2}| = |(\alpha_o - \alpha_{n_o+1}) + (\alpha_{n_o+1} - \alpha_{n_o+2})|$

$$= |(\alpha_{n_o} - \alpha_{n_o+1}) + (\alpha_{n_o+1} - \alpha_{n_o+2})| \; |\alpha_{n_o} - \alpha_{n_o+1}| >$$

$$|\alpha_{n_o+2} - \alpha_{n_o+3}|$$

o sea : $\alpha_o \notin B_{n_o+2}$ ; lo que es contradictorio.

Suponiendo que toda sucesión pseudo-convergente admite un pseudo-límite, sea $\beta$ una familia de discos tal que dos cualesquiera de sus miembros tienen intersección no vacía; entonces $(\beta, \subset)$ es totalmente ordenado.

sea $r_B$ el radio de $B \in \beta$

y sea : $r = \inf\limits_{B \in \beta} r_B$

Entonces : $\begin{cases} \text{a) } \exists B_o \in \beta \text{ tal que } r = r_{B_o} \\ \text{b) } \exists (B_n) \subset \beta \text{ tal que } r_{B_n} \downarrow r. \end{cases}$

Si a) $B_o = \bigcap\limits_{B \in \beta} B \neq \emptyset$

Si b) $\exists (\alpha_n)$ sucesión tal que : $\alpha_n \in B_n$ y $\alpha_n \notin B_{n+1}$

si $n < m < s$, entonces:

$\alpha_s \in B_s \subset B_m$ y $\alpha_m \in B_m$

luego :

$|\alpha_m - \alpha_s| \leq r_{B_m}$

Ahora : $\alpha_n \notin B_m$

O sea : $|\alpha_m - \alpha_n| > r_{B_m}$

de donde : $|\alpha_s - \alpha_m| < |\alpha_n - \alpha_m|$

$\therefore$ $(\alpha_n)$ es pseudo-convergente

sea $\alpha_o$ su pseudo límite.

luego : $|\alpha_o - \alpha_n| = |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq r_{B_n}$ $\forall n$

Por lo tanto : $\alpha_o \in B_n$ , $\forall n$

de donde : $\alpha_o \in \bigcap_{B \in \beta} B$

## II. ESPACIOS LOCALMENTE K - CONVEXOS.

Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial dotado de una cierta topología $\tau$ que hace continuas las operaciones de adición vectorial y producto de escalar por vector; $\tau$ se dice, en ese caso, compatible con la estructura lineal de E.

Una clara consecuencia de la continuidad de las operaciones antes mencionadas es el par de hechos siguientes:

(A) Si U es vecindad de 0 en E, x + U es vecindad de x ε E.

(B) Si U es vecindad de 0 en E, λU es vecindad de 0, λ escalar.

Un modo de definir estas topologías es a partir de la base del filtro de vecindades de 0, o del filtro de vecindades de 0.

Al respecto, en teoría de espacios vectoriales topológicos, se tiene el resultado fundamental siguiente:

"Un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio vectorial E, es el filtro de vecindades de 0 de un topología compatible con la estructura algebraica (o linea..) de E si y solo si:

1) $0 \in U$, $\forall U \in \mathcal{F}$

2) $\forall U \in \mathcal{F}$, $\exists\ V \in \mathcal{F}$ tal que: $V + V$

3) $\forall U \in \mathcal{F}$, $\forall\ \lambda$ escalar, $\lambda \neq 0$, $\lambda U \in \mathcal{F}$

4) $\forall U \in \mathcal{F}$, $U$ es absorbente

5) $\forall U \in \mathcal{F}$, $\exists V \subset U$ equilibrado.

La obsorción y el equilibrio son dos buenas propiedades geométricas, indispensables para asegurar la continuidad del producto externo.

Un filtro $\mathcal{F}$ que satisface además:

6) $\forall U \in \mathcal{F}$, $\exists V \subset U$, V convexo
se llama convexo.

Un espacio vectorial topológico dotado de una topología definida por un filtro que satisface de (1) a (6), es llamado localmente convexo.

Para espacios localmente convexos se tiene el resultado siguiente :

"La topología de un espacio localmente convexo puede definirse en base a una familia de semi-normas $\{ p\lambda\ /\ \lambda\varepsilon\Gamma \}$ ; entendiendo por tales aplicaciones subaditivas y homogéneas de E en R" .

Para el caso en que K es no-arquimediano estable cemos el resultado análogo. Partiendo de la noción de K convexo.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo no-arquimediano K. ; $S \subset E$ se dice K-convexo si :

$\forall x, y \in S, \forall \lambda, \mu \in K$ tales que : $|\lambda| \leqslant 1, |\mu| \leqslant 1$ se tiene

$\lambda x + \mu y \in S$.

Nótese que un K-convexo es equilibrado (tomando: $\mu = 0$)

Teorema 1 :

Si $S \subset E$, S K-convexo; entonces $S = \overset{\circ}{S}$ ó $\overset{\circ}{S} = \emptyset$

DM:

Si $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$

Sean : $\begin{cases} x \in \overset{\circ}{S} \\ U \text{ vecindad de } 0 \text{ tal que } x + U \subset S \end{cases}$

si : $y \in S$; entonces : $y - x = y + (-1)x \in S$

además : $\forall u \in U$ , $x + u \in S$

luego : $y + u = (y - x) + (x + u) \in S, \forall u \in U$

$y + U \subset S$

Ejemplo en que $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ :

Sea K n. a. y sea $E = \{ (\alpha_n) / \alpha_n \in K, \alpha_n = 0$ salvo para finitos n $\}$

sobre E consideramos la topología inducida por la norma:

$$(\alpha_i) \to \|(\alpha_i)\| = \text{máx} |\alpha_i|$$

Entonces $(E, \| \ \|)$ es un espacio vectorial topológico.

Sea $S = \{ (\alpha_i) \in E / |\alpha_i| < \rho^{-i}, \forall i \in N \}$ , donde

$\rho > 1$, real, tal que: $\forall n \in Z /, \lambda n \in K$ tal que :

$|\lambda_1| = \rho^n$. ( $\rho$ existe, si $\alpha \in K$ tal que $|\alpha| = \rho > 1$)

Consideremos la sucesión $(x_n)$ tal que:

$x_n = (\alpha_{ni})$ , donde :

$$\alpha_{ni} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ \rho^{-n} & \text{si } i = r \end{cases}$$

Así $|x_n| = \rho^{-n}$ , $\forall n \in N$

de donde : $(x_n) \to 0$

Pero, $\forall n \in N$, $x_n \in S$; lo que significa que hay una vecindad de 0 que no esta contenida en S.

$\therefore$ 0 no es punto interior de S

$\therefore \overset{\circ}{S} = \emptyset$

Es sencillo comprobar que la intersección de una familia arbitraria de K-convexos es un K-convexo. Se define entonces la cápsula K-convexa de S, C(S) como el menor K-convexo que contiene a S.

<u>Teorema 2</u>:

Si S es abierto : C(S) es abierto.

<u>DM</u>.

S vecindad abierta no vacía.

$S \subseteq C(S) \Longrightarrow C(S) \neq \emptyset$

por teorema 1: $C(S) = \overset{\circ}{C(S)}$

#

Una topología compatible con la estructura lineal de E se llama localmente K-convexa, si tiene un filtro de vecindades de 0 formado por conjuntos K-convexos. En ese caso E se llama localmente K-convexo.

Se llama <u>semi-norma no arquimediana</u> sobre E a aplicación $p : E \to R$ que satisface:

SN 1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

SN 2) $p(x+y) \leq \max \{p(x), p(y)\}$

<u>Teorema 3</u>:

Sea $S \subset E$, K-convexo y absorbente y $p_S : E \to R$ la aplicación definida por :

$$p_S(x) = \inf_{x \in \lambda S} |\lambda|$$

Entonces :

1) $p_S$ es una s.n.n.a. sobre E

2) Si S contiene un punto interior $p_S$ es continua.

<u>DM</u>.

1) SN 1) : $\alpha x \in \lambda S \leftrightarrow x \in \lambda \alpha^{-1} S$

así: $p_S(\alpha x) = \inf \{ |\lambda| / \alpha x \in \lambda S \}$

$= \inf \{ |\lambda| / x \in \alpha^{-1} \lambda S\}$ : haciendo $\beta = \alpha^{-1} \lambda$

$= \inf \{ |\alpha \beta| / x \in \beta S\}$

$= |\alpha| \inf \{ |\beta| / x \in \beta S\} = |\alpha| p_S(x)$

SN 2) Sean $\lambda_o$, $\lambda_1 \in K$ puntos que :

$x \in \lambda_o S$ , $y \in \lambda_1 S$

entonces : si $|\lambda_2| = \max \{ |\lambda_1| \ |\lambda_o| \}$

se tiene: $\lambda_o \lambda_2^{-1} s_1 + \lambda_1 \lambda_2^{-1} s_2 \in S, \forall s_1, s_2 \in S$

o sea : $\lambda_o \lambda_2^{-1} S + \lambda_1 \lambda_2^{-1} S \subset S$

Luego : $\lambda_o S + \lambda_1 S \subset \lambda_2 S$

en consecuencia : $x + y \in \lambda_2 S$

$\therefore \quad p_S(x + y) < |\lambda_2| = \text{máx} \{ |\lambda_1| , |\lambda_2| \}$

2) Es consecuencia inmediata de 1) y Teorema 1).

## III. TEOREMA DE HAHN - BANACH.

Ingleton, A.W, en "The Hahn-Banach Theorem for non - Archimedian valued fields" (Pric. Cambridge Phil. Society 48, 41 - 45); ha demostrado que: si E espacio vectorial normado no arquimediano y si K es esférico - completo; entonces para una aplicación lineal continua de un sub-espacio vectorial M de E en K, una aplicación lineal continua $T^*$ de E en K, que satisface las condiciones siguientes:

1) $T^*(x) = T(x) \quad \forall\, x \in E$

2) $\sup\limits_{x\in M, x\neq 0} \| T(x) \| / \| x \| = \sup\limits_{x\in E, x\neq 0} \| T^*(x) \| / \| x \|$

Este resultado es la base del Teorema de Hahn - Banach que se expone más adelante. Previamente veamos el siguiente teorema :

Teorema 1 :

Sean E y F espacios localmente K-convexos y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Para que T sea continua es necesario y suficiente que para toda semi-norma n.a. continua q sobre F, exista una semi-norma n.a. continua p. sobre E y $C \in R$, $c > o$ tal que :

$$q(T(x)) \leq c \; p(x), \quad \forall x \in E.$$

DM.

La suficiencia dela condición es evidente. Para demostrar la necesidad, sea q una s-n. n.a. y continua sobre F. Entonces existe una s-n. n.a. y continua p sobre E tal que:

$\forall x \varepsilon E$ , $p(x) \leqslant 1$ implica $q\ (T\ (x)\ ) \leqslant 1$

sea $\rho < 1$, tal que $\forall n \varepsilon\ Z, \exists\ \lambda_n\ \varepsilon\ K$ con la propiedad :

$|\lambda_n| = \rho^n$ ; si $p(x) = 0$,

entonces $p\ (\ \lambda_n x) = 0 \quad \forall n \varepsilon\ Z$,

luego $q\ (T\ (\lambda_n x)\ )\ -\ \rho^n\ q(T\ (x)\ ) \leqslant 1, \forall n \varepsilon\ Z$, de donde: $q(T\ (x)\ ) = 0$

Si $p(x) \neq 0$, $\exists\ n \varepsilon\ Z$ tal que :

$\rho^n < (p(x)\ )^{-1} \leqslant \rho^{n+1}$

Entonces : $p\ (\lambda_n x) = \rho^n\ p(x) < 1$, luego

$a(T(\lambda\ x)\ ) = \rho^n\ q(T(x) \leqslant 1$, de donde:

$q(T\ (x)\ ) = \rho^n\ q(T(x)\ )\ \rho^{-n} \leqslant \rho\ p(x)$

#

Suponiendo que E es localmente K-convexo y que K es esférico-completo. En este caso, se tiene el siguiente Teorema :

Teorema 2 : (Hanhn-Banch).

Sean: M subespacio de E, p. un s-n.n.a. sobre E, $c > 0$ en R y $f : M \to K$ lineal tal que: $|f(x)| \leqslant c\ p(x)$ $\forall x \varepsilon M$

Entonces: $f^* : E \to K$ lineal, que satisface:

1) $f^*(x) = f(x) \quad \forall x \varepsilon M$

2) $|f^*(x)| \leqslant c\ p(x) \quad \forall x \varepsilon E$

DM :

Sea $L = \{\ x \varepsilon E\ /\ p(x) = 0\ \}$ y $x \to \hat{x}$ la aplicación canónica de E sobre $\hat{E} = E/L$

Sea $\hat{M}$ la imagen de M en $\hat{E}$.

La aplicación $\hat{x} \to \|\hat{x}\| = p(x)$ es una norma n. a sobre $\hat{E}$ .

Como $x \varepsilon M$ , $p(x) = 0 \to f(x) = 0$, se puede definir una aplicación lineal $\hat{f}$ de $\hat{M}$ en K mediante la fórmula :

$\hat{f}(\hat{x}) = f(x)$ , $\forall x$ M.

Se tiene que: $|\hat{f}(\hat{x})| = |f(x)| \leq c\, p(x) = c\, \|\hat{x}\|$, $\forall x \varepsilon M$ .

Luego del resultado de Ingleton, es posible afirmar la existencia de una aplicación lineal

$\hat{f}^{*} : \hat{E} \longrightarrow K$ que satisface :

1) $\hat{f}^{*}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})$ $\forall \hat{x} \varepsilon \hat{M}$

2) $|\hat{f}^{*}(\hat{x})| \leq c\, |\hat{x}|$ $\forall \hat{x} \varepsilon \hat{E}$

La aplicación de $f^{*} : E \to K$ , definida por $f^{*}(x) = \hat{f}^{*}(\hat{x})$ es la función buscada.

<u>Teorema 3</u> :

Sea M subespacio vectorial de E y f una aplicación lineal continua de M en K. Entonces existe $f^{*} : E \to K$ tal que: $f^{*}(x) = f(x)$, $\forall x \varepsilon M$

<u>DM</u> :

Por teorema 1., una semi-norma n.a. continua p sobre E y $c \varepsilon R$, $c > 0$
tal que: $f(x) \leq cp(x)$, $\forall x \varepsilon M$.

Por teorema 2., es posible extender f, en la aplicación $f^{*}$ buscada.

#