ECUACION NO-LINEAL DEL CALOR

CARMEN CORTAZAR SANZ

En esta charla hablaré sobre la ecuación no-lineal del calor, en especial dirigida a lo que estamos tratando de hacer, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Católica de Chile, en este tema. Por lo tanto, el estudio de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k(u))$$

donde $k(u)$ es una función creciente, $k(0) = 0$

I. ¿Qué es la Ecuación del Calor ?

Supongamos que tenemos una barra unidimensional (por ejemplo un alambre). $u = u(t, x)$ va a representar la temperatura en función del tiempo $t \geq 0$ y de la posición x .

Vamos a basar nuestro modelo matemático en dos principios físicos :

- i) Ley de enfriamiento de Newton que dice que el flujo de

calor a través de un punto x es proporcional al gradiente de la temperatura en x . Esto significa que la cantidad de ca-lor que pasa por x de izquierda a derecha en un tiempo corto T es aproximadamente

$$- \text{ constante } \times \frac{\partial u}{\partial x} \times T$$

con la constante positiva dependiendo del material. El signo menos se debe a que el calor fluye del lugar más caliente al lugar más frío.

Este es un hecho experimental verificable para temperaturas moderadas. La verdadera relación experimental entre flujo y gradiente es muy complicada.

Por lo tanto la cantidad neta de calor fluyendo de un pequeño intervalo $a \leq x \leq b$ en un tiempo corto T es aproximadamente

$$- \text{ constante de difusión } \times \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_a^b \times T$$

Por otra parte :

ii) La cantidad de calor fluyendo de un intervalo es proporcional al producto del largo del intervalo por el (promedio) de decrecimiento de la temperatura dentro de él. La constante de proporcionalidad es el "calor específico" del material.

Luego

$$\text{cte} \times (b-a) \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\right) T = - \text{cte} \times \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_a^b \times T$$

Si dividimos ambos lados por $(b-a)$ y T y tenemos ambos a cero obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{cte} \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con una nueva constante.

Así obtenemos la ecuación del calor lineal, conocida por todos.

Si, por otro lado, suponemos que la constante de difusión depende de la temperatura, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} k(u)$$

en que $k(y) = \int_0^y$ es una función de u

Esta es la ecuación que nos interesa estudiar, especialmente con $k(0) = 0$.

II. Tipos de Problemas .

Dada una ecuación diferencial, como la ecuación del calor, ¿qué problemas queremos solucionar?.

a) Problemas de valor inicial: Dada una distribución inicial, $u_0(x)$, en todo $\mathbb{R}$, queremos saber cual va a ser la distribución en un tiempo t . Es decir, $u(x,t)$ tal que satisfaga la ecuación diferencial y $u(x,0) = u_0(x)$.

b) Problemas con valores de frontera : No nos interesa todo $\mathbb{R}$, sino sólo algún intervalo fijo de él. Pero en la frontera de este intervalo prescribimos ciertas condiciones. Por ejemplo fijamos la temperatura, aislamos los extremos de modo que no haya flujo de calor, introducimos o retiramos calor, combinaciones de las anteriores.

c) Frontera libre : En este caso también estamos trabajando en un intervalo de $\mathbb{R}$, pero ahora el intervalo no está fijo, sino determinado por las condiciones que prescribimos en los extremos.

III. Tipos de Preguntas.

¿En cualquiera de los problemas planteados anteriormente, qué cosas buscamos? .

a) Existencia de una solución : Hay que dejar en claro que a pesar de basarnos en hechos físicos para plantear nuestros problemas nosotros formulamos un modelo mate-

mático, que por un lado sirve para muchas aplicaciones pero a su vez sólo las aproxima. Luego, a pesar de que para cual quiera de los problemas planteados obviamente hay una solución, tenemos que demostrar la existencia de soluciones en nuestros problemas matemáticos. Si no hay solución, esto se debe a algún mal planteamiento. A lo mejor estamos pidiendo a nuestro modelo que cumpla requisitos imposibles.

b) Unicidad: Una vez que tenemos existencia, nos interesa cuando hay unicidad, es decir, una sola solución. Por ejemplo, en la barra no basta con dar distribución original, sino que también hay que decir que pasa en los bordes: si no hay muchas soluciones posibles.

c) Continuidad de las soluciones con respecto a condiciones iniciales: Desde un punto de vista solamente matemático, esto podría no ser necesario. Pero hay que tener en cuenta que los problemas de ecuaciones diferenciales vienen directamente de la física, química, biología, etc., y por lo tanto las condiciones que uno tiene, nunca son exactas sino aproximaciones. Desearíamos que con "poco" cambio en las condiciones iniciales sea "poco" el cambio en las soluciones.

Uno de los problemas es definir en que sentido se entiende el "poco".

d) Comportamiento de las soluciones: Nos gusta tener ciertas ideas de comportamiento, como principio del máximo, regularidad de las soluciones etc.

Es obvio que algunos de estos tipos de pregunta nos interesan siempre, aunque sea posible encontrar soluciones explícitas, pero es especialmente importante cuando las soluciones explícitas no son posibles de encontrar (la mayoría de los casos) o son tan complicadas que es muy difícil obtener información de ella. Entonces cualquier información sobre el comportamiento de la solución es interesante.

IV. Nuestro enfoque.

Volviendo a la ecuación que nos interesa en particular,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} k(u)$$

los métodos clásicos, como separación de variables, análisis -

armónico etc. no sirven, luego hay que buscar otros caminos.

Olga Olisnick (1963) hace una exposición de los métodos estudiados hasta esa fecha, en general como límite de soluciones de funciones lineales.

Nosotros queremos usar el Método de Semigrupo. La idea detrás de este método es la siguiente :

Sea

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} k(u) = A u$$

Luego , lo que queremos solucionar es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A u$$

con $u(0) = u_0(x)$

Si A fuera una constante la solución de (*) es $u(t) = e^{tA} u_0$

Hay otras "razones" para suponer que $u(x,t) = e^{tA} u_0$

Queremos que $u(t_2 + t_1)$, es decir la distribución de calor en un tiempo $t_2 + t_1$ sea igual a la distribución en un tiempo t_2 tomando como distribución inicial aquella obtenida en un tiempo t_1 . Es decir :

$$i) \quad u(t_2 + t_1) = e^{(t_2 + t_1)A} u_0 = e^{t_2 A} (e^{t_1 A} u_0)$$

$$ii) \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{tA} u_0 = u_0$$

Nuestro problema ahora es que significa $e^{tA} u_0$.

Definiremos :

$$e^{tA} u_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (I - t/n A)^{-n} u_0$$

en que $(I - t/n A)^{-n} = (I - t/n A)^{-1} \dots (I - t/n A)^{-1}$

n veces

y $(I - t/n A)^{-1}$ es el operador inverso de $(I - t/n A)$.

Teniendo estas ideas hay que empezar a justificarlas.

¿Cuándo existe $(I - t/n A)^{-1} u_0$,

$(I - t/n A)^{-n} u_0$ y

$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - t/n A)^{-n} u_0$?

Es decir, ¿en qué espacios de funciones esto tiene sentido ?

- ¿Para que operadores A esto tiene sentido ?.

- ¿Cuándo puedo garantizar que este límite existe ?.

Para operadores lineales en espacios de Hilbert, la respuesta está en el Teorema de Hille-Iosida (1951).

Para nuestro problema usamos una generalización de "Grandall-Liggett" (1971) para espacios de Banach. Trabajando en

$$L^1(\mathbb{R})$$

se demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - t/n A)^{-n} u_0$ existe para ciertos u_0

Usando este método hemos demostrado que

$u(t,x) = e^{tA} u_0$ es una solución generalizada y es clásica si $u(t,x) > 0$. Hemos obtenido ciertos teoremas de compa

ración y generalizado resultados de Kamenomoskaya (1973) so
bre comportamiento asintótico de las soluciones.

Nuestros planes son usar estos métodos para estudiar soluciones con valores de frontera y con potencial.