CARACTERE ELLIPTIQUE ET OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES *

ABDELAZIZ KHELDOUNI - FAYÇAL LAMRINI

Université Mohammed Benabdallah, Maroc

Abstract

Theorem 4.6 of [6] gives the expression of Todd character in terms of Landweber-Novikov cohomology operations. In this paper we generalise this result to any I-oriented cohomology theory, and express elliptic character by means of Landweber-Novikov operations.

*Recherche menée dans le cadre du Programme d'Appui à la Recherche Scientifique (PARS) MI33.

1. Introduction

L.Smith a établi une relation entre le caractère de Todd

$$th : MU_*(X) \rightarrow H_*(X; \pi_*(K))$$

et les opérations de Landweber-Novikov :

$$\theta(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \tilde{B}_E$$

(cf. [6] Theorem 4.6) pour tout $\alpha \in MU_*(X)$, où s_E est l'opération de Landweber-Novikov relative au multi-indice à support fini E , et χ est l'anti-involution de l'algèbre de Hopf $MU^*(MU)$. Notons que le formalisme utilisé dans [6] pour exprimer le caractère de Todd en fonction des opérations de Landweber-Novikov reste valable pour une théorie cohomologique I -orientée à la place de la K -théorie. On obtient alors une expression du caractère d'un genre multiplicatif φ , de série caractéristique $\sum_{k \geq 0} a_k^\varphi X^k$, en fonction des opérations de Landweber-Novikov, qui généralise le Théorème 4.6 de [6] à une théorie cohomologique I -orientée quelconque :

Théorème 3.4 : Soient $\alpha \in MU_*(X)$, $E = (e_1, e_2, \dots)$. En notant $a_E^\varphi = (a_1^\varphi)^{e_1} (a_2^\varphi)^{e_2} \dots$ nous avons:

$$C^\varphi(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) a_E^\varphi$$

L'application de ce résultat à la cohomologie elliptique permet alors d'avoir une expression du caractère elliptique en fonction des opérations de Landweber-Novikov :

Proposition 4.2 : Pour tout $\alpha \in MU_*(X)$, nous avons :

$$e(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \tilde{H}_E$$

où les $\tilde{H}_E$ sont définis à partir de la série caractéristique du genre elliptique.

Ce dernier résultat appelle quelques commentaires. En effet, dans notre version de la cohomologie elliptique, le groupe des coefficients est $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$ où $\gamma = (\delta^2 - \epsilon)$, qui est un anneau $4\mathbb{Z}$ -gradué. De plus, si on pose $A^* = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$, la proposition 1.2 de [3] donne $A_{8k} = \gamma^k \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta^2/\gamma]$ et $A_{8k+4} = \delta A_{8k}$; il serait alors intéressant d'écrire la formule de la proposition 3.4 comme une expression polynomiale en δ, ϵ à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta^2/\gamma]$. Ceci peut se faire au prix de l'introduction de polynômes assez compliqués, dont l'étude et l'interprétation restent à faire.

2. Remarques sur le genre multiplicatif

Soit $F(X, Y)$ un groupe formel sur une I -algèbre graduée A_* . F est classifié par un homomorphisme d'anneaux $\varphi : MU_* \rightarrow A_*$ (genre multiplicatif) tel que $F(X, Y) = \varphi_* F^U(X, Y)$, où F^U est le groupe formel universel et MU est le spectre de Milnor. Si g_F est le logarithme de $F(X, Y)$ la série formelle $Q(X) = \frac{X}{g_F^{-1}(X)}$ définit une m -suite de Hirzebruch $K^\varphi = \{K_i^\varphi(c_1, \dots, c_i)\} \in H^{**}(BU; A^*)$ (cf.[2]). Nous avons alors pour toute classe de bordisme $\{M\} \in MU^*$:

$$\varphi(\{M\}) = \langle \sum_{i \geq 0} K_i^\varphi(c_1(\tau M), \dots, c_i(\tau M)), \sigma_M^H \rangle$$

où τM est le fibré tangent stable de M et σ_M^H la classe fondamentale de M en homologie ordinaire. Rappelons aussi que si $j : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^\infty = BU(1) \rightarrow BU$ est l'inclusion naturelle, et si $\beta_n = j_*(\sigma_{\mathbb{C}P^n}^H) \in H_{2n}(BU; \mathbb{Z})$ alors $H_*(BU; \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \dots])$, et les monômes $\beta^E = \beta_1^{e_1} \beta_2^{e_2} \dots \beta_r^{e_r}$ avec $E = (e_1, \dots, e_r)$, $e_i \geq 0$ forment une I -base de $H_*(BU; \mathbb{Z})$. Si en plus $\Phi_* : H_*(MU; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(BU; \mathbb{Z})$ est l'isomorphisme de Thom, en prenant $b_i = \Phi_*^{-1}(\beta_i)$, nous avons : $H_*(MU; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$. La classe exponentielle $K^\varphi(c) = 1 + K_1^\varphi(c_1) + K_2^\varphi(c_1, c_2) + \dots \in H_{**}(BU; A_*)$ peut-être identifiée à un élément de $Hom(H_*(MU; \mathbb{Z}); A_*)$ comme suit :

$$H^{**}(BU; A_*) \rightarrow H^{**}(MU; A_*) \rightarrow Hom(H_*(MU; \mathbb{Z}); A_*)$$

$$\boxed{\quad \quad \quad \varrho \quad \quad \quad}$$

où $\varrho(K^\varphi) : H_*(MU; \mathbb{Z}) \rightarrow A_*$ est le I -homomorphisme qui à x associe $\varrho(K^\varphi)(x) = \langle \Phi^*(c); K^\varphi(c)x \rangle$

Proposition 2.1 : Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} MU_* & \xrightarrow{\varphi} & A_* \\ h \searrow & & \nearrow \rho((K^\varphi)^{-1}) \\ & H_*(MU; \mathbb{Z}) & \end{array}$$

où $h : \pi_*(MU) \rightarrow \pi_*(\mathcal{H}A \wedge MU)$ est l'homomorphisme d'Hurewicz; et $\mathcal{H}A$ le spectre de Mac-Lane pour l'anneau gradué A_* .

Démonstration : Précisons d'abord quelques notations. Si M^{2n} est une U -variété de dimension $2n$, la classe $\{M^{2n}\} \in MU_{2n} = \pi_{2n}(MU) =$

$[S^{2n+2k}; MU(k)]$ (k grand) est représentée par $\tilde{f}op$ où $\tilde{f} : M_\nu \rightarrow MU(k)$ est l'application induite sur les espaces de Thom par l'application $f : M^{2n} \rightarrow BU(k)$ classifiant le fibré normal ν pour le plongement $M^{2n} \rightarrow S^{2n+2k}$, et où $p : S^{2n+2k} \rightarrow M_\nu$ est l'application obtenue à l'aide de la construction de Thom (cf.[7]). Cependant, $h(\{M^{2n}\}) = \tilde{f}op_*(\iota_{2n+2k})$, ι_{2n+2k} étant la classe fondamentale de S^{2n+2k} . Nous avons aussi le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} H_{2n+2k}(S^{2n+2k}; A_*) & \xrightarrow{p_*} & H_{2n+2k}(M_\nu; A_*) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H_{2n+2k}(MU(k); A_*) \\ & & \Phi_* \downarrow & & \downarrow \Phi_* \\ & & H_{2n}(M^{2n}; A_*) & \xrightarrow{f_*} & H_{2n}(BU(k); A_*) \end{array}$$

Notons que Φ_*op_* envoie le générateur canonique $\iota_{2n+2k} \in H_{2n+2k}(S^{2n+2k}; A_*)$ sur la classe fondamentale σ_M^H de M^{2n} . Si on note γ le fibré universel sur BU, nous avons :

$$\begin{aligned} \rho((K^\varphi)^{-1})(h(\{M^{2n}\})) &= \langle \Phi^*((K^\varphi(\gamma))^{-1}), \tilde{f}_*op_*(\iota_{2n+2k}) \rangle \\ &= \langle (K^\varphi(\gamma))^{-1}, \Phi_*o\tilde{f}_*op_*(\iota_{2n+2k}) \rangle \\ &= \langle (K^\varphi(\gamma))^{-1}, f_*o\Phi_*op_*(\iota_{2n+2k}) \rangle \\ &= \langle (K^\varphi(\gamma))^{-1}, f_*(\sigma_M^H) \rangle = \langle f^*(K^\varphi(\gamma))^{-1}, \sigma_M^H \rangle \\ &= \langle (K^\varphi(\nu M))^{-1}, \sigma_M^H \rangle = \langle (K^\varphi(\tau M))^{-1}, \sigma_M^H \rangle \\ &= \varphi(M). \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2 : La série formelle

$$\mathcal{Q}^\varphi(X) = 1 + \sum_{i \geq 1} \rho(K^\varphi)(b_i)X^i$$

est la série caractéristique du genre multiplicatif φ .

Démonstration : Rappelons que la m-suite de Hirzebruch $K^\varphi = \{K_i^\varphi\}$ d'un genre φ et sa série caractéristique $\mathcal{Q}^\varphi(X)$ sont liées de la manière suivante: soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n , en écrivant formellement sa classe totale de Chern sous la forme $c(\xi)(X) = \sum_{0 \leq i \leq n} c_i(\xi)X^i = \prod_{1 \leq i \leq n} (1 + t_i X^i)$ avec $c_i(\xi) = \sigma_i(t_1, \dots, t_n)$; alors on a : $K^\varphi(c(\xi)) = 1 + \sum_{i \geq 1} K_i^\varphi(c_1(\xi), \dots, c_i(\xi))X^i = \prod_{1 \leq i \leq n} K^\varphi(1 + t_i X) = \prod_{1 \leq i \leq n} \mathcal{Q}^\varphi(t_i X)$. Soit maintenant γ_1 le fibré de Hopf sur $\mathcal{CP}^\infty \simeq BU(1)$ et $t = c_1(\gamma_1)$, on a :

$\mathcal{Q}^\varphi(tX) = 1 + K_1^\varphi(t)X + K_2^\varphi(t, 0)X^2 + \dots$ avec $K_i^\varphi(t, 0, \dots, 0) \in H^{2i}(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z})$, $K_i^\varphi(t, 0, \dots, 0) = \langle K_i^\varphi(t, 0, \dots, 0); \sigma_{\mathbb{CP}^i} \rangle_{t^i}$. Or si $j: \mathbb{CP}^i \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$ est l'inclusion canonique, l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} H^{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & I \\ x & \longrightarrow & \langle x, \sigma_{\mathbb{CP}^i} \rangle \end{array}$$

est un isomorphisme. Ainsi, grace à cette identification, il suffit de montrer que $\rho(K^\varphi c(\gamma))(b_i) = \langle K_i^\varphi(c_1, 0, \dots, 0), \sigma_{\mathbb{CP}^i} \rangle$ où c_1 est la première classe de Chern du fibré universel γ sur BU . On a donc :

$$\begin{aligned} \rho(K^\varphi c(\gamma))(b_i) &= \langle K^\varphi c(\gamma), \beta_i \rangle = \langle K_i^\varphi(c_1, \dots, c_i), j_*(\mathbb{CP}^i) \rangle \\ &= \langle j^* K_i^\varphi(c_1, \dots, c_i), \mathbb{CP}^i \rangle = \langle K_i^\varphi(c_1(j^* \gamma^1), 0, \dots, 0), \mathbb{CP}^i \rangle \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que l'inclusion $j: \mathbb{CP}^i \rightarrow BU(1) \rightarrow BU$ classe le fibré de Hopf sur $\mathbb{CP}^i$. Ainsi : $\rho(K^\varphi(b_i)) = \langle K_i^\varphi(c_1, 0, \dots, 0), \mathbb{CP}^i \rangle$. ■

3. Caractère d'un genre multiplicatif

Nous supposons maintenant que A_* est une I -algèbre graduée munie d'un groupe formel $F(X, Y)$ vérifiant le théorème du foncteur exact de Landweber [5]. L'application classifiante de $F(X, Y)$, $\varphi: MU_* \rightarrow A_*$ est un genre multiplicatif qui confère à A_* une structure de MU_* -module, et $h^*(X) = MU^*(X) \otimes_\varphi A_*$ est une théorie cohomologique multiplicative I -orientée dont l'anneau de base est $h_*(pt) = A_*$. Soit E le spectre représentant la théorie $h^*(-)$ et $\nu: MU \rightarrow E$ son application classifiante. On sait que $\nu_*(pt) = \varphi$. Nous définissons le caractère du genre φ (ou le φ -caractère) C^φ par :

$$(1) \quad C^\varphi = ch_d \circ \nu: MU \rightarrow \mathcal{H}(A)_*$$

où ch_d est le caractère de Chern-Dold (voir [1]).

Cette application de spectre-anneaux induit une transformation naturelle encore notée C^φ :

$$(2) \quad C^\varphi: MU_*(X) \rightarrow H_*(X; A)_*$$

c'est à dire qu'en chaque degré n , nous avons:

$$\begin{aligned} C^\varphi: MU_n(X) &\longrightarrow \sum_{i=0}^n H_{n-i}(X, A_i \otimes \mathbb{Q}) \\ \alpha &\longrightarrow C^\varphi(\alpha) = C_n^\varphi(\alpha) + C_{n-1}^\varphi(\alpha) + \dots + C_0^\varphi(\alpha) \end{aligned}$$

où $C_{n-i}^\varphi(\alpha) \in H_{n-i}(X, A_i)$ est donné par l'équation suivante :
 α étant représenté par $\{M, f\}$, pour tout $x \in H^{n-i}(X; , A_i)$

$$\langle x, C^\varphi(\alpha) \rangle = \langle f^*(x)K^\varphi(c(\tau M)), \sigma_M^H \rangle$$

Notons que :

1) $C_n^\varphi(\alpha) = \mu(\alpha)$ où $\mu : MU_*(X) \rightarrow H_*(X; A_*)$ est l'homomorphisme de Thom.

$$2) C_0^\varphi(\alpha) = \varphi(\{M\})$$

3) Si on prend dans (2) $X = pt$ on obtient :

$$C^\varphi(pt) : MU_* \longrightarrow A_*$$

$$\{M\} \longrightarrow \varphi(\{M\})$$

Considérons maintenant l'homomorphisme

$$C_*^\varphi : H_*(MU; \mathbb{I}) \rightarrow H_*(\mathcal{H}(A_*; \mathbb{I}) \overset{\circ}{\wedge} A_* \overset{\circ}{\wedge} A_*)$$

induit par (1) en homologie ordinaire à coefficients dans $\mathbb{I}$.

Proposition 3.1 : L'homomorphisme C_*^φ coïncide avec $\rho(K^\varphi) \otimes 1_I$

Démonstration : Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2 : Soient E, F, H trois spectres et G un spectre anneau. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ sont deux applications de spectres, on peut considérer, d'une part les homomorphismes

$f_*^G : G_*(E) \rightarrow G_*(F) ;, f_*^G : H_*(E) \rightarrow H_*(F) ;, g_* : G_*(-) \rightarrow H_*(-)$, et d'autre part les homomorphismes d'Hurewicz

$h^E :_* (E) \rightarrow G_*(E) ;, h^F :_* (F) \rightarrow G_*(F)$.

Nous avons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} *_*(E) & \xrightarrow{f_*^G} & *_*(F) \\ h^E \downarrow & & \downarrow h^F \\ G_*(E) & \xrightarrow{f_*^G} & G_*(F) \\ g_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ H_*(E) & \xrightarrow{f_*^H} & H_*(F) \end{array}$$

Il suffit alors de prendre dans le lemme 3.2 $E = MU, F = \mathcal{H}A_*$ et $f = C^\varphi : MU \rightarrow \mathcal{H}A_*; G = \mathcal{H}\mathbb{Z}, H = \mathcal{H}\mathbb{Q}$ et $g : \mathcal{H}\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{H}\mathbb{Q}$. On aura donc $f_*^H = \rho(K^\varphi) \otimes 1_I$ ■

Cependant, si $\sum_{k \geq 0} a_E^\varphi X^k$ est la série caractéristique du genre φ , on déduit à partir de la proposition 3.1 et du corollaire 2.2 l'expression de $\mathcal{C}_*^\varphi$ sur les générateurs b_k de $H_{2k}(MU; \mathbb{I})$. Nous avons :

$$(3) \quad \mathcal{C}_*^\varphi(b_k) = \rho(K^\varphi) \otimes 1(b_k) = a_E^\varphi \in A\mathcal{Q}$$

D'autre part, la proposition 4.3 de [6] se généralise sans difficultés au cas d'une théorie cohomologique I -orientée. Notons d'abord que l'homomorphisme d'Hurewicz $h : MU_*(X) \rightarrow H_*(X; \mathbb{I} \otimes H_*(MU; \mathbb{I}))$ induit par l'application de spectres $X^+ \wedge MU \rightarrow X^+ \wedge MU \wedge \mathcal{H}$ est donné par (voir Proposition 4.3 de [6]) :

$$(4) \quad h(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \otimes b_E$$

où s_E est l'opération de Landweber-Novikov relative à $E = (e_1, e_2, \dots)$ et χ l'anti-involution de l'algèbre $MU^*(MU)$.

Proposition 3.3 : Soit θ la composition suivante: $H_*(X; \mathbb{I}) \otimes H_*(MU; \mathbb{I}) \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{C}_*^\varphi} H_*(X; \mathbb{I} \otimes H_*(\mathcal{H}A_*; \mathbb{I})) \otimes H_*(X; \mathbb{I} \otimes A_* \hat{A}H_*(X; A_*))$. L'homomorphisme (2) est donné par: $\mathcal{C}_*^\varphi = \theta \circ h$, h étant l'homomorphisme de Hurewicz (4).

Démonstration : Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X^+ \wedge MU \wedge S^0 & \xrightarrow{1 \wedge 1 \wedge \iota_{\mathcal{H}I}} & X^+ \wedge MU \wedge \mathcal{H}I \\ 1 \wedge \mathcal{C}^\varphi \wedge 1 \downarrow & & \downarrow 1 \wedge \mathcal{C}^\varphi \wedge 1 \\ X^+ \wedge \mathcal{H}A_* \wedge S^0 & \xrightarrow{1 \wedge 1 \wedge \iota_{\mathcal{H}I}} & X^+ \wedge \mathcal{H}A_* \wedge \mathcal{H}I \end{array}$$

est évidemment commutatif. En appliquant le foncteur $\pi_*(-)$, on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} MU_*(X) & \xrightarrow{h^{MU \wedge X}} & H_*(X \wedge MU; \mathbb{I}) \\ \star(1 \wedge \mathcal{C}^\varphi) \downarrow & & \downarrow (1 \wedge \mathcal{C}^\varphi)_\star \\ H_*(X; A_*) & \xrightarrow{h^{\mathcal{H}A_* \wedge X}} & H_*(X \wedge \mathcal{H}A_*; \mathbb{I}) \end{array}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 3.4 : Soient $\alpha \in MU_*(X)$, $E = (e_1, e_2, \dots)$.

Notons $a_E^\varphi = (a_1^\varphi)^{e_1} (a_2^\varphi)^{e_2} \dots$ nous avons:

$$\mathcal{C}^\varphi(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) a_E^\varphi$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\varphi(\alpha) &= \theta oh(\alpha), && \text{d'après la proposition 3.3} \\ &= \theta \left(\sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) b_E^\varphi \right) && \text{d'après (4)} \\ &= \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \mathcal{C}_*^\varphi(b_E) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \prod_k \mathcal{C}_*^\varphi(b_k)^{e_k} \\ &= \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \prod_k (a_k^\varphi)^{e_k} && \text{d'après (3).} \end{aligned}$$

■

4. Applications

a) Caractère de Todd

Si la théorie $h^*(-)$ est la K-théorie complexe, le φ -caractère est le celui de Todd [1], $th : MU_*(X) \rightarrow H_*(X; \pi_*(K))$. D'autre part, la théorie $K^*(-)$ est classifiée par le genre multiplicatif

$$\varphi_K : MU_* \rightarrow A_* = \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$$

donné par $\varphi_K(\{M^{2n}\}) = Td(\{M^{2n}\})u^n$ où $Td(\{M^{2n}\})$ est le genre de Todd $Td : MU_* \rightarrow \mathbb{Z}$ de série caractéristique

$$\mathcal{Q}_{Td}(X) = 1 + \frac{1}{2}X + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} X^{2k}$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli (voir [2]). Cependant, la série caractéristique de φ_K est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{Td}(X) = 1 + \frac{1}{2}uX + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} u^k X^{2k}$$

Il découle alors du théorème 3.4 que pour tout $\alpha \in MU_*(X)$:

$$th(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \tilde{B}_E$$

où $\tilde{B}_E = (\frac{u}{2})^{e_1} (\bar{B}_1 u^2)^{e_2} 0^{e_3} (\bar{B}_2 u^4)^{e_4} \dots 0^{e_{2i+1}} (\bar{B}_{i+1} u^{2i+2})^{e_{2i+2}} \dots$
avec $E = (e_1, e_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$, et la convention $0^0 = 1$.

Remarque 4.1: Si la théorie $h^*(-)$ considérée est périodique, et si l'élément de périodicité u est de degré 2, alors à partir du groupe formel $F(X, Y)$ sur A_* , définissant $h^*(-)$, on peut considérer le groupe formel $F_0(X, Y) = uF(X/u, Y/u)$ qui sera un groupe formel sur A_0 . De plus son logarithme $g_0(X)$ est lié à celui de $F(X, Y)$ par $g(X) = (1/u)g_0(uX)$. On déduit que si $\varphi : MU_* \rightarrow A_*$ est le genre associé au groupe formel gradué $F(X, Y)$, alors pour toute classe de bordisme $\{M\} \in MU_{2k}$, on a $\varphi(\{M\}) = \varphi_0(\{M\})u^k$, où $\varphi_0 : MU_* \rightarrow A_0$ est l'application qui classe le groupe formel $F_0(X, Y)$. Dans ce cas nous avons une autre expression de (3) : Si $\{M^{2k}\}$ est le générateur de MU_* qui s'envoie sur b_k par l'homomorphisme d'Hurewicz $h : MU_* \rightarrow H_*(MU; \mathbb{Z})$ alors :

$$C_*^\varphi(b_k) = \varphi(\{M^{2k}\}) = \varphi_0(\{M^{2k}\})u^k$$

Ceci nous permet de retrouver l'expression du caractère de Todd telle qu'elle est donnée dans ([6], Theorem 4.6)

$$th(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})) \bar{B}_E u^{|E|}$$

en posant $|E| = \sum_i i e_i$ et $\bar{B}_E = (\frac{1}{2})^{e_1} (\bar{B}_1) e_2 0^{e_3} (\bar{B}_2)^{e_4} \dots 0^{e_{2i+1}} (\bar{B}_{i+1})^{e_{2i+2}} \dots$

b) Caractère elliptique

Nous adopterons les notations de [4] pour désigner la cohomologie elliptique :

$$\mathcal{E}ll^*(X) = MU^* \otimes_{MU} \mathbb{Z}[1/2][\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$$

avec $\gamma = \delta^2 - \epsilon$. (On pourrait aussi prendre $\gamma = \epsilon$ ou $\Delta = \epsilon(\delta^2 - \epsilon)^2$). $\mathcal{E}ll^*(X)$ est une théorie cohomologique I -orientée définie par le genre elliptique $\varphi_{ell} : MU_{\mathbb{Z}}[1/2][\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$ dont le logarithme est donné par

$$g_{ell}(X) = \int_0^X \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \epsilon t^4}} = \sum_{n \geq 0} \frac{P_n(\delta/\sqrt{\epsilon}) \sqrt{\epsilon}^n}{2n+1} X^{2n+1}$$

où P_n est le n -ième polynôme de Legendre.

Notons que l'anneau de base $\mathbb{Z}[1/2][\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$ est gradué, et que sa graduation est donnée par $d^0\delta = 4$ et $d^0\epsilon = 8$, il est donc $4I$ -gradué. De plus, on peut montrer (voir [3]) qu'en posant $\gamma = \delta^2 - \epsilon$ et $\mathcal{A}_* = \mathcal{Q}[\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$, alors la I -algèbre graduée $\mathcal{A}_*$ est complètement déterminée par δ , γ et $\mathcal{A}_o = \mathcal{Q}[\delta^2/\gamma]$. Pour tout k nous avons: $\mathcal{A}_{8k} = \gamma^k \mathcal{A}_o$, $\mathcal{A}_{8k+1} = \gamma^k \delta \mathcal{A}_o = \gamma^k \mathcal{A}_{4k}$. Par ailleurs, le caractère elliptique a été défini dans [3] par $e : MU_*(X) \rightarrow H_*(X; \mathcal{A}_*)$. La transformation $\mathcal{C}_*^\varphi$ dans le cas où $h^*(-) = \mathcal{EU}^*(-)$ devient:

$$e_* : H_*(MU; \mathbb{I}) \rightarrow H_*(\mathcal{H}\mathcal{A}_*; \mathcal{A}_*) = \mathcal{Q}[\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$$

et d'après (3) : $e_*(b_k) = a_k^{ell}$ où $\sum_{k \geq 0} a_k^{ell} X^k$ coïncide avec la série caractéristique du genre elliptique donnée par (voir [8]):

$$Q^{ell}(X) = 1 - \sum_{k > 0} \frac{G_{2k}^*}{2^{2k-2}(2k-1)!}$$

Il en découle que:

$$(5) \quad \begin{aligned} a_0^{ell} &= 1 \\ a_{2k+1}^{ell} &= 0 \\ a_{2k}^{ell} &= H_k = -\frac{G_{2k}^*}{2^{2k-2}(2k-1)!} \end{aligned}$$

Si on pose $\tilde{H}_E = 0^{e_1}(H_1)^{e_2} 0^{e_3}(H_2)^{e_4} \dots 0^{e_{2i+1}}(H_{i+1})^{e_{2i+2}} \dots$ où $E = (e_1, e_2, \dots)$ on a :

$$(6) \quad e_*(b_E) = \prod_{i \geq 1} (e_*(b_i))^{e_i} = \tilde{H}_E$$

on obtient alors

Proposition 4.2 : Pour tout $\alpha \in MU_*(X)$, $e(\alpha) = \sum_E \mu((\chi^{s_E})(\alpha)) \tilde{H}_E$

Démonstration : Immédiat à partir de (6) est du théorème 2.4. ■

Remarque 4.3 Comme e_* est un homomorphisme à valeurs dans $\mathcal{A}_* = \mathcal{Q}[\delta, \epsilon, \gamma^{-1}]$ nous espérons obtenir une expression de $e_*(b_i)$ en fonction de δ , ϵ et γ , ce qui est d'ailleurs immédiat dans le cas de la K-théorie, où $\mathcal{A}_* = \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ avec $d^0u = 2$ (c.f remarque 4.1). Dans le cas du caractère

elliptique, on peut noter que $e_* : H_k(MU; \mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{A}_k$ est nul sauf si $k = 0 \bmod 4$; et en vertu de la proposition 3.1 on a $e_*(x) = \langle \Phi^* E_k(p_1, \dots, p_k); x \rangle$ pour tout $x \in H_*(MU; \mathbb{I})$ où les $E_k(p_1, \dots, p_k)$ sont les polynômes elliptiques associés à la classe exponentielle elliptique (c.f [3]).

Si $k = 2n$:

Nous considérons les polynômes :

$$R_{2n}(p_1, \dots, p_{2n})[\delta^2/\gamma] = \frac{E_{2n}(p_1, \dots, p_{2n})}{\gamma^n}$$

qui sont des polynômes de degré $2n$ en (δ^2/γ) à coefficients des polynômes homogènes en $p_1, p_2, \dots$ de poids $2n$. L'homomorphisme

$$e_* : H_{8n}(MU; \mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{A}_{8n} \mathcal{A} \mathcal{Q}[\delta^2/\gamma] \gamma^2$$

sera donc défini par

$$e_*(x) = \langle \Phi^* R_{2n}(p_1, \dots, p_{2n})[\delta^2/\gamma]; x \rangle \gamma^n$$

Si $k = 2n + 1$ on introduit les polynômes

$$S_{2n+1}(p_1, \dots, p_{2n+1})[\delta^2/\gamma] = \frac{E_{2n+1}(p_1, \dots, p_{2n+1})}{\delta \gamma^n}$$

qui sont aussi des polynômes de degré $2n+1$ en δ^2/γ à coefficients des polynômes homogènes en $p_1, p_2, \dots$ de poids $2n+1$.

$e_* : H_{8n+4}(MU; \mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{A}_{8n+4} \mathcal{A} \mathcal{Q}[\delta^2/\gamma] \delta \gamma^n$ est donné par

$$e_*(x) = \langle \Phi^* S_{2n+1}(p_1, \dots, p_{2n+1})[\delta^2/\gamma]; x \rangle \delta \gamma^n.$$

En posant $r_{2n}(x) = \langle \Phi^* R_{2n}(p_1, \dots, p_{2n})[\delta^2/\gamma]; x \rangle \in \mathcal{A}_o = \mathcal{Q}[\delta^2/\gamma]$ et $s_{2n+1}(x) = \langle \Phi^* S_{2n+1}(p_1, \dots, p_{2n+1})[\delta^2/\gamma]; x \rangle \in \delta \mathcal{A}_o$, on obtient une autre formulation de (5) :

$$e_*(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \bmod(4) \\ r_{2n}(b_i) \gamma^n & \text{si } i = 8n \\ s_{2n+1} & \text{si } i = 8n + 4 \end{cases}$$

Références :

- [1] V.M. Bukhshtaber, *Characteristic classes in Cobordism and topological applicatiopns of the theory of single-valued and two-valued formal groups*, English transl. in J. Soviet Math. 11, no.6, (1979).
- [2] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd edition Berlin-Heidelberg, Springer (1966).
- [3] A. Kheldouni and F. Lamrini, *Chern-Dold Character in Elliptic Cohomology*, Extracta Mathematicae, vol.10 Nùm.2, 1-5, (1995).
- [4] P.S. Landweber, *Elliptic Curves and Modular Forms*, L.N.M. 1326, Berlin-Heidelberg, Springer (1988).
- [5] P.S. Landweber, *Homological Properties of Comodules over $MU^*(MU)$ and $BP^*(BP)$* , American J. of Math. vol. 98 no.3 pp 591-610.
- [6] L. Smith, *The Todd Character and Cohomology Operations*, Advances in Mathematics, 10 (1973), pp 72-92.
- [7] R.E. Stong, *Notes on Cobordism Theory*, McGraw-Hill, (1968).
- [8] D. Zagier, *Note on the Landweber-Stong elliptic genus*, L.N.M. 1326, Berlin-Heidelberg, Springer (1988).

Received : October 1997.

Abdelaziz Kheldouni

and

Fayçal Lamrini

Université Mohammed Benabdallah

Faculté des Sciences Dhar-Mehraz

Département de Mathématiques

B. P. 1796 FES - Atlas

MAROC