ALGUNOS INVARIANTES PARA ÁLGEBRAS BÁRICAS QUE SATISFACEN $(x^2)^2 = w(x)^3 x^*$

Abdón Catalán S.

Universidad de la Frontera, Temuco - Chile

Resumen

En [1] y [2] se define el concepto de E -ideal de una álgebra bária (A, w) asociada a un train polinomio $p(x)$, como también clase de equivalencia de train polinomios sobre una subclase Ω de álgebras báricas. Se probó que para las álgebras que satisfacen la identidad $(x^2)^2 = w(x)^3 x$ sólo existen tres clases de equivalencia de train polinomios, es decir, estas álgebras sólo contienen tres E -ideales. El cálculo de los E -ideales, en general, es complicado ya que para hacerlo se debe considerar potencias (principales) de un elemento arbitrario de la álgebra. Usando E -ideales de una álgebra bária es posible obtener algunos invariantes de ella.

En este trabajo, probamos que es suficiente considerar elementos de A de peso 1 para generar los E -ideales, simplificando el cálculo sustancialmente.

Usando los E -ideales de A generados por elementos de peso cero, obtenemos nuevos invariantes para las álgebras que satisfacen $(x^2)^2 = w(x)^3 x$.

1. Preliminares

Sean F un cuerpo, A una álgebra sobre el cuerpo F conmutativa, no necesariamente asociativa o de dimensión finita. Si existe un homomorfismo no nulo de álgebras $w : A \rightarrow F$, diremos que el par ordenado (A, w) es una álgebra bária sobre F ; en este caso w se llama función peso de (A, w) , y para cada $a \in A$, $w(a)$ es el peso de a . Los elementos de peso cero forman un ideal N de codimensión 1 en A . Los elementos de peso 1 forman un hiperplano afín. Cuando se hace la teoría de álgebras genéticas con vistas a aplicaciones a la Genética de Poblaciones, gran parte de la atención se localiza en ese hiperplano. El concepto de álgebra bária sobre los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ fue introducido por Etherington [3].

Para un estudio de álgebras báricas de todo lo que se conocía hasta 1980 ver [7].

Definición 1 : Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ elementos de F tal que $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$. La expresión formal

$$(1.1) \quad p(x) = x^n + \gamma_1 w(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1} x$$

es llamado un train polinomio de grado n con coeficientes $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$.

Definición 2 : El ideal generalizado de Etherington (o simplemente E -ideal) de una álgebra bária (A, w) , asociado al train polinomio $p(x)$ como en (1.1), es el ideal de A generado por todos los elementos de la forma $p(a) = a^n + \gamma_1 w(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} w(a)^{n-1} a$, cuando a varía en A .

Diremos también, abusando del lenguaje, que este ideal es generado por $p(a)$, y será denotado por $E_A(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ o simplemente $E_A(p)$.

El ideal de Etherington de una álgebra bária (A, w) es $E_A(1, -1)$ (ver [3]). Observe que $E_A(p) \subseteq N$, $A/E_A(p)$ satisface $p(x) = 0$ y $E_A(p)$ es el menor ideal $I \subseteq N$ tal que A/I satisface $p(x) = 0$. Si una álgebra bária (A, w) satisface la identidad $p(x) = 0$, se dice que es una train álgebra de rango $\leq n$. En [2], también se prueba que para toda álgebra bária (A, w) y todo train polinomio $p(x)$, $E_A(p) \subseteq E_A(1, -1)$.

Definición 3 : Sea Ω una clase no vacía de álgebras báricas sobre el cuerpo F . Dos train polinomios $p(x)$ e $q(x)$ son equivalentes módulo Ω cuando $E_A(p) = E_A(q)$ para toda $A \in \Omega$.

En particular, cuando Ω es formada por una única álgebra bérica (A, w) , las clases de equivalencia de train polinomios módulo Ω corresponden biunivocamente a los E -ideales de A .

En [1] se probó que la clase de álgebras béricas que satisface la identidad $(x^2)^2 = w(x)^3 x$ poseen sólo tres clases de equivalencia de train polinomios cuyos representantes de menor grado son los train polinomios : $x^2 - w(x)x$; $x^3 - \frac{1}{2}w(x)x^2 - \frac{1}{2}w(x)^2x$ y $x^4 - \frac{3}{4}w(x)^2x^2 - \frac{1}{4}w(x)^3x$.

2. E-ideales

Denotemos $E_A^1(p)$ el ideal de A generado por los elementos $p(a)$ con los elementos $p(a)$ con $a \in A$ y $w(a) = 1$. Es claro que $E_A^1(p) \subseteq E_A(p)$. De manera similar, $E_A^0(p)$, el ideal generado por todos los elementos $p(a)$ con $a \in A$ e $w(a) = 0$, está contenido en $E_A(p)$. De ahí $E_A^0(p) + E_A^1(p) \subseteq E_A(p)$.

Lema 1 : Para toda álgebra bérica (A, w) sobre un cuerpo F con $|F| > \text{grado de } p$ donde $p = p(x)$ es un train polinomio como en (1.1), tenemos $E_A^0(p) + E_A^1(p) = E_A(p)$.

Demostración : Sea $p(a) = a^n + \gamma_1 w(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} w(a)^{n-1} a$ con $a \in A$ un generador de $E_A(p)$. Si $w(a) = 0$, entonces $p(a) = a^n \in E_A^0(p)$. Si $w(a) \neq 0$, podemos escribir

$$p(a) = w(a)^n \left(\left(\frac{a}{w(a)} \right)^n + \gamma_1 \left(\frac{a}{w(a)} \right)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \left(\frac{a}{w(a)} \right) \right) = w(a)^n p(b)$$

donde $b = \frac{a}{w(a)}$ tiene peso 1, esto quiere decir que $p(a) \in E_A^1(p)$.

Así $E_A(p) \subseteq E_A^0(p) + E_A^1(p)$ por tanto $E_A^0(p) + E_A^1(p) = E_A(p)$. $\square$

En el siguiente lema usamos la fórmula del binomio cuando las variables son elementos en una álgebra no necesariamente asociativa ni conmutativa, a saber,

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (id^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)})$$

(ver [5]).

Lema 2 : Con las mismas hipótesis de la Lema 1 tenemos :

$$E_A^0(p) \subseteq E_A^1(p).$$

Demostración : Los generadores de $E_A^0(p)$ son los elementos b^n , con $w(b) = 0$. Fijado uno de estos generadores b^n , consideremos los elementos $a_\lambda \in A$ dados por $a_\lambda = e + \lambda b$, donde $\lambda \in F$ y e de peso 1. Tenemos $w(a_\lambda) = 1$ e consecuentemente $p(a_\lambda) \in E_A^1(p)$. Pero,

$$\begin{aligned} p(a_\lambda) &= \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (e + \lambda b)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} id^{(n-i)}(e^{(n-i-k)}, (\lambda b)^{(k)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda^k \binom{n}{k} id^{(n)}(e^{(n-k)}, b^{(k)}) + \\ &\quad \gamma_i \sum_{k=0}^{n-i} \lambda^k \binom{n-1}{k} id^{(n-1)}(e^{(n-k-1)}, b^{(k)}) + \dots \\ &\quad + \gamma_{n-1} \sum_{k=0}^1 \lambda^k \binom{1}{k} id^{(1)}(e^{(1-k)}, b^{(k)}) \\ &= c_0 + \lambda c_1 + \dots + \lambda^n c_n \end{aligned}$$

donde $c_k = \sum_{j=0}^{n-k} \gamma_j \binom{n-j}{k} id^{(n-j)}(e^{(n-j-k)}, b^{(k)})$ para $k = 1, \dots, n$,

en particular, $c_n = b^n$ e $c_0 = 0$. Así para todo $\lambda \in F$, $\lambda c_1 + \dots + \lambda^n b^n \in E_A^1(p)$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ son todos distintos entonces $\lambda_i c_1 + \dots + \lambda_i^n b^n$ ($i = 1, \dots, n$) son elementos que pertenecen al ideal $E_A^1(p)$, y como estos λ_i forman un sistema de Vandermonde, concluimos que cada c_i , $i = 1, \dots, n$ pertenece al ideal $E_A^1(p)$. En particular, $b^n \in E_A^1(p)$, es decir, $E_A^0(p) \subseteq E_A^1(p)$.

Así tenemos la siguiente :

Proposición 1 : Con las mismas hipótesis del Lema 1 tenemos $E_A(p) = E_A^1(p)$.

3. Invariantes

Sea Ω la clase de álgebras báficas que satisfacen la identidad

$$(3.1) \quad (x^2)^2 = w(x)^3 x$$

Se sabe de Walcher [6], que admiten idempotentes de peso uno y respecto a uno de ellos fijo, a saber e , A se escribe como $A = Fe \oplus U \oplus V$, donde $U = \left\{ x \in \ker w : ex = \frac{1}{2}x \right\}$ y $V = \left\{ x \in \ker w : ex = -\frac{1}{2}x \right\}$. Los subespacios U y V dependen de la elección del idempotente e , sin embargo, es fácil probar que si A es de dimensión finita, sus dimensiones son invariantes, teniendo así el invariante tipo de A , definido como el par ordenado $(1 + \dim U, \dim V)$. Otros invariantes obtenidos via E -ideales son $\dim UV$ y $\dim UV^2 \oplus V^2$, ver [1].

Para cada $u \in U$ y $v \in V$ tenemos :

$$\begin{array}{ll} i) u^3 = 0 & vi) u^2(uv) = 0 \\ ii) 2u(uv) = u^2v & vii) 2(uv)^2 + u^2v^2 = 0 \\ iii) 2(uv)v = uv^2 & viii) (uv)v^2 = 0 \\ iv) v^3 = 0 & ix) (v^2)^2 = 0 \\ v) (u^2)^2 = 0 & \\ & ii') u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = (u_1u_2)v \\ & iii') (uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 = u(v_1v_2) \end{array}$$

Proposición 2 : Sea $A = Fe \oplus U \oplus V$ una álgebra bérica que satisfice (3.1). Entonces los subespacios $UV \oplus (U^2 + V^2)$ y $UV^2 \oplus U^2V$ son ideales de A .

Demostración : Es claro que estos subespacios son e -invariantes. Además, como $U[UV \oplus (U^2 + V^2)] = U(UV) + UU^2 + UU^2 \subseteq U^2 + UV \subseteq UV \oplus (U^2 + V^2)$ y $[UV \oplus (U^2 + V^2)]V = (UV)V + U^2V + V^2V \subseteq UV + V^2 \subseteq UV \oplus (U^2 + V^2)$, entonces $UV \oplus (U^2 + V^2)$ es un ideal de A . Por otro lado, afirmamos que $U(UV^2) \subseteq U^2V$; $(U^2V)V \subseteq U^2V$ y $(UV^2)V \subseteq UV^2$. En efecto : usando sucesivamente las identidades iii') y ii'), además de $(u_1v_1)(u_2v_2) + (u_1v_2)(u_2v_1) + (u_1u_2)(v_1v_2) = 0$, tenemos que $u_1(u_2(v_1v_2)) = (u_1(u_2v_1))v_2 + (u_1(u_2v_2))v_1 + (u_1u_2)(v_1v_2) \in U^2V$; usando ii') tenemos $((u_1u_2)v_1)v_2 = [u_1(u_2v_1) + u_2(u_1v_1)]v_2 \in U^2V$; usando iii') tenemos $(u(v_1v_2))v_3 = u((v_1v_2)v_3 - (uv_3)(v_1v_2)) \in UV^2$, y finalmente como $U(U^2V) \subseteq UV^2$ resulta que $UV^2 \oplus U^2V$ es un ideal de A .

Proposición 3 : Sea $A = Fe \oplus U \oplus V$ una álgebra bérica que satisfice (3.1). Entonces $UV \oplus (U^2 + V^2)$ y $UV^2 + U^2V$ están generados por los cuadrados y los cubos de los elementos de A de peso cero respectivamente.

Demostración : Sea $a = u + v$ con $u \in U$ y $v \in V$ un elemento arbitrario de peso cero, entonces $a^2 = u^2 + 2uv + v^2 \in UV \oplus (U^2 + V^2)$ y como este subespacio es un ideal tenemos que el ideal generado por los elementos $a^2, \langle a^2 \rangle \subseteq UV \oplus (U^2 + V^2)$. Por otro lado $u_1 u_2 = \frac{1}{2} [(u_1 + u_2)^2 - u_1^2 - u_2^2]$ y $v_1 v_2 = \frac{1}{2} [(v_1 + v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2]$ y $uv = \frac{1}{2} [(u + v)^2 - u^2 - v^2]$ son elementos de $\langle a^2 \rangle$, así, UV, U^2 y V^2 están contenido en $\langle a^2 \rangle$ y consecuentemente $UV \oplus (U^2 + V^2)$ de modo que $\langle a^2 \rangle = UV \oplus (U^2 + V^2)$

Como $a^3 = u^2 v + uv^2 \in \langle a^3 \rangle$, $\langle a^3 \rangle \subseteq UV^2 \oplus U^2 V$. Por otro lado $(u_1 u_2) v = \frac{1}{2} [(u_1 + u_2)^2 v + (u_1 + u_1) v^2 - (u_1^2 v + u_1 v^2) - (u_2^2 v + u_2 v^2)] \in \langle x^3 \rangle$ de donde $U^2 V \subseteq \langle a^3 \rangle$, análogamente $UV^2 \subseteq \langle a^3 \rangle$, y finalmente $\langle a^3 \rangle = UV^2 \oplus U^2 V$. $\square$

Corolario 1 : $\dim (UV \oplus (U^2 + V^2)), \quad \dim (UV^2 \oplus U^2 V)$ y $\dim (U^2 + V^2)$ son invariantes de A .

Referencias

- [1] **Catalán A. ; Costa, R. :** "Acerca de álgebras báficas satisfaciendo $(x^2)^2 = w(x)^3 x$ ", *Cubo* 8, pp. 25 – 29 (1992).
- [2] **Catalán, A. :** "E-ideals in baric algebras", *Matemática Contemporánea*, Soc. Bras. Mat. 6, pp. 7 – 12 (1994).
- [3] **Etherington I. M. H. :** "Genetic algebras", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*. 59, pp. 242 – 258 (1939).
- [4] **Etherington I. M. H. :** "Commutative train algebras of rank 2 and 3", *J. London Math. Soc.* 15. pp. 136 – 149 (1940).
- [5] **Guzzo Junior H. :** "Contribuições à teoria das álgebras não associativas". Tese Doutorado IME-USP (1991).
- [6] **Walcher S. :** "Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary power". *Arch. Math.* 56, pp. 547 – 551 (1991).
- [7] **Worz A. :** "Algebras in genetics", *Lect. Notes in Biomath.* 36, Springer-Verlag, Berlin (1980).

Recibido : Septiembre 05, 1994.

Abdón Catalán Sobarzo
Departamento de Matemáticas
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D
Temuco - Chile