

Proyecciones
Vol. 11 N° 1, pp.49-75 Mayo 1992
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

**BIFURCACIONES DE UN OSCILADOR NO LINEAL
DE TIPO CUBICO, DEBILMENTE FORZADO
CON FRICCION CUARTICA***

H. BURGOS V.

Universidad de la Frontera, Temuco, Chile

J. BILLEKE G.

Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile

M. WALLACE C.

Universidad de Concepción, Chile

Resumen

En este trabajo se considera el oscilador no lineal débilmente forzado:

$$\ddot{x} + \alpha f(x)\dot{x} + g(x) = \beta \cos \omega t.$$

donde $f(x)$ es un polinomio de grado cuatro y $g(x)$ es un polinomio cúbico. Se presentan los diagramas de bifurcación en el caso no forzado ($\beta = 0$), en función de los coeficientes de f y g .

Aplicando el método del promedio (en la versión de P. Holmes y J. Guckenheimer) se obtiene la ecuación promediada asociada, para α, β pequeños y la no linealidad cúbica de $g(x)$, también pequeña. Se estudian estas familias y se describen los diferentes retratos de fase que ocurren genéricamente para los coeficientes de $f(x)$.

* Trabajo parcialmente financiado por DIUFRO 732-90 y DICYT 04-90-33BG

1. Introducción.

1.1 Consideremos el oscilador no lineal de tipo cúbico débilmente forzado con fricción cuártica dado por la familia de ecuaciones de Liénard:

$$(1) \quad \ddot{x} + \alpha f(x)\dot{x} + g(x) = \beta \cos \omega t.$$

donde $f(x) = x^4 - \alpha x^2 - \mu$, $g(x) = x - \lambda x^3$, son polinomios en x , cuyos coeficientes reales α, μ, λ , son llamados parámetros internos del oscilador, α, β, ω son parámetros reales positivos $0 < \alpha, \beta \ll 1$.

La familia (1) es equivalente al sistema autónomo en $\mathbb{R}^2 \times S^1_T$ dado por:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - \alpha(\frac{x^5}{5} - \frac{\alpha x^3}{3} - \mu x) \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 + \beta \cos \omega \theta \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1_T, \text{ donde } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La dinámica de (1) se puede conocer estudiando la dinámica de la transformación de Poincaré ϕ_T de (2)

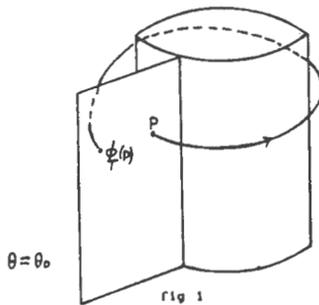


Fig 1

1.2 En el caso no forzado, $\beta = 0$, la dinámica de (2), (por lo tanto de (1)) ha sido estudiada por los autores en el caso $\lambda = 0$, ([2],[3]). El caso $\lambda \neq 0$, nos lleva

al estudio del sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - \alpha \left(\frac{x^5}{5} - \frac{ax^3}{3} - \mu x \right) \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 \end{cases}$$

En el capítulo 2 se considera el sistema no forzado $\beta = 0$. Los principales resultados para este caso fueron obtenidos en [5] y se resumen en el siguiente teorema:

Teorema. El sistema (3) tiene 3 singularidades p_0, p_+, p_- . p_0 es un foco hiperbólico para $\mu \neq 0$. Un foco débil de orden 1 para $\mu = 0, a \neq 0$ y un foco débil de orden 2 para $\mu = a = 0$. p_{\mp} son sillas hiperbólicas.

En el infinito hay 4 singularidades hiperbólicas (2 atractoras y 2 repulsoras).

Se muestra el diagrama de bifurcación local de la singularidad p_0 en el espacio (μ, a) para un valor $\lambda > 0$ genérico. Se exhibe un retrato de fase global, genérico de (3), con dos ciclos límites.

1.3 Si $\beta \neq 0$ (caso forzado) y $\omega \neq 1$, estudiamos (3) utilizando el Método del Promedio que se detalla en el Apéndice.

Consideramos la transformación introducida por Holmes-Guckenheimer, en [4]

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\sin \omega t & -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

la cual congela el sistema no perturbado y es la transformación adecuada para la obtención de respuestas periódicas forzadas (con periodo $\frac{2\pi}{\omega}$).

Con esta transformación el sistema (2), queda de la siguiente forma

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{1-\omega^2}{\omega} (u \sin \omega t \cos \omega t - v \sin^2 \omega t) - \alpha f(x) \cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega} x^3 \sin \omega t \\ \quad - \frac{\beta}{\omega} \cos \omega t \sin \omega t \\ \dot{v} = \frac{1-\omega^2}{\omega} (u \cos^2 \omega t - v \sin \omega t \cos \omega t) + \alpha f(x) \sin \omega t - \frac{\lambda}{\omega} x^3 \cos \omega t \\ \quad - \frac{\beta}{\omega} \cos^2 \omega t \end{cases}$$

donde $x = u \cos \omega t - v \sin \omega t$.

Queremos obtener un promedio de la transformación de Poincaré ϕ_T , entonces supongamos $|\omega^2 - 1| \ll 1$ y $0 < \lambda \ll 1$, así estamos en las hipótesis del método del promedio, ver apéndice. Integrando obtenemos:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{\alpha}{2} \left[\mu u - \left(\frac{1-\omega^2}{\alpha\omega} \right) v + \frac{1}{4} (u^2 + v^2) (au + \frac{3\lambda}{\alpha\omega} v) - \frac{1}{8} u (u^2 + v^2)^2 \right] \\ \quad + O(\alpha^2) \\ \dot{v} = \frac{\alpha}{2} \left[\mu v + \left(\frac{1-\omega^2}{\alpha\omega} \right) u + \frac{1}{4} (u^2 + v^2) (av - \frac{3\lambda}{\alpha\omega} u) - \frac{1}{8} v (u^2 + v^2)^2 \right] \\ \quad - \frac{\beta}{2\omega} + O(\alpha^2) \end{cases}$$

Tomando $\sigma = \frac{1-\omega^2}{\alpha\omega}$; $\tau = \frac{3\lambda}{\alpha\omega}$; $\gamma = \frac{\beta}{2\omega}$. Reescalando u y v por 2 y cambiando t por $\frac{2}{\alpha}t$, el sistema (5) se puede escribir, despreciando los términos de orden α^2 :

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{u} = \mu u - \tau v + (au + \tau v)(u^2 + v^2) - 4u(u^2 + v^2)^2 \\ \dot{v} = \tau u + \mu v + (av - \tau u)(u^2 + v^2) - 4v(u^2 + v^2)^2 - \gamma \end{cases}$$

El retrato de fase del sistema (6) es una aproximación del retrato de fase de la transformación de Poincaré, en una sección transversal, del sistema (2).

En el capítulo 3 se estudia en primer lugar la existencia y distribución de las singularidades del sistema (6) dependiendo de los valores de los parámetros $(\mu, a, \sigma, \gamma, \tau)$. Los resultados están contenidos en los lemas 1 y 2. Para este análisis se estudio la posición relativa de las curvas

$$\begin{cases} f(r, \theta) := \tau r^3 - \sigma r + \gamma \cos \theta = 0 \\ g(r, \theta) := -4r^5 + ar^3 + \mu r - \gamma \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Siendo f, g las componentes del sistema (6), en coordenadas polares.

En la segunda parte de este capítulo se estudian los retratos de fase y los diagramas de bifurcaciones del sistema (6) para valores particulares de los parámetros externos (σ, γ, τ) . Los casos 1) $(\sigma = 0, \gamma = 0, \tau = 0)$; 2) $(\sigma \neq 0, \gamma = 0, \tau = 0)$; 3) $(\sigma = 0, \gamma = 0, \tau \neq 0)$; 4) $(\sigma \neq 0, \gamma = 0, \tau \neq 0)$; 5) $(\sigma = 0, \gamma \neq 0, \tau = 0)$, se describen completamente.

En los casos 6) $(\sigma = 0, \gamma \neq 0, \tau \neq 0)$ y 7) $(\sigma \neq 0, \gamma \neq 0, \tau = 0)$, sólo se muestran retratos de fase para las situaciones genéricas.

En el capítulo 4 se estudia el caso general con todos los parámetros (σ, γ, τ) no nulos. Se exhibe un retrato de fase genérico con 7 singularidades.

Observemos que un estudio detallado de las bifurcaciones del sistema (6) no aporta información precisa sobre la conducta del sistema (1), ya que (6) sólo representa una aproximación de la transformación de Poincaré asociada a (1), razón por la cual se presentan estudios genéricos.

2. Sistema no-forzado.

2.1 Consideremos el sistema no forzado, es decir $\beta = 0$ en (1)

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - \alpha \left(\frac{x^5}{5} - \frac{ax^3}{3} - \mu x \right) \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 \end{cases}$$

donde $0 < \alpha, \lambda \ll 1$ y los parámetros a, μ son arbitrarios. Sea $X(x, y)$ el campo de vectores dado por (3) y

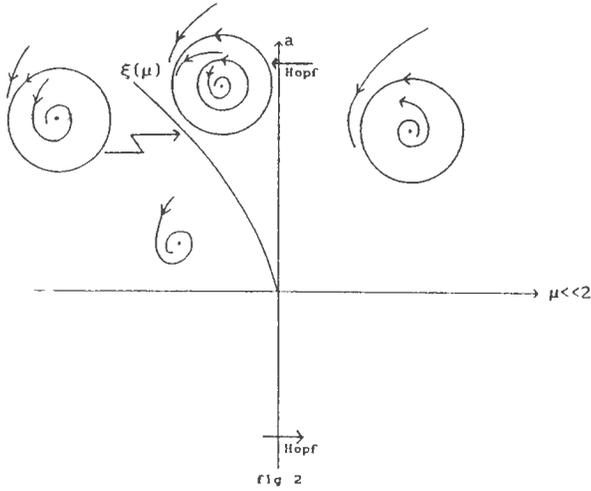
$$\Sigma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / X(x, y) = (0, 0) \right\},$$

el conjunto de singularidades de $X(x, y)$. Se tiene, $\Sigma = \{p_0, p_+, p_-\}$, donde: $p_0 = (0, 0)$: $p_{\mp} = \mp \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \left[1, \alpha \left(\frac{1}{5\lambda^2} - \frac{a}{3\lambda} - \mu \right) \right]$. Se tiene:

$$DX(x, y) = \begin{bmatrix} -\alpha(x^4 - ax^2 - \mu) & 1 \\ 3\lambda x^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Los valores propios de $DX(p_0)$ son $\frac{\alpha}{2} \left[\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{4}{\alpha^2}} \right]$. Luego si $\mu > 0$, p_0 es un repulsor hiperbólico (nodo si $\mu > \frac{2}{\alpha}$, nodo impropio si $\mu = \frac{2}{\alpha}$, foco si $0 < \mu < \frac{2}{\alpha}$). Si $\mu < 0$, p_0 es un atractor hiperbólico (nodo si $\mu < -\frac{2}{\alpha}$, nodo impropio si $\mu = -\frac{2}{\alpha}$ y foco si $-\frac{2}{\alpha} < \mu < 0$).

Si $\mu = 0$, p_0 es un foco débil, luego el eje $\mu = 0$ es una bifurcación de Hopf. En realidad p_0 es un foco débil de orden 2, esto se demuestra usando las mismas técnicas usadas por los autores en [2]. Por otro lado en el capítulo 3 damos una nueva demostración (usando el sistema promediado) de la debilidad de este foco. El diagrama de bifurcación en p_0 es, entonces:



$\xi(\mu)$ es una curva de bifurcación de “colapsos de ciclos límites” (uno atractor y el otro repulsor), formando un ciclo límite inestable. $\xi(\mu)$ está próxima a la curva $\mu = -\frac{1}{8}a^2$

b) Los valores propios de $DX(p_{\mp})$ son:

$$\frac{\alpha}{2} \left[-\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{a}{\lambda} - \mu\right) \mp \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{a}{\lambda} - \mu\right)^2 + 8} \right]$$

y son los mismos para ambas singularidades (las que son simétricas respecto al origen). Estos valores propios son siempre reales y de distinto signo, por lo tanto p_{\mp} son sillas hiperbólicas.

Por otro lado el campo $X(x, y)$ tiene 4 singularidades en el infinito ubicadas en la intersección de los ejes con el ecuador en la esfera de Poincaré; estas singularidades son repulsoras, las que están en el eje Y y atractoras las que están en el eje X . Las demostraciones de estas afirmaciones están en el trabajo realizado por los autores en [5].

Luego, el retrato de fase de $X(x, y)$ en la esfera de Poincaré para el caso de 2 ciclos límites es:

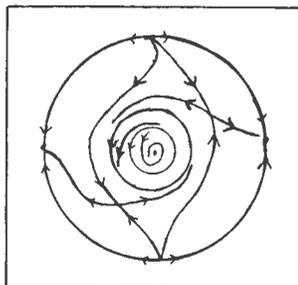


fig 3

Es claro que en el espacio de parámetros (a, μ, λ) deben existir superficies y curvas de bifurcaciones del tipo: Conexiones de sillars (por ejemplo $W^s(p_+) \cap W^u(p_-) \neq \emptyset$), doble conexión de sillars, y autoconexión de silla. No es objeto de este trabajo la descripción de estas bifurcaciones.

3. El sistema promediado.

A.- Distribuciones de singularidades en el sistema promediado

3.1 Sea $X_{\sigma\gamma\tau}^{\mu a}(u, v)$ el campo de vectores dado por el sistema de ecuaciones diferenciales. (6), que representa al sistema promediado:

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{u} = \mu u - \sigma v + (au + \tau v)(u^2 + v^2) - 4u(u^2 + v^2)^2 \\ \dot{v} = \sigma u + \mu v + (av - \tau u)(u^2 + v^2) - 4v(u^2 + v^2)^2 - \gamma \end{cases}$$

El conjunto de singularidades de $X_{\sigma\gamma\tau}^{\mu a}$ está definido por:

$$\Sigma_{\sigma\gamma\tau}^{\mu a} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : X_{\sigma\gamma\tau}^{\mu a}(u, v) = (0, 0)\}$$

Si $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ para $\sigma, \tau, \gamma \neq 0$ se tiene $(r, \theta) \in \Sigma$, si :

$$\begin{cases} i) f(r, \theta) := \tau r^3 - \sigma r + \gamma \cos \theta = 0 \\ ii) g(r, \theta) := -4r^5 + ar^3 + \mu r - \gamma \sin \theta = 0 \end{cases}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce (con $\sigma \neq 0, \gamma \neq 0, \tau \neq 0$), que las singularidades están en la intersección de las curvas i) y ii). Por lo tanto estudiaremos la posición relativa de estas curvas.

Determinaremos las regiones del espacio de parámetros σ, γ, τ , para a, μ fijos, en las cuales el campo de vectores tenga una, dos, ..., siete singularidades, para así obtener las curvas de bifurcaciones

Supongamos todos los parámetros positivos, y estudiemos las curvas i) y ii) con el objeto de graficarlas en el plano (u, v) , y así estar en condiciones de detectar las singularidades.

3.2 Estudio de la curva i) $f(r, \theta) = \tau r^3 - \sigma r + \gamma \cos \theta = 0$.

Se observa que $f(r, -\theta) = f(r, \theta)$, (simetría respecto del eje u) por lo tanto tomamos $\theta \in [0, \pi]$.

$$1) \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma \cos \theta = 0 \Rightarrow \tau r^3 - \sigma r = 0 \Rightarrow r = \mp \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}, r = 0. \text{ Es decir i) pasa por } (0, -\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}), (0, 0), (0, +\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}})$$

$$2) \theta = 0 \Rightarrow \gamma \cos \theta = \gamma.$$

Sea $f(r) = \tau r^3 - \sigma r + \gamma$. Encontramos las raíces de esta cúbica

$$f'(r) = 3\tau r^2 - \sigma$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow r = \mp \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \text{ puntos extremos}$$

$$- \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \text{ punto de máximo, el } \max f(r) = \gamma + \frac{2\sigma}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} > 0$$

$$+ \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \text{ punto de mínimo, el } \min f(r) = \gamma - \frac{2\sigma}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}}$$

Si $\gamma - \frac{2\sigma}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} < 0 \Rightarrow f(r)$ tiene tres raíces; r_1, r_2, r_3 donde:

$$r_1 < -\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}} < 0 < r_2 < \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} < r_3 < \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}$$

Si $\gamma - \frac{2\sigma}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} = 0 \Rightarrow f(r)$ tiene dos raíces;

$$r_1 < 0 < r_2 = r_3 = \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}}$$

Si $\gamma - \frac{2\sigma}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} > 0 \Rightarrow f(r)$ tiene solo una raíz;

$$r_1 < -\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}$$

Veamos ahora el comportamiento de r en función de θ :

$$\frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta} = 3\tau r^2 r' - \sigma r' - \gamma \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \iff r' = \frac{\gamma \sin \theta}{3\tau r^2 - \sigma}$$

Por lo tanto:

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ y } r > \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \Rightarrow r' > 0$$

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ y } r < \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \Rightarrow r' < 0$$

$r = \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \Rightarrow r'$ se indefine

$$\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \text{ y } r > \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \Rightarrow r' < 0$$

Es decir la gráfica de $f(r, \theta) = \tau r^3 - \sigma r + \gamma \cos \theta = 0$ en el plano (u, v) es:

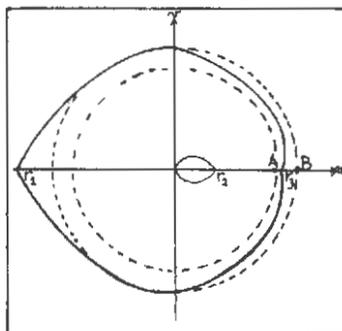


Fig 4

Donde $A = \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}}$, $B = \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}$.

Observemos que, r' se indefine para $r = \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}}$, por lo tanto al reemplazar este valor de r en $i)$ encontramos el ángulo θ en que esto ocurre, es decir,

$$\cos \theta = \frac{2\sigma}{3\gamma} \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{2\sigma}{\gamma} \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}} \right)$$

Por lo tanto tenemos los siguientes gráficos dependiendo de la existencia de las raíces r_1 , r_2 y r_3

$$r_2 = r_3 = A = \sqrt{\frac{\sigma}{3\tau}}$$

existe r_1 y no existen r_2, r_3

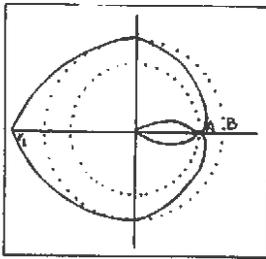


fig 5

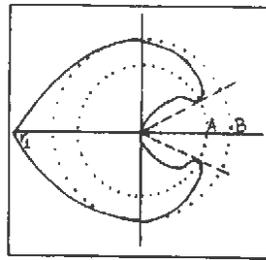


fig 6

3.3 Estudio de la curva $ii) g(r, \theta) = -4r^5 + ar^3 + \mu r - \gamma \sin \theta = 0$.

Se observa que $g(r, (\pi - \theta)) = g(r, \theta)$, (simetría respecto al eje v)

1) $\theta = 0 \Rightarrow \gamma \sin \theta = 0 \Rightarrow -4r^5 + ar^3 + \mu r = 0$ cuyas raíces son:

$$r = 0; r = \mp \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 + 16\mu}}{8}}$$

Es decir *iii*) interseca al eje u en:

$$-\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 16\mu}}{8}}; -\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + 16\mu}}{8}}; 0$$

$$\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + 16\mu}}{8}}; \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 16\mu}}{8}}$$

$$2) \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma \operatorname{sen} \theta = \gamma$$

Sea $g(r) = -4r^5 + ar^3 + \mu r - \gamma$ encontremos las raíces de g

$$g'(r) = -20r^4 + 3r^2 + \mu,$$

$$g'(r) = 0 \Rightarrow r = \mp \sqrt{\frac{3a \mp \sqrt{9a^2 + 80\mu}}{40}} \text{ puntos extremos.}$$

$$-\sqrt{\frac{3a + \sqrt{9a^2 + 80\mu}}{40}} \text{ y } \sqrt{\frac{3a - \sqrt{9a^2 + 80\mu}}{40}}, \text{ son puntos de mínimo}$$

$$-\sqrt{\frac{3a - \sqrt{9a^2 + 80\mu}}{40}} \text{ y } \sqrt{\frac{3a + \sqrt{9a^2 + 80\mu}}{40}}, \text{ son puntos de máximo}$$

Luego $g(r)$ tiene a lo más cinco raíces $\rho_i, i = 1, 2, \dots, 5$ ordenadas como sigue:

$$\rho_1 < -R_2 < -R_1 < \rho_2 < -M_1 < \rho_3 < 0 < R_1 < \rho_4 < M_2 < \rho_5 < R_2$$

donde:

$$M_1 = \sqrt{\frac{3a - \sqrt{9a^2 + 80\mu}}{40}} \quad M_2 = \sqrt{\frac{3a + \sqrt{9a^2 + 80\mu}}{40}}$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + 16\mu}}{8}} \quad R_2 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 16\mu}}{8}}$$

Observación. Al reemplazar M_1 y M_2 en $g(r)$, se deduce fácilmente que al crecer γ , colapsan primero ρ_2 con ρ_3 , y luego colapsan ρ_4 con ρ_5 mientras que ρ_1 persiste para todo γ . Por otra parte

$$\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta} = -20r^4 r' + 3r^2 r' + \mu r' - \gamma \cos \theta = 0 \Rightarrow r' = \frac{-\gamma \cos \theta}{20r^4 - 3ar^2 - \mu}.$$

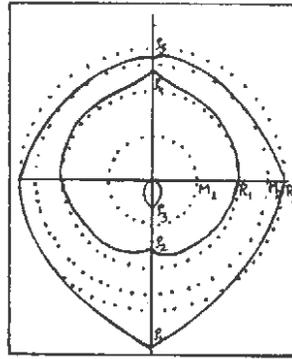
Luego tenemos:

1) r' se indefine para $r = M_1, M_2$

$$2) \quad \begin{cases} \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ y } r \in (M_1, M_2) \Rightarrow r' > 0 \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ y } r \notin (M_1, M_2) \Rightarrow r' < 0 \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} \theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \text{ y } r \in (M_1, M_2) \Rightarrow r' > 0 \\ \theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \text{ y } r \notin (M_1, M_2) \Rightarrow r' < 0 \end{cases}$$

Es decir la gráfica de $g(r, \theta) = -4r^5 + ar^3 + \mu r - \gamma \operatorname{sen} \theta = 0$ en el plano (u, v) es:



(Fig 7)

Notemos que, r' se indefine para $r = M_1, M_2$ por lo tanto al reemplazar este valor de r en *iii)* encontramos el ángulo θ en que esto ocurre, es decir,

$$\theta = \arcsen \left(\frac{3a^2 + 80\mu - a\sqrt{9a^2 + 80\mu}}{100\gamma} \right) M_1$$

$$\theta = \arcsen \left(\frac{3a^2 + 80\mu + a\sqrt{9a^2 + 80\mu}}{100\gamma} \right) M_2$$

Por lo tanto tenemos los siguientes gráficos dependiendo de la existencia de las raíces ρ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$.

Si $\rho_1 < \rho_2 = \rho_3 = -M_1 < \rho_4 < \rho_5$, entonces el gráfico es:

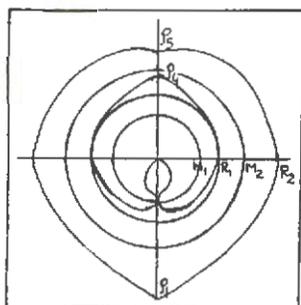


Fig. 8

Si $\rho_1 < \rho_4 < \rho_5$, entonces el gráfico es:

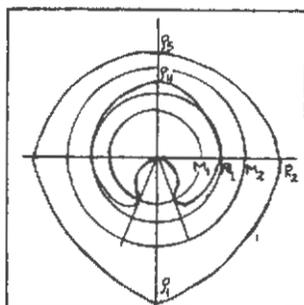


Fig. 9

Si $\rho_1 < \rho_4 = \rho_5 = M_2$, entonces el gráfico es:

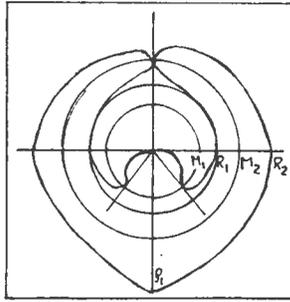


fig 10

Si solo existe ρ_1 , $\rho_1 < -R_2$, entonces el gráfico es:

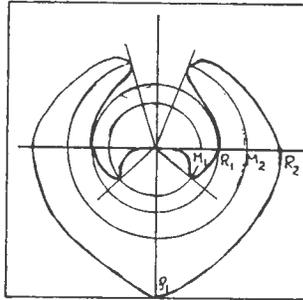


fig 11

Lema 1. $X_{\sigma\gamma\tau}^{\mu\alpha}$ tiene una única singularidad bajo una de las siguientes condiciones:

- a).- $0 < \gamma \ll 1$ y $\frac{\sigma}{\tau}$, pequeño.
- b).- $r_2 < R_1, R_2 < r_3$ y $|\rho_1| < \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}$
- c).- $r_3 < R_1$ y $|\rho_2| < \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}} < |\rho_3|$
- d).- $R_1 < r_3 < R_2, \rho_4 < \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}} < \rho_5$ y $|r_1| < R_2$
- e).- $r_2 < R_1$ y $r_3 > |\rho_1|$

Lema 2. $X_{\mu\alpha}^{\sigma\gamma\tau}$ tiene a lo más siete singularidades, y esto ocurre bajo las siguientes condiciones:

$$r_3 < R_1, |\rho_3| > \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}} \quad \text{y} \quad |r_1| > R_2$$

La demostración de estos lemas es evidente y resulta de analizar las raíces de las curvas $f(r, \theta)$, $g(r, \theta)$ y de los sectores de monotonía de estas.

B.- Casos Particulares.

Observemos en primer lugar que el infinito es siempre un repulsor, independiente de los valores de los parámetros. En efecto, sea $H(u, v) = u^2 + v^2$, entonces derivando H a lo largo de las órbitas del campo promediado se tiene:

$$\frac{dH}{dt}(u, v) = 2\mu r^2 + 2ar^4 - 8r^6 - 2\gamma v$$

Luego para $r \rightarrow \infty$ se tiene $\frac{dH}{dt}(u, v) < 0$, lo que implica que para r suficientemente grande, el campo apunta hacia el interior de la frontera de las regiones $u^2 + v^2 \leq r^2$

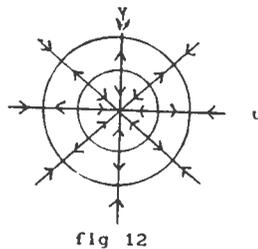
Veamos a continuación que esta ocurriendo en el retrato de fase del campo promediado en la frontera ∂B del espacio de parámetro $B = \{(\sigma, \gamma, \tau) \in \mathbb{R}^3 / \sigma \geq 0, \gamma \geq 0, \tau \geq 0\}$ para diferentes valores de (a, μ) .

Se usarán las notaciones y definiciones del capítulo anterior.

(1) $\gamma = 0; \sigma = 0, \tau = 0$

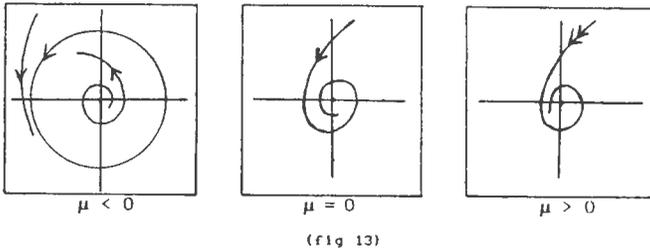
Existen a lo más dos círculos de singularidades de radios R_1 y R_2 . El origen **siempre** es singularidad

El campo (6) es invariante por rectas que pasan por el origen y el retrato de fase se obtiene trivialmente. Por ejemplo para $\mu < 0, a > 0, a^2 + 16\mu > 0$, se tiene:



(2) $\gamma = 0, \sigma \neq 0; \tau = 0$

El origen es la única singularidad y el parámetro μ es un parámetro de bifurcación de Hopf. Por ejemplo para $a > 0$ se tiene:



(3) $\gamma = 0; \sigma = 0; \tau \neq 0$

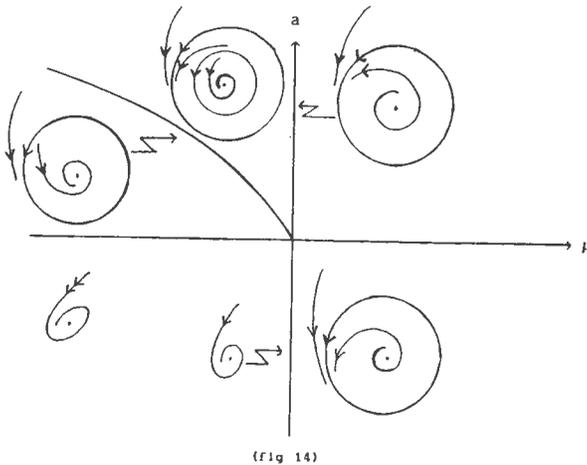
El origen es la única singularidad y el parámetro μ es un parámetro de bifurcación de Hopf. (μ pequeño y $a \neq 0$). En la recta $\mu = 0$, el parámetro a es también un parámetro de bifurcación de Hopf generalizado, es decir, en este caso se puede considerar

$$Y(u, v) = (u^2 + v^2)^{-1} X(u, v),$$

entonces las ecuaciones de $Y(u, v)$ son:

$$\begin{cases} \dot{x} = (au + \tau v) - 4u(u^2 + v^2) \\ \dot{v} = (au - \tau v) - 4v(u^2 + v^2) \end{cases} \quad (\tau > 0)$$

Compatibilizando ambas bifurcaciones y siguiendo los argumentos de [3] se tiene:

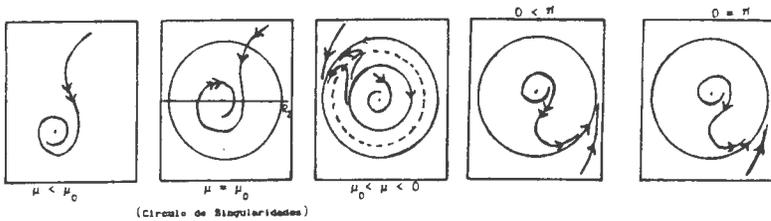


(4) $\gamma = 0; \sigma \neq 0; \tau \neq 0$

El origen es la única singularidad salvo cuando $\sqrt{\frac{a}{\tau}}$ es igual a R_1 o R_2 y en este caso aparece un círculo de singularidades. Por ejemplo supongamos:

$$a^2 + 16\mu > 0 \quad \text{y} \quad \frac{4\sigma}{\tau} < a < \frac{8\sigma}{\tau}, \quad \text{y sea } \mu_0 := \frac{\sigma}{\tau} \left[\frac{4\sigma}{\tau} - a \right]$$

entonces el retrato de fase de $X_{\sigma 0 \tau}^{\mu a}$ es en este caso:



Observemos que $X_{\sigma 0 \tau}^{\mu a}$ se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu & -\sigma \\ \sigma & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (u^2 + v^2) \begin{pmatrix} a & \tau \\ -\tau & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &+ (u^2 + v^2)^2 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego el círculo de singularidades (cuya existencia se desprende fácilmente de las ecuaciones) puede interpretarse como un equilibrio entre las velocidades de rotación del campo que son σ y $-\tau$. El círculo de singularidades se bifurca a dos ciclos límites, el del interior muere en el Hopf del origen, el otro se va al infinito con μ .

(5) $\gamma \neq 0; \sigma = 0; \tau = 0$

Entonces:

$$\begin{cases} P(u, v) = u [\mu + a(u^2 + v^2) - 4(u^2 + v^2)^2] \\ Q(u, v) = v [\mu + a(u^2 + v^2) - 4(u^2 + v^2)^2] - \gamma \end{cases}$$

En este caso el campo de vectores $X_{0\gamma 0}^{\mu a}$, tiene las singularidades en $u = 0$ y $\phi(v) = 0$ donde $\phi(v) = \psi(v) - \gamma$ con $\psi(v) = v(\mu + av^2 - 4v^4)$. Para el análisis de estas singularidades, consideraremos las raíces y los puntos extremos de $\psi(v)$:

$$0, \mp \sqrt{\frac{1}{8}(a \mp \sqrt{a + 16\mu})} = \mp R_i; \mp \sqrt{\frac{3}{40}(a \mp \sqrt{a^2 + \frac{80}{9}\mu})} = \mp M_i, \quad i = 1, 2$$

$$y \quad DX_{0\gamma 0}^{\mu a}(0, v) = \begin{bmatrix} \frac{\psi(v)}{v} & 0 \\ 0 & \psi'(v) \end{bmatrix}$$

Primer caso: $a^2 + 16\mu \leq 0$

Si además $a^2 + \frac{80}{9}\mu \leq 0$, o si $a^2 + \frac{80}{9}\mu > 0$ y $a < 0$ entonces:

$X_{0\gamma 0}^{\mu a}$ tiene una única singularidad (atractor) para todo $\gamma > 0$

Si $a^2 + \frac{80}{9}\mu > 0$ y $a < 0$, sean $-M_2 < -M_1 < 0$, las raíces negativas de $\Psi'(v)$, entonces:

- i) Si $0 < \gamma < \Psi(-M_2)$, entonces $X_{0\gamma 0}^{\mu a}$ tiene una única singularidad s_1 la cual es atractora
- ii) Si $\gamma = \Psi(-M_2)$, entonces $X_{0\gamma 0}^{\mu a}$ tiene dos singularidades s_1 y s_2 una silla-nodo
- iii) Si $\Psi(v_1) < \gamma < \Psi(-M_1)$, entonces persiste s_1 y s_2 bifurca a dos singularidades: una silla s_2 y un atractor s_3
- iv) Si $\gamma = \Psi(-M_1)$, s_1 y s_2 colapsan en una silla-nodo s_3 persiste.
- v) Si $\gamma > \Psi(-M_1)$, perdura solo el atractor s_3 , ver fig. 16.

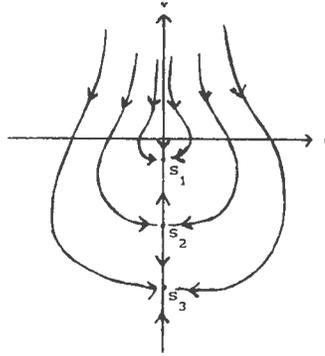


fig 16

Segundo caso: $a^2 + 16\mu > 0$. Si $\mu > 0$, sea M_2 el único máximo relativo de $\Psi(v)$ entonces tenemos:

- i) Si $0 < \gamma < \Psi(M_2)$, el campo de vectores $X_{0\gamma}^{\mu a}$ tiene tres singularidades $s_1 < 0 < s_2 < s_3$, s_1 un atractor, s_2 un repulsor y s_3 un punto de silla.
- ii) Si $\gamma = \Psi(M_2)$, entonces $s_2 = s_3$ es una silla-nodo.
- iii) Si $\gamma > \Psi(M_2)$, perdura solo la singularidad s_1 .

Si $\mu < 0$, $a > 0$ el campo de vectores $X_{0\gamma}^{\mu a}$ tiene a lo mas cinco singularidades dependiendo del parámetro γ .

Sea $0 < M_1 < M_2$ las raíces positivas de $\Psi'(v)$ y $A = -\Psi(M_1)$, $B = \Psi(M_2)$, entonces tenemos:

a) Para $A < B$.

- i) Si $0 < \gamma < A$, $X_{0\gamma}^{\mu a}$ tiene 5 singularidades: $s_1 < s_2 < s_3 < 0 < s_4 < s_5$, s_1 un atractor, s_2 una silla, s_3 un atractor, s_4 un repulsor, s_5 un punto de silla.
- ii) Si $\gamma = A$, s_2 y s_3 colapsan en un punto silla-nodo.
- iii) Si $A < \gamma < B$, $X_{0\gamma}^{\mu a}$ tiene solo las singularidades s_1, s_4 y s_5 .
- iv) Si $\gamma = B$, s_4 y s_5 colapsan en un punto silla-nodo.

v) Si $\gamma > B$, perdura solo s_1 .

b) Para $A = B$.

i) Si $\gamma < A$, $X_{0\gamma 0}^{\mu a}$ tiene las cinco singularidades s_1, \dots, s_5 .

ii) Si $\gamma = A = B$, s_2, s_3 y s_4, s_5 colapsan simultaneamente en dos puntos sillas-nodos.

iii) Si $\gamma > A = B$, entonces perdura solo s_1 .

c) El caso $A > B$ es similar con a).

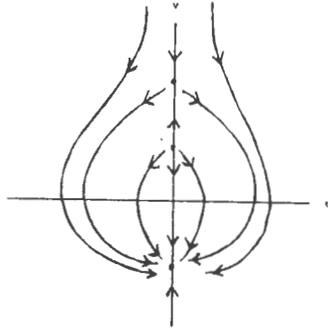
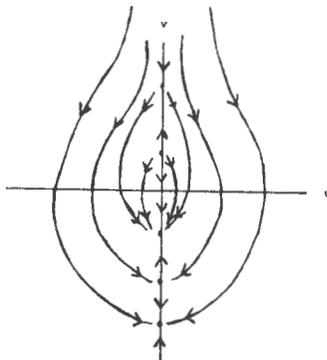
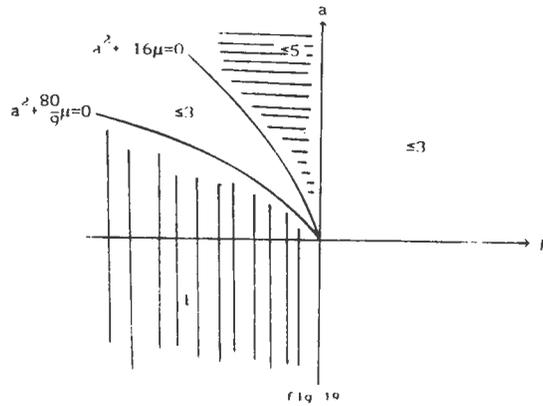


fig 17



(fig 18)

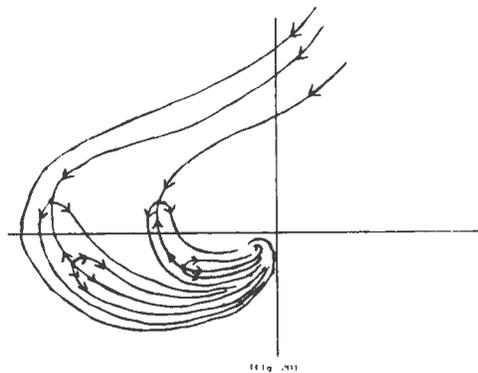
Resumiendo, el número de singularidades para $\sigma = 0$, $\tau = 0$, dependiendo de los parámetros μ , a se describen en el siguiente diagrama:



Observación: Observemos que para $A \neq B$, y σ, τ pequeños existen a lo menos dos curvas $\alpha^+(\sigma, \tau) = \alpha^+$, y $\beta^+(\sigma, \tau) = \beta^+$ tales que $X_{\sigma\alpha^+}^{\mu a}$ y $X_{\sigma\beta^+}^{\mu a}$ tiene puntos sillan-nodos los cuales están respectivamente próximos de los puntos $(0, M_1)$ y $(0, M_2)$

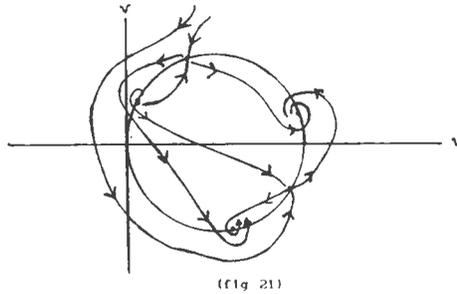
(6) $\gamma \neq 0; \sigma = 0; \tau \neq 0$

En este caso pueden aparecer a lo más cinco singularidades, todas ellas en el semiplano $u < 0$



(7) $\gamma \neq 0; \sigma \neq 0; \tau = 0$

En este caso pueden aparecer a lo más cinco singularidades pues la ecuación i) es: $\sigma r - \gamma \cos \theta = 0$. y la ecuación ii) es $-4r^5 + ar^3 + \mu r - \gamma \sin \theta = 0$ que son las ecuaciones estudiadas por los autores en [1], y cuyo retrato de fase genérico es:



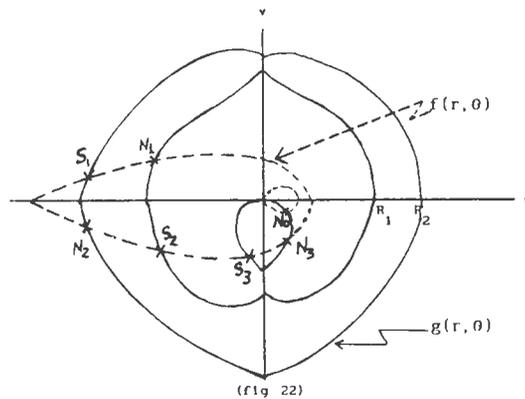
4. Análisis genérico.

4.1 Supondremos ahora que en el sistema promediado dado en el capítulo 2 se tiene σ , τ , γ no nulos.

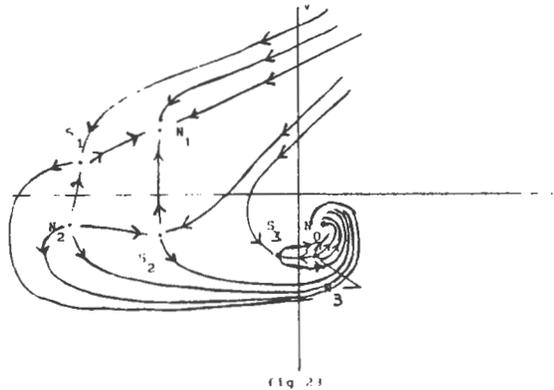
Primeramente haremos un análisis de tipo genérico. Es decir nos situaremos bajo las condiciones más ricas posibles en los parámetros (a, μ) . Esto quiere decir: supondremos que el sistema promediado tiene siete singularidades, lo que implica que se tiene:

$$|r_1| > R_2, \quad r_3 < R_1, \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}} < |\rho_3|$$

Las gráficas de las curvas $f(r, \theta)$ y $g(r, \theta)$ son



Lema 1. Si existen las siete singularidades y son distintas, se tiene que S_1, S_2, S_3 son sillas hiperbólicas; N_0, N_1 son nodos atractores y N_2, N_3 son nodos repulsivos. Se tiene la siguiente figura (sin ciclos límites):



Observaciones:

- (1) Bajo las condiciones anteriores, existen en el espacio de parámetros (σ, τ, γ) tres superficies Z_1, Z_2, Z_3 de bifurcaciones de sillas-nodos

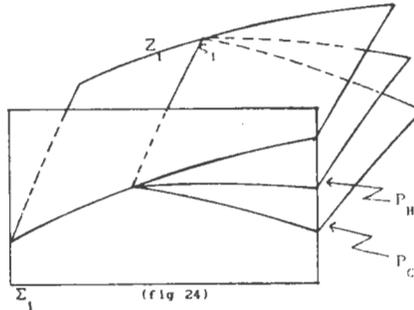
$$Z_1 = \{\text{Colapso de } S_1 \text{ con } N_2\}$$

$$Z_2 = \{\text{Colapso de } S_2 \text{ con } N_1\}$$

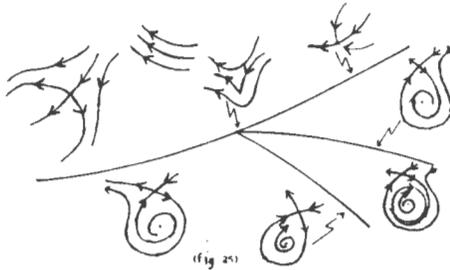
$$Z_3 = \{\text{Colapso de } S_3 \text{ con } N_3\}$$

Siempre $Z_1 \cap Z_2 = \phi$. Puede ocurrir que $Z_1 \cap Z_3 \neq \phi$ y $Z_2 \cap Z_3 \neq \phi$. Observemos que las bifurcaciones de sillas-nodos producidas por el colapso S_1 con N_1 o S_2 con N_2 se obtiene en los parámetros (a, μ)

- (2) Sobre las superficies Z_i ($i = 1, 2, 3$) existen curvas ξ_1 de bifurcaciones de codimensión dos, de tipo cúspide. Al cortar transversalmente y genéricamente estas superficies por un plano Σ_i (el cual también es transversal a ξ_1), se obtiene el siguiente diagrama local de bifurcaciones siguiendo la teoría de Bogdanov-Takens [6].



donde P_H y P_C son superficies de bifurcación de Hopf y de bifurcación por órbitas homoclínicas respectivamente. Esquemáticamente en Σ_1 se tiene:



- (3) Sobre las curvas ξ_1 existen puntos aislados que corresponden a puntos de bifurcación de singularidades de codimensión tres. El diagrama de bifurcación local de estos puntos dados por sus desdoblamientos universales es bastante complicado, como referencias están los trabajos de F.Dumortier, C.Rousseau, J.Sotomayor [7].
- (4) Existen, además, con seguridad otras superficies de bifurcaciones (de tipo Hopf, conexiones de sillars, colapsos de ciclos límites, etc) y sobre estas superficies curvas de bifurcaciones de codimensiones superiores. Escapa a los objetivos de este análisis genérico de la ecuación promediada el detalle de estas bifurcaciones.
- (5) Un análisis de tipo no genérico no tiene mucho sentido desde el punto de vista del conocimiento de la dinámica de la ecuación original (1), pues

el método del promedio no entrega resultados precisos en situaciones no genéricas. Por ejemplo: no se conoce en detalle que dinámica tiene la ecuación (1) cuando en el sistema promediado (6) se está en una vecindad de una singularidad de tipo cúspide (obviamente existe caos por la presencia de infinitos puntos homoclínicos derivados de la autoconexión de silla) Bifurcaciones de mayor codimensión detectan situaciones aún más caóticas en el sistema original (1).

5. Apéndice.

Método del promedio [4].

Consideremos un sistema de ecuaciones no autónomo de la forma

$$(i) \quad \frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon) \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

Donde $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^n , $r \geq 2$, acotada sobre conjuntos acotados y T -periódica en la variable t , $T > 0$

El sistema autónomo promediado asociado al sistema (i) es:

$$(ii) \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y) \quad \text{donde} \quad \bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t, 0) dt$$

En esta situación se tiene:

Teorema del Promedio. Existe un C^r -cambio de coordenadas $x = y + \varepsilon \omega(y, t, \varepsilon)$, bajo el cual (i) se transforma en:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon),$$

donde f_1 es T -periódica en t y se tiene:

- a) Si $x(t)$ e $y(t)$ son soluciones de (i) y (ii) que en $t = 0$ pasan por x_0 e y_0 respectivamente, con $\|x_0 - y_0\| = O(\varepsilon)$, entonces $\|x(t) - y(t)\| = O(\varepsilon)$, hasta tiempos del orden $\frac{1}{\varepsilon}$
- b) Si p_0 es una singularidad hiperbólica de (ii), entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, (i) posee una única órbita periódica hiperbólica $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$, con el mismo tipo de estabilidad de p_0 .
- c) Si $x^s(t)$ es una solución de (i) que está en la variedad estable de γ_ε e $y^s(t)$ es solución de (ii) que está en la variedad estable de p_0 con $\|x^s(0) - y^s(0)\| =$

$0(\varepsilon)$, entonces $\|x^s(t) - y^s(t)\| = O(\varepsilon)$, para $t \in [0, +\infty]$. Análogamente ocurre para las variedades inestables con $t \in (-\infty, 0]$.

Observaciones:

1. Las conclusiones de (b) y (c) pueden generalizarse a conjuntos hiperbólicos más complicados, en particular órbitas periódicas hiperbólicas de (ii) corresponden a toros invariantes hiperbólicos de (i).
2. Si se tiene una familia a 1-parámetro de sistemas similar a (i).
 - (i)' $\frac{dx}{dt} = \varepsilon f_\mu(x, t, \varepsilon)$ $\mu \in \mathbb{R}$, al cual se le asocia una familia de sistemas promediados.
 - (ii)' $\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}_\mu(y)$. Si en $\mu = \mu_0$, (ii)' tiene una bifurcación de tipo nodo-silla o tipo Hopf, entonces para μ próximo de μ_0 y ε suficientemente pequeño, la aplicación de Poincaré de (i)' también tiene una bifurcación de tipo silla-nodo o tipo Hopf.
3. El resultado anterior puede extenderse a familias multiparamétricas, y a otras bifurcaciones de codimensión 2, pero no da información detallada de bifurcaciones que envuelven fenómenos homoclínicos.

Detalles de estas observaciones se encuentran en [4], 166-180

REFERENCIAS

- [1] Billeke, J.; Burgos, H.; Wallace, M.: Bifurcation of the weakly forced Liénard equation: $\ddot{x} + \alpha(x^4 - ax^2 - \mu)\dot{x} + x = \beta \cos \omega t$. Presentado a *Lectures Note in Math. Dynamical System in Santiago of Chile*.
- [2] Billeke, J.; Burgos, H.; Wallace, M.: Melnikov deviations and limit cycles for Liénard equations. *Revista Colombiana de Matemáticas*, vol. XXVI, 1992.
- [3] Billeke, J.; Burgos, H.; Wallace, M.: Some Theorems on the Non Existence, Uniqueness and Existence of two Limit Cycles for the Liénard Equation of Degree Five. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, XXXIX, pp 11-27, 1991.
- [4] Guckenheimer, John; Holmes, Philip: *Nonlinear Oscillations, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.

- [5] Billeke, J.; Burgos, H.: Consideraciones Generales Sobre Campos Polinomiales $(y - f(x))\frac{\partial}{\partial x} + (-x + g(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$, Problemas de Estabilidad y Ejemplos. *Revista CUBO*, 6, pp 25-46, 1990.
- [6] Takens, F.: Singularities of Vector Fields. *Publ. IHES*, 43, pp 47-100, 1973.
- [7] Dumortier, F.; Rousseau, C.: Cubic Liénard Equations with Linear Damping. *Nonlinearity*, 3, 4, Nov. 1990.

Recibido: 11 de Octubre de 1991.

Hernán Burgos V.
Departamento de Matemática
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D, Temuco, Chile.

Jorge Billeke G.
Departamento de Matemática
Universidad de Santiago de Chile
Casilla 5659, correo 2, Santiago, Chile.

Myrna Wallace C.
Departamento de Matemática
Universidad de Concepción
Casilla 3-C, Concepción, Chile