DOI: 10.22199/S07160917.1988.0015.00003

REVISTA PROYECCIONES Nº 15: 33-47
Diciembre 1988 - ISSN 0716-0917

ANALISIS DE LA ESTABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE PAGO EN JUEGOS BIPERSONALES

ARNOLDO PRADO C.*

PARTE I

CONCEPTOS BASICOS Y PLANTEAMIENTOS DEL PROBLEMA.

INTRODUCCION.

En trabajos anteriores se hizo notar que no siempre los criterios de optimalidad presentan caracteres de estabilidad tanto para cada jugador como el conjunto de todos ellos. Se mostró en el trabajo sobre Jugadores agresivos [2] que todo el problema radica en la forma de las funciones de pérdida para cada jugador. También se analizó cómo la metodología bayesiana suministra un procedimiento racional para abordar este tipo de situaciones, cuando se caracteriza a cada jugador según el criterio de optimalidad

* Académico Departamento de Matemáticas, Universidad del Norte - Chile.

que aplique [1]. En el trabajo que ahora se presenta, se trata de caracterizar a las funciones de pagos inestables en juegos bipersonales, bimatriciales.

ANTECEDENTES.

Las propiedades y conceptos que se presentan a continuación forman parte de la bibliografía habitual, en particular se sigue la nomenclatura de I. P. Aubin en [1].

Definición. Un juego bipersonal es un par (U,F) donde U es un subconjunto de $X\times Y$, denominado conjunto de pares factibles con X e Y, denominados conjuntos de estrategias, del jugador I y del jugador II, respectivamente. F es una aplicación de $X\times Y$ en $\mathbb{R}^2$ y se denomina operador de bipérdidas. Las aplicaciones $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ se denominan funciones de pérdidas del jugador I y del jugador II, respectivamente.

En lo sucesivo $U = X\times Y$. Es decir, todos los pares de estrategias son factibles.

Se considera que el juego consiste en las elecciones, por parte de I, de elementos en X y de II en Y, de modo que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ sean de algún modo óptimos para I y II. El sentido de los óptimos se explicitan en las siguientes fórmulas:

a) (x_0,y_0), es un par óptimo ideal si, simultáneamente, los valores αx y αy son alcanzados en ese par

$$\alpha_x = \inf_{(x,y)\in U} f(x,y) \quad , \qquad \alpha_y = \inf_{(x,y)\in U} g(x,y)$$

b) $(x^{\#}, y^{\#})$, es un par óptimo en el sentido conservador si:

1º) $f^{\#}(x) = \sup_{y \in Y} f(x,y)$

entonces

$$f^{\#}(x^{\#}) = \inf_{x \in X} f^{\#}(x)$$

2º) $g^{\#}(y) = \sup_{x \in X} g(x,y)$

entonces

$$g^{\#}(y^{\#}) = \inf_{y \in Y} g^{\#}(y)$$

Se escribe $v_x^{\#} = f^{\#}(x^{\#})$ y $v_y^{\#} = g^{\#}(y^{\#})$.

c) $(\overline{x}, \overline{y})$ es un par de estrategias óptimas en el sentido del equilibrio no-cooperativo si simultáneamente se cumple que

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \min_{x} f(x, \overline{y}) = \overline{f}$$

$$g(\overline{x}, \overline{y}) = \min_{y} g(\overline{x}, y) = \overline{g}$$

d) $(\tilde{x}, \tilde{y})$, es un par óptimo en el sentido Pareto-minimal si no existe un par (x,y) tal que

$$f(x,y) < f(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{f}$$

y $$g(x,y) < g(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{g}$$

A estos conceptos de optimalidad se agrega el concepto de núcleo definido por $\{(\tilde{x},\tilde{y}) \in X{\times}Y \mid F(\tilde{x},\tilde{y}) \leq (v_X^{\#}, v_Y^{\#})\}$. Es decir, en el núcleo del juego están los pares de estrategias que siendo Pareto-minimales son mejores, al menos individualmente, que las estrategias conservadoras.

RELACIONES ENTRE LOS VALORES OPTIMOS.

PRCPOSICION:

$$\alpha_X \leq \bar{f} \leq v_X^{\#}$$

$$\alpha_Y \leq \bar{g} \leq v_y^{\#}$$

DEMOSTRACION:

$$\alpha_X \leq f(x,\bar{y}) \leq \sup_y f(x,y)$$

$$\alpha_Y \leq \bar{f} = f(\bar{x},\bar{y}) = \min f(f,\bar{y}) \leq \min \sup f(x,y) = v_X^{\#}$$

PROPOSICION:

$$((\tilde{x},\tilde{y}), \text{Pareto-minimal}) \Rightarrow (f(\tilde{x},\tilde{y}) \geq v_X^{\#} \Rightarrow g(\tilde{x},\tilde{y}) \leq v_Y^{\#})$$

DEMOSTRACION:

Si $f(\tilde{x},\tilde{y}) \geq v_X^{\#} \Longrightarrow g(\tilde{x},\tilde{y}) > v_Y^{\#}$ entonces $(\tilde{x},\tilde{y})$ no es Pareto-minimal, pues el par $(x^{\#},y^{\#})$ es preferible.

Se observa en estos conceptos de optimalidad la fuerte incidencia de la estabilidad de las funciones de pago individuales. Así las soluciones conservadoras caracterizadas por el par $(x^{\#},y^{\#})$ son individualmente inestables, pues es claro que puede existir x tal que,

$$f(x,y^{\#}) < f(x^{\#},y^{\#}).$$

Evidentemente esto ocurre porque para el cálculo de $x^{\#}$ interviene la función f operada sólo por I, mientras que el valor $y^{\#}$ es calculado sólo por II a partir de su propia función g. En cambio el punto de equilibrio presenta características de estabilidad individual, pues para el par $(x,\overline{y})$ la mejor estrategia para I es $\overline{x}$ y para el par $(\overline{x},y)$ la mejor estrategia para II es $\overline{y}$.

Por otro lado un "entendimiento" entre I y II permite a ambos mejorar sus espectativas con respecto al óptimo conservador, es decir, que la existencia de un trato entre los jugadores les permitiría encontrar $(\tilde{x},\tilde{y}) \in X{\times}Y$ tal que simultáneamente,

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{f} < v_X^{\#}$$

$$g(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{g} < v_Y^{\#}$$

Evidentemente los pares Pareto-minimales que satisfacen esta condición son estables colectivamente.

•

El análisis de la estabilidad anterior, en definitiva, implica asumir como elemento esencial las características personales del jugador y las conjeturas que sobre estas características formule cada jugador respecto de su contrario. Evidentemente aceptar esta alternativa presupone que entre ambos jugadores no existe trato previo y, por lo tanto, los pares de de estrategias óptimas son inestables en todo lo que sigue de la exposición.

Definición: Sea $(X,Y,F,)$ un juego bipersonal entonces un jugador es ε-agresivo si para la elección del óptimo define la lotería $(1/2-\varepsilon,\ 1/2+\varepsilon)$, sobre el par "Criterio Conservador", "Criterio no Conservador".

Naturalmente "Criterio Conservador" significa que el jugador adopta la estrategia conservadora, bajo el supuesto que su contrincante adopta también la estrategia conservadora. "Criterio no Conservador" significa que el jugador no adopta necesariamente la estrategia conservadora.

Definición: Un jugador es del "tipo ε-agresivo" si determina la elección de sus estrategias con criterio conservador o con criterio no conservador mediante la lotería (p,q) con $p \leq 1/2-\varepsilon$, $q \geq 1/2+\varepsilon$.

Definición: **(Funciones inestables)**. Sea $(X,Y;(f,g))$ un juego bipersonal entonces $f(g)$ se dirá que es "inestable sobre X" si existe $x \varepsilon X$ tal que $f(x,g^{\#}) < f(x^{\#},y^{\#})$ $(g(x^{\#},y) < g(x^{\#},y^{\#})$ respectivamente). Si f y g son inestables, entonces el juego se dice conjuntamente inestable. (F es inestable).

Es claro que la inestabilidad puede extenderse a otros conceptos de óptimos, por ejemplo, el del punto de equilibrio, pero, en este ejemplo, cada jugador pierde la libertad del uso de la información que posee, es decir, puede observar que existe x tal que $f(x,\overline{y}) < f(\overline{x},\overline{y})$ y sin embargo no puede aplicarla porque $\overline{x},\overline{y}$ son calculados resolviendo las ecuaciones simultáneas indicadas en c). En cambio la inestabilidad que sugiere el óp timo conservador no involucra más información para cada jugador que la que aporta su propia función de costo. Así pues, como primer intento para perfilar las funciones inestables, debe ser la caracterización de las funciones f que alcanzan el valor conservador. El teorema siguiente es clásico y da la primera respuesta.

Teorema: Si $x \to f(x,y)$ para cada $y \varepsilon Y$, es semicontinua inferior en (X, τ_x) y para $y_0 \varepsilon Y$, $x \to f(x,y_0)$ es semicompacta, entonces existe la estrategia $x^{\#}$ tal que $v_x^{\#}$ es alcanzado en el dominio de f. Es decir, existe $x^{\#}$ tal que: $f^{\#}(x^{\#}) = \inf_{x \varepsilon X} f^{\#}(x)$.

La demostración de este teorema se encuertra en Aubin [3], pág. 206. Para efectos posteriores conviene señalar los siguientes aspectos:

1º) Si $J = \{K = (y_1, \ldots, y_n)\ ,\ n < \infty\ ,\ n \varepsilon \mathbb{N}\}$ es la familia de los subconjuntos finitos de Y, entonces el número $v_X^{\natural} = \sup_{K \varepsilon J} \inf_{x} \max_{y \varepsilon K} f(x,y)$ satisface la relación $v_{xX}^{b} \leq v_X^{\natural} \leq v_X^{\#}$. Con $v_X^{b} = \sup_{y} \inf_{x} f(x,y)$

2º) La hipótesis de semicontinuidad inferior garantiza que los conjuntos $S(y) = \{x | f(x,y) \leq v_X^{\natural}\}$ son cerrados y esta hipótesis junto con la de semicompacidad inferior, asegura que el conjunto $S(K) = S(y_0) \bigcap_{i=1}^{n} S(y_i)$ es compacto.

3º) El conjunto de funciones $x \to f(x,y_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$ define la función $x \to \max_{i=0,1,..n} f(x,y_i)$ la cual es también S. C. inf y S. C. para $y_i = y_0$.

4º) La S.C. inf de $x \to \max_{i=0,1,..n} f(x,y_i)$ y la compacidad de $S(K)$ aseguran la existencia de $\overline{x}$ tal que

$$\max_{i=0,1,..n} f(\overline{x},y_i) = \inf_{x} \max_{i=0,1,..n} f(x,y_i)$$ y por eso será también:

$$\max_{i=0,1,..n} F(\overline{x},y_i) \leq \sup_{K\varepsilon J} \inf_{x} \sup_{y\varepsilon K} f(x,y) = v_X^{\natural}$$

De aquí resulta entonces que $\overline{x} \varepsilon S(y_0) \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} S(y_i) = S(K)$.

5º) Las familias finitas $S(K)$ tienen la propiedad de la intersección finita y por eso $S = \underset{y\varepsilon Y}{\cap} S(y) = S(y_0) \underset{y\neq y_0}{\cap} S(y)$ que es compacto, será entonces no vacío, es decir, existirá $\overline{x}$ tal que

$$(\forall\, y)(\overline{x} \;\varepsilon\; \{x \mid f(x,y) \leq v^{\natural})$$

o equivalentemente $\overline{x}$ es solución de la ecuación:

$$\sup_{y} f(\overline{x},y) = v_X^{\natural}$$

6º) Puesto que $v_X^{\#} = \inf \sup f(x,y)$ se tendrá que $v_X^{\#} \leq v_X^{\natural}$ es decir, según 1º), se tendrá también $v_X^{\#} \leq v_X^{\natural} \leq v_X^{\#}$ y así $v_X^{\#} = v_X^{\natural}$ y por lo tanto existe $\overline{x}$ tal que:

$$\sup_{y} f(\overline{x},y) = v_X^{\#}$$

7º) Análogamente existirá $\overline{y}$ tal que

$$\sup_{x} g(x,\overline{y}) = v_Y^{\#}.$$

Considerando las observaciones anteriores, es claro que la aplicación del óptimo del punto de equilibrio requiere de cooperación entre ambos competidores si quieren mejorar sus espectativas de disminuir las pérdidas $f(x^*,y^*)$, $g(x^*,y^*)$ con

$$f(x^*,y^*) = \inf_x f(x,y^*)$$

$$g(x^*,y^*) = \inf_y g(x^*,y).$$

En este contexto se observa que el sentido de la inestabilidad adquiere un nuevo matiz, así el par (f,g) será inestable en el sentido del punto de equilibrio si $\exists(x',y')$ tal que

$$f(x',y') \leq f(x^*,y^*) \quad y \quad g(x',y') \leq g(x^*,y^*).$$

El siguiente ejemplo muestra la conveniencia de este nuevo concepto.

Si la función de bipérdidas es como describe la tabla, entonces el punto (β,γ) es de equilibrio no cooperativo, sin embargo, ambos jugadores son favorecidos si emplean el par (α,δ).

	γ	δ
γ	$(5,3)$	$(2,1)$
β	$(4,2)$	$(1,3)$

$$f(\beta,\gamma) = 4 < f(\alpha,\gamma) = 5$$

$$g(\beta,\gamma) = 2 < g(\beta,\delta) = 3$$

$$f(\alpha,\delta) = 2 < f(\beta,\gamma) = 4$$

$$g(\alpha,\delta) = 1 < g(\beta,\gamma) = 2$$

Es claro que el ejemplo no es un situación atípica. Por otro lado se aprecia en este mismo ejemplo el riesgo de la unilateralidad en el desvío de la norma del punto de equilibrio.

Otra observación interesante es que, a igual que el par de soluciones conservadoras, las soluciones del punto de equilibrio no son necesariamente Pareto-óptimas, es decir, puede existir un par (x,y) tal que $f(x,y) < f(\overline{x},\overline{y})$, $g(x,y) < g(\overline{x},\overline{y})$, donde $(\overline{x},\overline{y})$ es un par en equilibrio no cooperativo.

La existencia del punto de equilibrio puede plantearse en variados contextos. El teorema que se enuncia es debido a Nash.(1952).

Teorema: Sea $U = Y \times Y$ el conjunto de pares de estrategias de los jugadores I, II. U, provisto de la topología producto, se supone convexo y compacto, y sea $F = (f,g)$ operador de bipérdidas de modo que f y g sean contínuas en ambos argumentos y tales que

$(\forall y)(x \to f(x,y)$, convexa)

$(\forall x)(y \to g(x,y)$, convexa). Entonces existe (x,y) que es punto de equilibrio no cooperativo.

La demostración considera los siguientes aspectos más relevantes.

1º) La función $\varphi : U \times U \to \mathbb{R}$ definida para $u = (x,y)$ $v = (s,t)$, por $\varphi(u,v) = f(x,y) - f(s,y) + g(x,y) - g(x,t)$, satisface la siguiente condición:

si para $u = \overline{u}$ se cumple que

$$\sup \varphi(\overline{u},v) \leq 0 \text{ , entonces } \overline{u} = (\overline{x},\overline{y})$$

•

es punto de equilibrio no cooperativo. La demostración es inmediata pues

$$\operatorname*{Sup}_{v} \varphi(\overline{u},v) \leq 0 \Longrightarrow (\forall v)(\varphi(\overline{u},v) \leq 0)$$

Es decir $(\forall v)(f(\overline{x},\overline{y}) - f(s,\overline{y}) + g(\overline{x},\overline{y}) - g(\overline{x},t) \leq 0)$. En particular para $v = (\overline{x},t)$ se tendrá:

$$(\forall t)(f(\overline{x},\overline{y}) - f(\overline{x},\overline{y}) + g(\overline{x},\overline{y}) - g(\overline{x},t) \leq 0)$$

$$(\forall t)(g(\overline{x},\overline{y}) - g(\overline{x},t) \leq 0),$$ lo que quiere decir que

$$g(\overline{x},\overline{y}) = \inf_{y} g(\overline{x},y)$$ y también será

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \inf_{x} f(x,\overline{y})$$

Naturalmente el recíproco también es cierto cuando todos los pares (x,y) sean factibles.

2º) La función $\varphi : Uxu \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades:

- es contínua en UxU y por lo tanto S.C. inf y S.C. sup, para cada $v \in U$.

- como consecuencia de lo anterior los conjuntos $S(\varphi,\lambda) = \{\mu \in u \mid \varphi(\mu,v) \leq \lambda\}$ y $S^{\#}(\varphi,\lambda) = \{\mu \in u \mid \varphi(\mu,v) \geq \lambda\}$, son cerrados.

- es cóncava para cada $u \in U$.

Esta última propiedad se desprende de la convexidad de f y g.

para todo $y \in Y$. Efectivamente:

Sean $u = (x,y)$

$v = (s,t)$, entonces

$$\varphi(u,v) = f(x,y) - f(s,y) + g(x,y) - g(x,t)$$

Puesto que U es convexo y si $v' = (s',t) \in u$, $v''(s'',t) \in U$ entonces $v = \alpha v' + (1-\alpha) v'' \in U$. Con lo que $\varphi(u,v)$ adquiere la expresión

$$\begin{aligned}
\varphi(u, \alpha v' + (1-\alpha) v'') &= f(x,y) - f(\alpha s' + (1-\alpha) s'',y) + \\
&\quad g(x,y) - g(x,t) \\
&\leq f(x,y) - \alpha f(s',y) - (1-\alpha) f(s'',y) + \\
&\quad g(x,y) - g(x,t) \\
&= \alpha\{f(x,y) - f(s',y) + g(x,y) - g(x,t)\} + \\
&\quad (1-\alpha)\{f(x,y) - f(s'',y) + g(x,y) - g(x,t)\} \\
&= \alpha \varphi(u,v') + (1-\alpha) \varphi(u,v'').
\end{aligned}$$

Lo que prueba que la función φ es efectivamente cóncava para cada $\mu \in U$.

3º) Las condiciones del punto 2º) aseguran que $\varphi(u,v)$ satisface las hipótesis de Ky-Fan para garantizar que $\sup\limits_{v} \varphi(u,v) \leq 0$. Además por 1º) $\sup\limits_{v} \varphi(u,v) \leq 0$ asegura que existe $\overline{u}$ tal que $\overline{u} = (\overline{x},\overline{y})$ es de equilibrio para el juego $(X,Y\ ;\ f,g)$.

Este teorema, fundamental en la Teoría de los juegos matriciales permite, por contraste, congeturar la naturaleza de las funciones que no son estables individualmente.

Anteriormente se demostró que $f(\overline{x},\overline{y})$ en general satisface la relación:

$$f(\overline{x},\overline{y}) \leq f(x^{\#},y^{\#}) \ ,$$

es decir, el valor conservador no es preferible al valor de equilibrio. Obviamente, aparece necesario establecer el contexto bajo el cual se cumple efectivamente que:

$$f(\overline{x},\overline{y}) < f(x^{\#},y^{\#})$$

$$g(\overline{x},\overline{y}) < g(x^{\#},y^{\#})$$

En el ejemplo numérico anterior debe observarse que

$$v_X^{\#} = \inf_x \sup_y f(x,y) = 4 \qquad \text{y se alcanza en} \quad x^{\#} = \beta$$

$$v_Y^{\#} = \inf_y \sup_x g(x,y) = 3 \qquad \text{y se alcanza en} \quad y^{\#} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \delta \end{matrix} \right.$$

así $(X^{\#},Y^{\#})$ es punto de equilibrio.

Evidentemente una condición suficiente para que

$$v_X^{\#} > f(\overline{x},\overline{y}) \quad \text{y} \quad v_Y^{\#} > g(\overline{x},\overline{y}) \quad \text{será que:}$$

$$\left.\frac{\partial f(\overline{x},y)}{\partial y}\right|_{y=\overline{y}} \neq 0 \quad \Lambda \quad \left.\frac{\partial g(x,\overline{y})}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \neq 0$$

Ejemplo:

$$f(x,y) = x(x+y-u) \qquad X = Y\ [0,u]$$

$$g(x,y) = x(x+y-u)$$

$$v_X^{\#} = \inf_x \sup_y [x(x+y-u)] = 0$$

$$v_Y^{\#} = \inf_y \sup_x [y(x+y-u)] = 0$$

$$x^{\#} = y^{\#} = 0$$

$$f(\overline{x},\overline{y}) = -\frac{u^2}{g}$$

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{u}{3}$$

Así $f(\frac{u}{3}, \frac{u}{3}) = -\frac{u^2}{g} < 0 = f^{\#}(0) = v_X^{\#}$

$$g(\frac{u}{3}, \frac{u}{3}) = -\frac{u^2}{g} < 0 = g^{\#}(0) = v_Y^{\#}$$

$$\left.\frac{\partial f(\overline{x},y)}{\partial y}\right|_{y=\overline{y}} = \overline{x} \neq 0$$

Se observa en este ejemplo que:

$$f(\overline{x},y^{\#}) = \frac{u}{3}(\frac{u}{3} + 0 - u) = -\frac{2u^2}{g}$$

$$g(\overline{x},y^{\#}) = 0$$

$$f(x^{\#},\overline{y}) = 0$$

$$g(x^{\#},\overline{y}) = \frac{u}{3}(0 + \frac{u}{3} - u) = -\frac{2u^2}{g}$$

lo que pone de manifiesto lo conveniente del diálogo entre competidores pero si éste no es posible, entonces la caracterización del jugador es decisiva.

REFERENCIAS.

[1] AUBIN, I.P. "Mathematical Methods of Game and Economic Throry". North-Holland Publishing Co. 1979.

[2] PRADO C., A. "Enfoque Bayesiano para el valor de Información en Juegos". Universidad de Madrid. 1983.