REVISTA PROYECCIONES Nº 13: 73-86
Julio 1987 - ISSN 0716-0917
DOI: 10.22199/S07160917.1987.0013.00005

ESTIMADORES DE ERROR A-POSTERIORI

PARA EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

GABRIEL N. GATICA*
Departamento de Matematica, Universidad de Concepcion
Casilla 2017, Concepcion

RESUMEN

Este articulo presenta una extension de un resultado por I. Babuska y W. Rheinboldt sobre el analisis de error a-posteriori para el metodo de elementos finitos. Nuestro tratamiento proporciona una demostracion alternativa de dicho resultado y sugiere tambien nuevos estimadores de error a-posteriori que mejoran la cota inferior del error.

1. INTRODUCCION

En el metodo de elementos finitos existe mucha necesidad de tecnicas que permitan calcular estimadores de error a-posteriori a un costo razonable. Tales estimadores de error no son solamente importantes para una evaluacion de la confiabilidad de los resultados, sino que ellos permiten realizar tambien una optimizacion adaptable de las mallas de elementos finitos. Recientemente, BABUSKA y RHEINBOLDT desarrollaron una formulacion general usando formas bilineales sobre pares de espacios de Hilbert convenientes (ver [4]), y posteriormente, ellos y algunos colaboradores han utilizado dicha teoria en muchos articulos relacionados con el tema (ver [2],[3],[5],[6],[7],[8], [14]). El resultado principal de [4] muestra que calculos locales sobre los elementos proporcionan una estimacion de error optimal en el sentido que, excepto por constantes multiplicativas, las cotas inferior y superior del error coinciden. Estas constantes son independientes de la malla y de la solucion analitica del problema,y mas aun, en la practica ellas no son grandes.

Aqui damos una demostracion alternativa del teorema principal de [4] y sugerimos nuevos estimadores de error a-posteriori que mejoran la cota inferior del error. El articulo se presenta como sigue : En seccion 2 se dan algunas definiciones y resultados preliminares. Seccion 3 se refiere a las estimaciones de error a-posteriori. Finalmente, en seccion 4 se aplica la teoria anterior al problema de Poisson y se proporciona un resultado general para operadores elipticos.

*DIRECCION ACTUAL : Department of Mathematical Sciences, University of Delaware, Newark, Delaware 19716, U.S.A.

2. PRELIMINARES

Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert reales con productos interiores $<\cdot,\cdot>_{H_i}$; $i=1,2$, y correspondientes normas.

Sea B una forma bilineal sobre $H_1 \times H_2$ (cf.[4] : (2.11)) y $f \in H_2'$ un funcional lineal dado sobre H_2. Estamos interesados en encontrar $u_0 \in H_1$ tal que

$$B(u_0,v) = f(v) \; ; \textit{ para todo } v \in H_2 \tag{2.1}$$

Con respecto a esto, se tiene el resultado :

Proposicion 2.1. *Suponga que B y f son como definidas anteriormente. Entonces existe una unica solucion $u_0 \in H_1$ de (2.1). Mas aun,*

$$||u_0||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2}||f||_{H_2'} \tag{2.2}$$

donde C_2 es la constante de coercitividad de B (cf.[4] : (2.11)).
Demostracion : *Ver [1] : Teorema 5.2.1*

Ahora, sea $\hat{P}$ una familia de pares $(\hat{V},V)$ cada uno de los cuales consiste de subespacios de dimension finita $\hat{V} \subset H_1$, $V \subset H_2$. Entonces, el siguiente resultado ocurre.

Proposicion 2.2. *Sea B una forma uniformemente $\hat{P}$-propia sobre $H_1 \times H_2$ (cf. [4] : (2.14)) y $f \in H_2'$ un funcional dado. Sea $u_0 \in H_1$ el unico elemento que satisface (2.1)-(2.2). Entonces, para cualquier $(\hat{V},V) \in \hat{P}$ existe un unico $\hat{u}_0 \in \hat{V}$ tal que*

$$B(\hat{u}_0,v) = f(v) \; ; \textit{ para todo } v \in V \tag{2.3}$$

y

$$||u_0-\hat{u}_0||_{H_1} \leq (1+\frac{C_1}{\hat{C}_2}) \inf_{w \in \hat{V}} ||u_0-w||_{H_1} \tag{2.4}$$

donde C_1 es la constante de continuidad de B sobre $H_1 \times H_2$ (cf. [4] : (2.11)) y $\hat{C}_2$ es la constante de coercitividad de B sobre $\hat{V} \times V$ (cf. [4] : (2.11)).
Demostracion : *Ver [1] : Teorema 6.2.1*

En lo que sigue supondremos que

$$H_0^{k_i}(\Omega) \subseteq H_i \subseteq H^{k_i}(\Omega) \;\; , \textit{ con } k_1,k_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\} \tag{2.5}$$

y que

$$||\cdot||_{H_i} = ||\cdot||_{H^{k_i}(\Omega)} \tag{2.6}$$

Decimos que $\psi = \{\phi_1, \cdots, \phi_M\} \subseteq H^{k_2}(\Omega)$ es una particion de unidad del dominio Ω si

$$\phi_i \geq 0 \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{M} \phi_i(x) = 1 \text{ , } para\ todo\ x \in \Omega \tag{2.7}$$

Siempre es posible particionar el conjunto ψ de modo que

$$\psi = \bigcup_{l=1}^{r} \psi_l \;\; , \;\; \psi_l \bigcap \psi_p = \emptyset \;\; l \neq p \tag{2.8}$$

con

$$\phi_i, \phi_j \in \psi_l \text{ , } i \neq j \Longrightarrow supp^o\ \phi_i \bigcap supp^o\ \phi_j = \emptyset. \tag{2.9}$$

Aqui, *supp* ϕ_i *y supp*^{o} ϕ_i denotan el *soporte de* ϕ_i y su interior, respectivamente.

El entero mas pequeño r para el cual (2.8) y (2.9) ocurren, se llama *el indice de particion* $\rho(\psi)$ *de* ψ .

Ademas de esto, consideraremos tambien particiones T de $\overline{\Omega}$ consistentes de subdominios Lipschitzianos; esto es

$$T = \{\Omega_1, \cdots, \Omega_m\} \text{ , } \Omega_l \subset \Omega$$

$$\tag{2.10}$$

$$\partial\Omega_l \textit{ Lipschitziana } ; \overline{\Omega} = \bigcup_{l=1}^{m} \overline{\Omega}_l \text{ ; } \Omega_l \bigcap \Omega_j = \emptyset,\ l \neq j.$$

A cada Ω_l le asociamos un numero positivo h_l que representa alguna medida de su tamaño.

3. LOS ESTIMADORES DE ERROR

Primeramente, damos los resultados que juegan un rol esencial en el analisis de error a-posteriori desarrollado por BABUSKA y RHEINBOLDT.

La siguiente proposicion resulta de aplicar la formula de Leibnitz y la propiedad (2.9) en [4].

Proposicion 3.1. *Sea* $\hat{T}$ *una familia admisible de tripletas* (ψ, T, V) *(cf. [4]).*

Entonces, existe una constante $\hat{C}_1>0$, que depende solo de k_2, tal que

$$||\phi_i(v-g)||^2_{H^{k_2}(\Omega_l)} \leq \hat{C}_1 K_0^2 \sum_{s=0}^{k_2} h_l^{-2s}||v-g||^2_{H^{k_2-s}(\Omega_l)} \tag{3.1}$$

para todo $i \in \sigma_l$; para todo $(\psi,T,V) \in \hat{T}$; para todo $v \in H_2$, $g \in V$ donde

$$\sigma_l = \{i \in \{1,\cdots,M\} \;/\; \Omega_l \bigcap supp^o\, \phi_i \neq \emptyset\}$$

y K_0 es una constante asociada con la familia $\hat{T}$ (cf. [4] : (2.9)).

Demostracion :

Aqui seguimos la demostracion dada en [9] : Cap. I, Prop. 4.1.

Se tiene

$$||\phi_i(v-g)||^2_{H^{k_2}(\Omega_l)} = \sum_{|\alpha|\leq k_2} ||D^\alpha(\phi_i(v-g))||^2_{L_2(\Omega_l)} \tag{3.2}$$

De acuerdo a la formula de Leibnitz puede escribirse

$$D^\alpha(\phi_i(v-g)) = \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta\phi_i D^\gamma(v-g)$$

Asi, denotando

$$\overline{C}_2 = \max_{0\leq|\alpha|\leq k_2} \{ \max_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \}$$

nos queda

$$|D^\alpha(\phi_i(v-g))(x)| \leq \overline{C}_2 \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} |D^\beta\phi_i(x)||D^\gamma(v-g)(x)|$$

y aplicando tercera condicion de admisibilidad (cf. [4]), resulta

$$|D^\alpha(\phi_i(v-g))(x)| \leq \overline{C}_2 \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} K_0 h_l^{-|\beta|}|D^\gamma(v-g)(x)| \tag{3.3}$$

Tomando el cuadrado de (3.3) y usando desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$|D^\alpha(\phi_i(v-g))(x)|^2 \leq \overline{C}_2^2 C_\alpha \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} K_0^2 h_l^{-2|\beta|}|D^\gamma(v-g)(x)|^2$$

con

$$C_\alpha = \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} 1$$

O bien

$$|D^{\alpha}(\phi_i(v-g))(x)|^2 \leq C_3 K_0^2 \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} h_l^{-2|\beta|} |D^{\gamma}(v-g)(x)|^2 \tag{3.4}$$

donde

$$C_3 = \overline{C}_2^2 \max_{|\alpha|\leq k_2} C_\alpha$$

Integrando sobre Ω_l a ambos lados de (3.4), obtenemos

$$||D^{\alpha}(\phi_i(v-g))||^2_{L_2(\Omega_l)} \leq C_3 K_0^2 \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} h_l^{-2|\beta|} ||D^{\gamma}(v-g)||^2_{L_2(\Omega_l)} \tag{3.5}$$

Por otro lado, es claro que

$$\sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} h_l^{-2|\beta|} ||D^{\gamma}(v-g)||^2_{L_2(\Omega_l)} = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} h_l^{-2|\beta|} \sum_{|\gamma|=|\alpha|-|\beta|} ||D^{\gamma}(v-g)||^2_{L_2(\Omega_l)}$$

y ademas, la expresion anterior es inferior o igual a

$$\sum_{|\beta|\leq k_2} h_l^{-2|\beta|} \sum_{|\gamma|\leq k_2-|\beta|} ||D^{\gamma}(v-g)||^2_{L_2(\Omega_l)}$$

Se sigue que

$$||D^{\alpha}(\phi_i(v-g))||^2_{L_2(\Omega_l)} \leq C_3 K_0^2 \sum_{|\beta|\leq k_2} h_l^{-2|\beta|} \sum_{|\gamma|\leq k_2-|\beta|} ||D^{\gamma}(v-g)||^2_{L_2(\Omega_l)} \tag{3.6}$$

Entonces, si $N(s) =$ numero de indices α para los cuales $|\alpha| = s$, y $C_4 = \max_{0\leq s\leq k_2} N(s)$, podemos reemplazar $|\beta|$ *por* s en (3.6) y escribir

$$||D^{\alpha}(\phi_i(v-g))||^2_{L_2(\Omega_l)} \leq C_3 C_4 K_0^2 \sum_{s=0}^{k_2} h_l^{-2s} \sum_{|\gamma|\leq k_2-s} ||D^{\gamma}(v-g)||^2_{L_2(\Omega_l)} \tag{3.7}$$

es decir

$$||D^{\alpha}(\phi_i(v-g))||^2_{L_2(\Omega_l)} \leq C_3 C_4 K_0^2 \sum_{s=0}^{k_2} h_l^{-2s} ||v-g||^2_{H^{k_2-s}(\Omega_l)} \tag{3.8}$$

Finalmente, sumando en (3.8) sobre todos los indices α, $|\alpha| \leq k_2$, se concluye

$$||\phi_i(v-g)||^2_{H^{k_2}(\Omega_l)} \leq \hat{C}_1 K_0^2 \sum_{s=0}^{k_2} h_l^{-2s} ||v-g||^2_{H^{k_2-s}(\Omega_l)}$$

con

$$\hat{C}_1 = C_3 C_4 \sum_{|\alpha|\leq k_2} 1$$

constante que depende solamente de k_2.

Esto completa la demostracion.

De la misma forma, las condiciones de admisibilidad (cf. [4]) y la proposicion anterior conducen al siguiente resultado.

Proposicion 3.2. *Sea $\hat{T}$ una familia admisible de tripletas (ψ, T, V). Entonces, existe una constante K, que depende solamente de $\hat{T}$, tal que*

$$\inf_{g \in V} \sum_{i=1}^{M} ||\phi_i(v-g)||^2_{H^{k_*}(\Omega)} \leq K ||v||^2_{H^{k_*}(\Omega)} \tag{3.9}$$

para cualquier $(\psi, T, V) \in \hat{T}$ y para todo $v \in H_2$.
Demostracion : *Ver [4] : Lema 3.1*

Con esto, nuestro resultado principal puede establecerse como sigue

Proposicion 3.3. *Suponga que $\hat{T}$ and $\hat{P}$ satisfacen las condiciones ya mencionadas, que B es una forma b. uniformemente $\hat{P}$-propia sobre $H_1 \times H_2$, y que $f \in H_2'$ es un funcional dado. Sea $u_0 \in H_1$ la unica solucion de (2.1) y para cada $(\psi, T, V) \in \hat{T}$ y correspondiente $(\hat{V}, V) \in \hat{P}$ considere el error $e = u_0 - \hat{u}_0$, donde $\hat{u}_0$ es la unica solucion de (2.3). Entonces, existen constantes positivas*

$$D_1 \geq \frac{1}{C_1 \rho^{1/2}} \quad , \quad D_2 \leq \frac{K^{1/2}}{C_2}$$

tales que

$$D_1 \eta \leq D_1 \hat{\eta} \leq ||e||_{H_1} \leq D_2 \eta \leq D_2 \hat{\eta} \tag{3.10}$$

con

$$\eta^2 = \sum_{j=1}^{M} \eta_j^2 \; ; \; \eta_j = \sup_{v \in H_2, v \neq 0} \frac{|B(e, \phi_j v)|}{||\phi_j v||_{H_2}} \tag{3.11}$$

$$\hat{\eta}^2 = \sum_{j=1}^{M} \hat{\eta}_j^2 \; ; \; \hat{\eta}_j = \sup_{v \in H_2^{j,0}} \frac{|B(e, v)|}{||v||_{H_2}} \tag{3.12}$$

donde

$$H_2^{j,0} = \{ v \in H_2 \, , \, v \neq 0 \; / \; supp \; v \subset supp^o \phi_j \}$$

y ρ es una constante tal que $\rho(\psi) \leq \rho$, para todo $(\psi, T, V) \in \hat{T}$.
Demostracion :

Denotemos

$$H_2^j = \{v \epsilon H_2 \ , \ v \neq 0 \ / \ supp \ v \subseteq supp \ \phi_j\}$$

Entonces, debido a que

$$\eta_j \leq \sup_{v \epsilon H_2^j} \frac{|B(e,v)|}{||v||_{H_2}} = \sup_{v \epsilon H_2^{j,0}} \frac{|B(e,v)|}{||v||_{H_2}} = \hat{\eta}_j \tag{3.13}$$

obtenemos facilmente que $\eta \leq \hat{\eta}$. Luego, para el lado derecho de (3.10) repetimos los argumentos dados en [4] : Teorema 3.2.

Puesto que $e \ \epsilon \ H_1$, la condicion de coercitividad para B (cf. [4]) implica

$$||e||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} \sup_{v \epsilon H_2, v \neq 0} \frac{|B(e,v)|}{||v||_{H_2}} \tag{3.14}$$

De (2.1) y (2.3) se obtiene

$$B(e,g) = 0, \ para \ todo \ g \ \epsilon \ V$$

Entonces, para $v \ \epsilon \ H_1$ puede escribirse

$$|B(e,v)| = \inf_{g \epsilon V} |B(e,v-g)|$$

o bien, puesto que $\sum_{j=1}^{M} \phi_j = 1$, resulta

$$|B(e,v)| = \inf_{g \epsilon V} | \sum_{j=1}^{M} B(e,\phi_j(v-g))|$$

$$\leq \inf_{g \epsilon V} \sum_{j=1}^{M} |B(e,\phi_j(v-g))|$$

De la definicion de η_j se tiene

$$|B(e,\phi_j(v-g))| \leq \eta_j ||\phi_j(v-g)||_{H_2} = \eta_j ||\phi_j(v-g)||_{H^{k_2}(\Omega)}$$

Luego

$$|B(e,v)| \leq \inf_{g \epsilon V} \sum_{j=1}^{M} \eta_j ||\phi_j(v-g)||_{H^{k_2}(\Omega)}$$

y aplicando Cauchy-Schwarz

$$|B(e,v)| \leq \inf_{g \epsilon V} (\sum_{j=1}^{M} \eta_j^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^{M} ||\phi_j(v-g)||^2_{H^{k_2}(\Omega)})^{1/2}$$

$$= \eta \inf_{g \epsilon V} (\sum_{j=1}^{M} ||\phi_j(v-g)||^2_{H^{k_2}(\Omega)})^{1/2}$$

Utilizando ahora proposicion 3.2 se concluye

$$|B(e,v)| \leq K^{1/2} ||v||_{H^{k_2}(\Omega)} \eta \tag{3.15}$$

para todo $v \epsilon H_2$.

Por lo tanto, de (3.14) y (3.15) se obtiene

$$||e||_{H_1} \leq \frac{K^{1/2}}{C_2} \eta$$

Por otra parte, para el lado izquierdo de (3.10) seguimos la demostracion dada en [9] y [12]. Usando el Teorema de Representacion de Riesz se deduce que existe un unico $w \epsilon H_2$ tal que

$$B(e,v) = \langle w,v \rangle_{H_2} \text{, } \textit{para todo } v \epsilon H_2 \tag{3.16}$$

y por lo tanto

$$\sup_{v \epsilon H_2, v \neq 0} \frac{|B(e,v)|}{||v||_{H_2}} = ||w||_{H_2} \tag{3.17}$$

Mas aun, de la continuidad de B obtenemos

$$\frac{|B(e,v)|}{||v||_{H_2}} \leq C_1 \frac{||e||_{H_1} ||v||_{H_2}}{||v||_{H_2}} = C_1 ||e||_{H_1} \tag{3.18}$$

para todo $v \epsilon H_2$, $v \neq 0$.

Asi, (3.17) y (3.18) implican que

$$||w||_{H_2} \leq C_1 ||e||_{H_1} \tag{3.19}$$

Ahora, sea $\psi_1, \cdots, \psi_{\overline{\rho}}$ la particion asociada al indice $\rho(\psi) = \overline{\rho}$. Entonces, para cada $l \epsilon \{1, \cdots, \overline{\rho}\}$, tenemos

$$||w||_{H_2} = ||w||_{H^{k_2}(\Omega)} \geq ||w||_{H^{k_2}(\Omega^l)} \tag{3.20}$$

donde

$$\Omega^l = \bigcup_{\phi_j \epsilon \psi_l} supp^o \phi_j$$

Puesto que $supp^o \phi_i \bigcap supp^o \phi_j = \emptyset$, para todo $\phi_i, \phi_j \epsilon \psi_l$, $i \neq j$, se sigue que

$$||w||^2_{H^{k_2}(\Omega^l)} = \sum_{\phi_j \epsilon \psi_l} ||w||^2_{H^{k_2}(supp^o \phi_j)} \tag{3.21}$$

Pero, es claro que

$$\hat{\eta}_j = \sup_{v \epsilon H_2^{j,0}} \frac{|<w,v>_{H_2}|}{||v||_{H_2}} \leq ||w||_{H^{k_2}(supp^o \phi_j)} \tag{3.22}$$

por lo cual

$$||w||^2_{H^{k_2}(\Omega^l)} = \sum_{\phi_j \epsilon \psi_l} ||w||^2_{H^{k_2}(supp^o \phi_j)}$$

$$\geq \sum_{\phi_j \epsilon \psi_l} \hat{\eta}_j^2 \geq \sum_{\phi_j \epsilon \psi_l} \eta_j^2 \tag{3.23}$$

Por lo tanto, de (3.17), (3.20), (3.22) y (3.23) concluimos que

$$||w||^2_{H_2} \geq \sum_{\phi_j \epsilon \psi_l} \hat{\eta}_j^2 \geq \sum_{\phi_j \epsilon \psi_l} \eta_j^2 \tag{3.24}$$

Finalmente, de (3.19) y (3.24) obtenemos

$$\eta^2 \leq \hat{\eta}^2 = \sum_{l=1}^{\bar{\rho}} \sum_{\phi_j \epsilon \psi_l} \hat{\eta}_j^2$$

$$\leq \rho ||w||^2_{H_2} \leq \rho C_1^2 ||e||^2_{H_1}$$

esto es

$$\frac{1}{\rho^{1/2} C_1} \eta \leq \frac{1}{\rho^{1/2} C_1} \hat{\eta} \leq ||e||_{H_1} \tag{3.25}$$

Esto completa la demostracion

Observacion 3.1
i) El teorema principal de [4] sugiere $D_1 \eta$ *y* $D_2 \eta$ como las cotas inferior y superior, respectivamente, de $||e||_{H_1}$. En este sentido, nuestro resultado dado por proposicion 3.3 mejora al menos la cota inferior del error.

ii) Es importante notar que $\hat{\eta}_j$ puede definirse tambien como

$$\hat{\eta}_j = \sup_{v \epsilon H_o^{k_2}(supp^o \phi_j)} \frac{|B(e,v)|}{||v||_{H_2}} \tag{3.26}$$

4. UN EJEMPLO DE APLICACION

Consideremos el problema de Poisson

$$Lu := -\Delta u = g \text{, } en\ \Omega \tag{4.1-a}$$

$$u = 0 \text{ , } en\ \partial\Omega \tag{4.1-b}$$

donde $g \in L_2(\Omega)$ y Ω es un dominio de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal.

La forma bilineal asociada esta dada por

$$B(u,v) := <Lu,v>_{L_2} = \int_{\Omega}(\nabla u \cdot \nabla v)dx \tag{4.2}$$

para todo $u,v \in H_1 = H_2 = H_0^1(\Omega)$.

B es propia sobre $H_1 \times H_2$ y ademas verifica

$$B(u_0,v) = <g,v>_{L_2(\Omega)} \text{ , } para\ todo\ v \in H_2$$

donde u_0 es la solucion debil de (4.1).

La particion T de $\overline{\Omega}$ consiste de triangulos cerrados Ω_l, $l=1,m$ con las siguientes propiedades :

i) El interior Ω_l^o *de* Ω_l es un subconjunto no vacio de Ω, para cada Ω_l, $l=1,m$.

ii) $\overline{\Omega} = \bigcup_{l=1}^{m} \Omega_l$

iii) La interseccion de dos triangulos no disjuntos Ω_l,Ω_p *de* T, $l \neq p$, consiste de un vertice o de un lado comun.

iv) Si h_l = diametro de Ω_l *y* α_l = modulo del angulo minimo de Ω_l, entonces existen constantes α, β_0, β_1 tales que

$$0 < \alpha \leq \alpha_l \ para\ cada\ l=1,m$$

$$0 < \beta_0 < \frac{h_l}{h_p} \leq \beta_1, \ para\ cada\ l,p \text{ , } \Omega_l \cap \Omega_p \neq \emptyset$$

Sea $\{x_j\}_{j=1}^M \subseteq \overline{\Omega}$ la coleccion de todos los vertices de los triangulos Ω_l *de* T. Entonces, para cada x_j se introduce la funcion continua y lineal por pedazos $\phi_j : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ tal que $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$. Es claro que $\psi = \{\phi_j\}_{j=1}^M$ representa una particion de unidad de $\overline{\Omega}$. Ademas, el soporte de ϕ_i es la union de todos los triangulos de T que tienen a x_i como vertice. Tambien, sea $V \subset H = H_0^1(\Omega)$ el subespacio de dimension finita generado por todas las funciones ϕ_i que son nulas en $\partial\Omega$.

Ahora, si $\hat{H} = H_0^1(\Omega)$ provisto de la norma de la energia

$$||u||_{\hat{H}}^2 = B(u,u) := |u|_{H_0^1(\Omega)}^2 \tag{4.3}$$

entonces, es facil probar, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que B es propia sobre $\hat{H}\times\hat{H}$ con $C_1 = C_2 = 1$. Mas aun, B es uniformemente $\hat{P}$-propia sobre $\hat{H}\times\hat{H}$ para la familia de pares (V,V) con constante $\hat{C}_2 = 1$.

Si denotamos

$$\hat{H}^{i,0} = \{\ v \in \hat{H}\ ,\ v \neq 0/\ supp\ v \subset supp^o\phi_i\ \} \tag{4.4}$$

entonces puede escribirse

$$\hat{\eta}_i = \sup_{v\in\hat{H}^{i,0}} \frac{|B(e,v)|}{||v||_{\hat{H}}} \tag{4.5}$$

Con el objeto de calcular exactamente $\hat{\eta}_i$ se consideran los siguientes problemas de contorno

$$Lu = g\ ,\ en\ supp^o\phi_i \tag{4.6-a}$$

$$u = \hat{u}_0\ ,\ en\ \partial(supp^o\phi_i) \tag{4.6-b}$$

y tambien

$$Lu = g - L\hat{u}_0\ ,\ en\ supp^o\phi_i \tag{4.7-a}$$

$$u = 0\ ,\ en\ \partial(supp^o\phi_i) \tag{4.7-b}$$

Entonces, si w y $\overline{w}$ representan las soluciones debiles de (4.6) y (4.7), respectivamente, se obtiene

$$w = \overline{w} + \hat{u}_0 \tag{4.8}$$

Ademas, si $v \in \hat{H}^{i,0}$, resulta

$$\begin{aligned} B(\overline{w},v) &= \langle L\overline{w},v\rangle_{L_2(supp^o\phi_i)} = \langle g - L\hat{u}_0, v\rangle_{L_2} \\ &= \langle Lu_0 - L\hat{u}_0, v\rangle_{L_2} = \langle Le, v\rangle_{L_2} \\ &= B(e,v) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por lo tanto, usando (4.9), (4.5) se transforma en

$$\hat{\eta}_i = \sup_{v\in\hat{H}^{i,0}} \frac{|B(\overline{w},v)|}{||v||_{\hat{H}}} = ||\overline{w}||_{\hat{H}(supp^o\phi_i)}$$

es decir

$$\hat{\eta}_i^2 = \int_{supp^\circ \phi_i} ||\nabla \overline{w}||^2 dx = \int_{supp^\circ \phi_i} ||\nabla (w - \hat{u}_0)||^2 dx \tag{4.10}$$

Observacion 4.1 Se observa en este ejemplo que el calculo exacto de $\hat{\eta}_i$ requiere de la solucion analitica del problema de contorno (4.7) (equivalentemente (4.6)). Por lo tanto, el uso del metodo de elementos finitos sobre (4.7), mediante una particion de *supp* ϕ_i, proporcionara una excelente aproximacion de $\overline{w}$ y en consecuencia una buena estimacion de $\hat{\eta}_i$. Desde un punto de vista practico, no hay razon de calcular exactamente $\hat{\eta}_i$; en la mayoria de los casos sera util una aproximacion a ese valor (como sugerido aqui), o bien una cota superior del mismo (Ver [10],[11]).

En realidad, la obtencion de $\hat{\eta}_i$ mediante uno de los problemas (4.6) o (4.7) no es una casualidad. Siguiendo el mismo procedimiento anterior se puede demostrar facilmente el siguiente resultado mas general :

Proposicion 4.1. *Sea B una forma bilineal sobre $H \times H$ donde H es un espacio de Hilbert provisto de la norma de la energia*

$$||u||_E = B(u,u)^{1/2} \text{ , para cada } u \in H$$

Suponga que existe $k \in \mathbf{N}$ y Ω abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ tal que $H_0^k(\Omega) \subseteq H \subseteq H^k(\Omega)$, y de modo que $||\cdot||_E$ y $||\cdot||_{H^k(\Omega)}$ son equivalentes. Sea $\hat{T}$ una familia admisible de tripletas (ψ, T, V). Sea $\hat{g}$ un funcional lineal sobre $H^k(\Omega)$ y sean $u_0 \in H$, $\hat{u}_0 \in V$, los unicos elementos que satisfacen

$$B(u_0,v) = \hat{g}(v) \text{ , para cada } v \in H$$

$$B(\hat{u}_0,v) = \hat{g}(v) \text{ , para cada } v \in V$$

Entonces, existen constantes $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2 > 0$ tales que

$$\hat{D}_1 \hat{\eta} \leq ||u_0 - \hat{u}_0||_E \leq \hat{D}_2 \hat{\eta}$$

con

$$\hat{\eta}^2 = \sum_{j=1}^{M} \hat{\eta}_j^2 = \sum_{j=1}^{M} ||\overline{w}_j||_E^2$$

donde $\overline{w}_j$ es la unica funcion en el espacio

$$H^j := \{ v \in H \text{ , } v \neq 0 \text{ / } supp\ v \subseteq supp\ \phi_j \}$$

que verifica

$$B(\overline{w}_j,v) = B(u_0 - \hat{u}_0, v) \text{ , para cada } v \in H^j$$

Ahora, si $B(u,v) = \langle Lu,v \rangle$, para cada $u,v \in H$, donde

$L : H^k(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ es un operador diferencial fuertemente eliptico, y si $\hat{g}(v) = \langle g,v \rangle_{L_2}$, con $g \in L_2(\Omega)$, entonces resulta

$$\hat{\eta}^2 = \sum_{j=1}^{M} \hat{\eta}_j^2 = \sum_{j=1}^{M} ||\overline{w}_j||_E^2 = \sum_{j=1}^{M} ||w_j - \hat{u}_0||_E^2$$

donde w_j y $\overline{w}_j$ son las unicas soluciones de los problemas locales

$$Lu = g \text{ , en } supp^o\phi_j$$

$$u = \hat{u}_0 \text{ , en } \partial(supp^o\phi_j)$$

y

$$Lu = g - L\hat{u}_0 \text{ , en } supp^o\phi_j$$

$$u = 0 \text{ , en } \partial(supp^o\phi_j)$$

respectivamente.

REFERENCIAS

[1] A. AZIZ ; I. BABUSKA : " *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method* ". In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations., edit. by A. Aziz, Academ. Press, 1972, pp. 3-363.

[2] I. BABUSKA ; S. GAGO ; D. KELLY ; O. ZIENKIEWICZ : " *A-posteriori error analysis and adaptive process in the finite element method: Part I-Error Analysis* ". Inter. Jour. Numer. Meth. Eng., vol. 19, pp. 1593-1619,(1983).

[3] I. BABUSKA ; A. MILLER : " *A-posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method* ". University of Maryland, Inst. Phys. Science and Technology, Technical Note BN-908, June 1981.

[4] I. BABUSKA ; W. RHEINBOLDT : " *Error estimates for adaptive finite element computations* ". SIAM Jour. Numer. Anal., 15, 4, pp. 736-754, 1978.

[5] I. BABUSKA ; W. RHEINBOLDT : " *Analysis of optimal finite element meshes* ". Math. Comput., 33, pp. 435-463, 1979.

[6] I. BABUSKA ; W. RHEINBOLDT : " *Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method* ". In Computational Methods in Nonlinear Mechanics, ed. by J. ODEN, 1980, pp. 67-108.

[7] I. BABUSKA ; W. RHEINBOLDT : " *A-posteriori error estimates for the finite element method* ". Inter. Jour. Numer. Meth. Eng., 12, 1597-1615, (1978).

[8] I. BABUSKA ; W. RHEINBOLDT : " *A-posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems* ". SIAM Jour. Numer. Anal., vol. 18, 3, pp. 565-589, June 1981.

[9] G. GATICA : " *Analisis de error a-posteriori y refinamiento en el metodo de elementos finitos* ".Tesis, Magister en ciencias con mencion en Matematica, Universidad de Concepcion, 1985.

[10] G. GATICA : " *Estimadores de error y optimizacion de mallas en el metodo de elementos finitos* ". PROYECCIONES, vol. 9, pp. 11-58, Julio 1985.

[11] G. GATICA : " *Some improvements of the finite element solution for one-dimensional problems* ". Inter. Jour. Numer. Meth. Eng. (Aceptado para Publicacion).

[12] G. GATICA : " *A note on the a-posteriori error analysis for the finite element method* ". SIAM Jour. Numer. Anal. (Aceptado para Publicacion).

[13] G. GATICA : " *Some improvements of the finite element solution : the N-dimensional case* ". En preparacion.

[14] W. RHEINBOLDT : " *Adaptive mesh refinement process for finite element solutions* ". Inter. Jour. Numer. Meth. Eng., 17, pp. 649-662, 1981.