REVISTA PROYECCIONES Nº 13: 47-71 DOI: 10.22199/S07160917.1987.0013.00004
Julio 1987 - ISSN 0716-0917

REDUCCION DE UNA SINGULARIDAD A UNA SINGULARIDAD CON 1-JET NO NULO POR BLOWING-UPS DIRECCIONALES SUCESIVOS

RIGOBERTO BELTRAN B.*

----

1. RESUMEN.

En este trabajo, se presentan las nociones de Blowing-ups direccionales sucesivos y de sucesión maximal de Blowing-ups de un campo de vectores X, en una dirección D, introducidas en [Bo].

En primer lugar, se muestra que si la sucesión de Blowing-ups es finita entonces existe cono K, de contacto finito, en torno de la dirección D, tal que las órbitas entran en K y abandonan K después de un tiempo finito; y si esta sucesión de Blowing-ups es infinita, entonces D es formalmente invariante bajo X.

Finalmente, se muestra que si X tiene grado de degeneración finito y que si D es formalmente invariante después de un número finito de Blowing-ups en la dirección D, se obtiene un campo de vectores con 1-jet

* Académico Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias. Universidad de Tarapacá, Arica - Chile.

no nulo.

2. DEFINICIONES.

En este capítulo se introduce el vocabulario usual necesario para el objeto principal de este trabajo. Se presenta el espacio de las singularidades y las definiciones de los conceptos básicos.

Denotaremos por $\mathfrak{X}^k(\mathrm{IR}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$ al conjunto de los Campos de Vectores en IR^n, de clase C^k.

(2.1) **Definición:** Sea $X \varepsilon \mathfrak{X}^k(\mathrm{IR}^n)$.
X tiene una SINGULARIDAD en $p \varepsilon \mathrm{IR}^n$ si
$X(p) = 0$.

Como solamente estaremos interesados en propiedades locales de una singularidad en un punto $p \varepsilon \mathrm{IR}^n$, entonces podemos suponer, sin mayor restricción que $p = 0$.

(2.2) **Definición:** Sean $X, Y \varepsilon \mathfrak{X}^k(\mathrm{IR}^n)$
Diremos que X e Y son GERMEN-EQUIVALENTES en 0 si existe vecindad U de 0 tal que $X|_U = Y|_U$.

Explícitamente, los campos X e Y son germen-equivalentes en 0 cuando existe vecindad U de 0 tal que $X(p) = Y(p)$ $\forall$ $p \varepsilon U$.

La relación germen-equivalentes es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathfrak{X}^k(\mathrm{IR}^n)$. Así, para un campo dado, podemos formar la clase de equivalencia de este campo, la cual queda constituida por todos los campos de clase C^k, de IR^n, que son germen-equivalentes con él.

(2.3) **Definición:** Sea $X \varepsilon \mathfrak{X}^k(\mathrm{IR}^n)$.
El GERMEN de X en 0 es el conjunto de los campos de vectores de clase C^k, de IR^n, que son germen-equiva-

lentes con X en 0.

Como es fácil apreciar, el germen de X en 0 no es otra cosa que la clase de equivalencia de X por la relación germen-equivalentes en 0.

Análogamente, se define el germen en 0 en funciones, difeomorfismos, ...

El germen en 0 de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es el germen en 0 de su función característica χ_A.

Por simplicidad, usaremos la misma notación tanto para el germen de una aplicación (o de un conjunto) como para su representante.

Denotaremos por G^n al conjunto de los gérmenes en 0, de los campos de vectores de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n$.

(2.4) **Definición**: Sean $X, Y \in G^n$ y $k \in \mathbb{N}$.
Diremos que X e Y son k-JET-EQUIVALENTES si sus derivadas en 0, incluidas hasta las de orden k, son iguales.

Explícitamente, escogido un sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en torno de 0, entonces si X e Y son k-jet-equivalentes en 0, se tiene que,

$$D^r x(0) = D^r Y(0) \quad , \quad 0 \leq r \leq k \quad , \quad \text{donde}$$

$$D^0 X(0) = X(0) \quad , \quad D^0 Y(0) = Y(0) \qquad \text{y}$$

$$D^r = \frac{\partial^r}{\partial x_1^{r_1} \, \partial x_2^{r_2} \ldots \partial x_n^{r_k}} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = r$$

O sea, para que dos campos X e Y sean k-jet-equivalentes, exigimos la coincidencia de los campos y de las derivadas parciales hasta las de orden k, en el punto 0.

Así, el desarrollo en Serie de Taylor en torno del punto 0, de X e Y, incluyendo los términos de grado $\leq k$ son idénticos.

La relación k-jet-equivalentes es una relación de equivalencia en el conjunto G^n.

(2.5) **Definición**: Sean $X \in G^n$ y $k \in \mathbb{N}$.
El k-JET de X es el conjunto de todos los $Y \in G^n$ que son k-jet-equivalentes con X en 0.

Como es fácil apreciar, el k-jet de X es la clase de equivalencia de X por la relación k-jet-equivalente.

Denotaremos por $j_k X(0)$ al k-jet del germen del campo X en 0.

Tomando los valores de las derivadas de X en 0 como las coordenadas del k-jet $j_k X(0)$, tenemos que $j_k X(0)$ es un espacio euclidiano. Así un k-jet puede ser visto como un conjunto de polinomios de grado $\leq k$ o por una n-tupla, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ donde los α_i son polinomios de grado $\leq k$ para algún N, función de n y k. Esto demuestra que existe una correspondencia biunivoca entre k-jets y campos de vectores X de $\mathbb{R}^n$ con $X(0) = 0$, cuyas componentes son polinomios de grado $\leq k$.

Esta correspondencia induce en el conjunto J_k^n de los k-jet $j_k X(0)$ de $X \in G^n$ una estructura natural de espacio vectorial real.

Un sistema de coordenadas de J_k^n es constituido por los valores de las derivadas parciales, hasta de orden k, calculadas en el punto 0.

De esta manera, tenemos para cada k, una proyección canónica,

$$\begin{aligned} j_k : G^n &\longrightarrow J^n_k \\ X &\longmapsto j_k X(0) \end{aligned}$$

la cual asocia a cada germen de un campo su k-jet en el origen.

Es claro que todo $\sigma \varepsilon J^n_k$ es de la forma $\sigma = j_k X(0)$ para algún $X \varepsilon G^n$.

Estos espacios "k-jet" J^n_k permiten poner una topología en G^n; la topología menos fina que torna las proyecciones j_k continuas.

Ahora, notemos que si $k \leq r$ entonces, es claro que dos gérmenes que tengan el mismo r-jet en 0, tendrán el mismo k-jet en 0.

Así existe una proyección natural,

$$\begin{aligned} \pi_{rk} : J^n_r &\longrightarrow J^n_k \\ j_r X(0) &\longmapsto j_k X(0) \end{aligned}$$

Esto es, π_{rk} queda definido por el "truncamiento" de los términos de mayor orden. Estas funciones π_{rk} son evidentemente sobreyectoras pero π_{rk} no es inyectora excepto cuando $r = k$.

Además, como $\pi_{rk} \circ \pi_{mr} = \pi_{mk}$ para $m \geq r \geq k$ y $\pi_{rr} = id$ $\forall\, r$, entonces podemos definir el límite inverso de los conjuntos J^n_r por las funciones π_{rk}.

Entonces, J^n_∞ es el límite inverso (Proyectivo),

$$J^n_\infty = \varprojlim J^n_r$$

También la función,

$$j_\infty : G^n \longrightarrow J^n_\infty$$
$$X \longmapsto j_\infty X(0)$$

es el límite inverso, $j_\infty = \varprojlim j_k$

Estos elementos $j_\infty X(0)$ de J^n_∞ son llamados ∞-JET.

En coordenadas locales, $j_\infty X(0)$ representa la Serie de Taylor de X en 0. Así los elementos de J^n_∞ pueden ser vistos como n-tuplas de Series de Potencias en n-variables.

El Teorema de Borel: "$\forall\, T \in J^n_\infty$, $\exists\, X \in G^n$ tal que $T = j_\infty X(0)$"; garantiza que j_∞ es sobreyectora, lo cual establece que todo elemento de J^n_∞ puede ser obtenido como ∞-jet del germen de algún campo de vectores.

Las funciones,

$$\pi_k : J^n_\infty \longrightarrow J^n_k$$
$$j_\infty X(0) \longmapsto j_k X(0)$$

inducen en J^n_∞ la topología menos fina que torna continuas las proyecciones π_k. Esta elección implica que $j_\infty : G^n \longrightarrow J^n_\infty$ es continua.

De manera análoga, se definen jets de funciones, difeomorfismos, ...

(2.5) **Definición:** Sean $X \in G^n$ y $k \in \mathbb{N}$.
Diremos que X tiene GRADO DE DEGENERACION k, si $j_k X(0) = 0$ y $j_{k+1} X(0) \neq 0$ y tiene GRADO DE DEGENERACION CERO si $j_1 X(0) \neq 0$.

(2.6) **Definición:** Una DIRECCION en 0, es la imagen por un difeomorfismo de clase C^∞ del germen en 0 de una semi-recta con extremo en 0.
El difeomorfismo es supuesto preserva el 0.

Es fácil probar que si D es una dirección en IR^n, entonces existe germen de la aplicación $\gamma: ([0,\infty),0) \longrightarrow (IR^n,0)$ de clase C^∞ con $\gamma'(0) \neq 0$ tal que la imagen de γ es D.

Recíprocamente, si $\gamma: ([0,\infty),0) \longrightarrow (IR^n,0)$ es de clase C^∞ y si $\gamma'(0) \neq 0$, entonces la imagen de γ es una dirección.

(2.7) **Definición:** Sean $X \varepsilon G^n$ y D una dirección.
Diremos que X es NO-DEGENERADO en la dirección D si para algún germen de clase C^∞, $\gamma: ([0,\infty),0) \longrightarrow (IR^n,0)$ con $\gamma'(0) \neq 0$ e imágen D, tenemos que $j_\infty(X\circ\gamma)(0) \neq 0$.
De otra forma, diremos que X es DEGENERADO en la dirección D.

(2.8) **Definición:** Sea $X \varepsilon G^n$.
Diremos que X satisface la DESIGUALDAD DE LOJASIEWICZ, si existe $k \varepsilon IN$ y c, $\delta \varepsilon IR^+$ tal que,
$\forall\, x \varepsilon IR^n$ con $||x|| \leq \delta$, $||X(x)|| \geq C \; ||x||^k$

Una propiedad importante es que si $X \in G^n$ satisface la desigualdad de Lojasiewicz, entonces X es no-degenerado a lo largo de toda dirección.

Denotemos por (x,z) un elemento de $IR^m x\, IR$ y por (X_x,X_z) a un campo de vectores X en $IR^m x\, IR$.

(2.9) **Definición:** Sea $X \varepsilon G^{m+1}$.

Diremos que X deja el eje-z, $\{0\}^m \times IR$ FORMALMENTE INVARIANTE si para todo $k \in IN$,

$$\frac{\partial^k X_x(0)}{\partial z^k} = 0$$

Esto es lo mismo que decir que $j_\infty X_x(0)$ no contiene puros términos en z.

(2.10) **Definición:** Sea $K \subset IR^{m+1}$.

Un germen de K es un CONO DE CONTACTO k, $k \in IN$, $k > 1$, de clase C^1 si existe germen de una función $h : ([0,\infty),0) \longrightarrow (IR,0)$ de clase C^1 con $j_k h(0) = 0$, $j_{k+1} h(0) \neq 0$ y germen de un difeomorfismo,

$\varphi: (IR^{m+1},0) \longrightarrow (IR^{m+1},0)$ tal que,

$K = \varphi(\{(x,z) \in IR^m \times [0,\infty) \ / \ ||x|| < h(z)\})$

K es llamado un Cono de Contacto k, en la dirección $D = \varphi(\{0\}^m \times [0,\infty))$.

Mayores detalles y propiedades de los elementos definidos se pueden encontrar en la Bibliografía.

Como se dice al principio, este capítulo solamente está destinado a entregar el lenguaje básico a usar.

3. BLOWING-UPS DE CAMPOS DE VECTORES.

El Método de Blowing-up para Campos de vectores es una conocida técnica que permite descomponer una singularidad en otras más simples. Este Método fue introducido por GOMORY en 1955 y por NEMYTSKII y STEPANOV en 1960 y ha sido usado, entre otros por TAKENS [Ta] y DUMORTIER [Du].

En este capítulo se presenta una descripción del Método y en particular, para Blowing-up en una dirección, se dan algunos cálculos específicos en forma detallada.

3.1. UN BLOWING-UP ESFERICO.

Para $m \in IN$, escribiremos,

$$S^m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \in IR^{m+1} \ / \ \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\}$$

$$y \quad \phi : S^m \times IR \longrightarrow IR^{m+1}$$
$$(x,r) \longmapsto rx$$

Observemos que:

1. $\phi|_{S^m \times IR^+}$ es un difeomorfismo de clase C^∞ sobre $IR^{m+1}-\{0\}$
2. $S^m \times \{0\} = \phi^{-1}(0)$

(3.1) **Proposición** [Ta]

Sea $X \in \mathfrak{X}^k(IR^{m+1})$ con $X(0) = 0$.
Entonces existe campo de vectores $\tilde{X}$, de clase C^{K-1} definido sobre $S^m \times IR$ tal que para todo $q \in S^m \times IR$,
$d\phi(\tilde{X}(q)) = X(\phi(q))$ (o $\phi_*\tilde{X} = X$).

Del desarrollo en Serie de Taylor de X en 0, se observa que si X tiene su 1-jet nulo, entonces X es idénticamente nulo en $S^m x\{0\}$.

Ahora, si X tiene grado de degeneración s, entonces, por construcción, $\tilde{X}|_{S^m x\{0\}} = 0$, luego tiene sentido definir el campo de vectores $\overline{X} = \frac{1}{r^s}\tilde{X}$ y tomar el límite cuando $r \longrightarrow 0$ obteniendo así un campo de vectores de clase C^{k-s-1} en $S^m \times IR$.

(3.2) **Definición:** $\overline{X}$ es llamado el Campo de Vectores obtenido por un BLOWING-UP y dividido por r^s.

Notemos que $\overline{X}$ restricto a $S^m x\{0\}$ es el campo vectorial tangente a $S^m x\{0\}$.

El estudio de este campo, a veces nos da información del comportamiento asintótico de las órbitas cuando ellas tienden a 0.

3.2. UN BLOWING-UP DIRECCIONAL.

En dimensiones superiores, el cálculo específico para un Blowing-up esférico es complicado.

Restrinjamos nuestra atención a la semi-esfera de S^m y supongamos que tiene el punto $(0,0,\ldots 0,1)$ como "polo norte". Un Blowing-up direccional no es nada más que escoger una carta de S^m usando proyección central, con centro en 0, en el hiperplano tangente por $(0,0,\ldots,0,1)$ a S^m.

Denotemos por (x,z) a un punto de $IR^m \times IR$.
Entenderemos por eje-z al conjunto $\{0\}^m \times IR$.
Para $n \in IN$, sea la aplicación,

$$\psi^n : IR^m \times IR \longrightarrow IR^m \times IR$$

$$(x,z) \longmapsto (xz^n, z)$$

Análogamente a la Proposición (3.1), tenemos,

(3.3) **Proposición:** Sea $X \in \mathcal{X}^k(IR^m \times IR)$ con $X(0) = 0$. Entonces existe campo de vectores $\tilde{X}^1$ de clase C^{k-1} en $IR^m \times IR$ tal que para todo $q \in IR^m \times IR$,

$d\,\psi^1(\tilde{X}^1(q)) = X(\psi^1(q))$ (o $\psi^1_* \tilde{X}^1 = X$)

Nuevamente, si X tiene grado de degeneración s, definimos el campo de vectores,

$$\bar{X}^1 = \frac{1}{z^s}\tilde{X}^1$$

y tomando el límite cuando $z \longrightarrow 0$, obtenemos un campos de vectores de clase C^{k-s-1} en $IR^m \times IR$.

(3.4) **Definición:** $\bar{X}^1$ es llamado el campo de vectores obtenido por un BLOWING-UP EN LA DIRECCION z y dividido por z^s.

Denotando por $X = (X_x, X_z)$ al campo de vectores X en $IR^m xIR$, es fácil ver que,

$$\psi^1_* \tilde{X}^1 = X \qquad \text{sí y solamente si,}$$

$$\tilde{X}^1 = \left(\frac{1}{z}(X_x o\psi^1) - \frac{x}{z}(X_z o\psi^1),\ X_z o\psi^1\right)$$

y así, $$\bar{X}^1 = \left(\frac{1}{z^s}\left(\frac{1}{z}(X_x o\psi^1) - \frac{x}{z}(X_z o\psi^1)\right),\ \frac{1}{z^s}(X_z o\psi^1)\right) \qquad (\Delta)$$

3.3. RELACION ENTRE BLOWING-UPS DIRECCIONALES Y ESFERICOS.

Denotemos por S^m_+ la "semi-esfera superior", esto es,

$$S^m_+ = \{(x_1,\ldots,x_m,z) \varepsilon S^m \ / \ z > 0\}$$

Consideremos la biyección,

$$f : S^m_+ \times IR \longrightarrow IR^{m+1}$$

$$(x_1,\ldots,x_m,z,r) \longrightarrow \left(\frac{x_1}{z},\ldots,\frac{x_m}{z},\ zr\right)$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} S^m_+ \times IR \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & & IR^{m+1} \arrow[dl, "\psi^1"] \\ & IR^{m+1} & \end{tikzcd}$$

Luego, $\tilde{X}|_{S^m_+ \times IR}$ y $\tilde{X}^1$ son difeomorfos y

$$f_*\tilde{X} = \tilde{X}^1$$

Si denotamos,

$$f(x_1,\ldots,x_m,z,r) = (\frac{x_1}{z},\ldots,\frac{x_m}{z}, zr) = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m,\bar{z})$$

entonces, usando el hecho que,

$$\sum_{i=1}^{m} x_1^2 + z^2 = 1$$

tenemos que $z = \dfrac{1}{\sqrt{1+\bar{x}_1^2+\ldots+\bar{x}_m^2}}$ y $r = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

Entonces, $f_*\bar{X} = f\,(\frac{1}{r^s}\,\tilde{X}) = \frac{z^s}{\bar{z}^s}\,f_*\tilde{X} = \frac{z^s}{\bar{z}^s}\,\tilde{X}^1 = z^s\bar{X}^1$, de

donde, $f_*\bar{X} = \dfrac{1}{(1+\bar{x}_1^2+\ldots+\bar{x}_m^2)^{s/2}}\,\bar{X}^1$

Como $(1+x_1^2+\ldots+x_m^2)^{-s/2}$ es siempre positivo, las órbitas de $\bar{X}^1$ y $f_*\bar{X}$ son las mismas y con la misma orientación.

Así, el Blowing-up direccional es el mismo Blowing-up esférico, pero restringido a un pequeño dominio y transformado por un cambio local de coordenadas.

3.4. EL ∞-JET DE $\bar{X}^{1}$ EN 0 (Caso IR^{m+1})

Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in IN^m$, escribamos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ si $x = (x_1, \ldots, x_m) \in IR^m$, denotemos $x^{\alpha} = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}$;

también $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha 1} \ldots \partial x_m^{\alpha m}}$ y $\alpha! = \prod_{i=1}^{m} (\alpha_i!)$.

Entonces, podemos escribir el ∞-jet de X en 0 como

$$j_{\infty}X(0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=s+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_{i,\alpha}^{n} x^{\alpha} z^{n-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{n} c_{\alpha}^{n} x^{\alpha} z^{n-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

si X tiene grado de degeneración s en 0.

Para el ∞-jet de $\bar{X}^{1}$ en 0, escribimos,

$$j_{\infty}\bar{X}^{1}(0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{n} \bar{a}_{i,\alpha}^{n} x^{\alpha} z^{n-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{n} \bar{c}_{\alpha}^{n} x^{\alpha} z^{n-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

Utilizando (Δ) y haciendo los cálculos se encuentra que:

1. $\bar{a}_{i,\alpha}^{n} = a_{i,\alpha}^{n+s+1-|\alpha|} - c_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_1-1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_m)}^{n+s+1-|\alpha|}$

   para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq \alpha_i$, $1 \leq |\alpha| \leq n$

2. $\bar{a}_{i,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_m)}^{n} = a_{i,\alpha}^{n+s+1-|\alpha|}$

   para $1 \leq i \leq m$, $0 \leq |\alpha| \leq n$

3. $\bar{c}_\alpha^{n} = c_\alpha^{n+s-|\alpha|}$, para $0 \leq |\alpha| \leq n$

En este caso, podemos ver que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada α con $|\alpha| = n$; $\bar{c}_\alpha^{n} = 0$. Esto expresa el hecho que el hiperplano $z = 0$ es invariante bajo $\bar{X}^1$ o, equivalentemente que la componente $\frac{\partial}{\partial z}$ de $\bar{X}^1$ no contiene puros términos x^α.

En 1., 2., 3., podemos tomar el miembro derecho igual a cero cuando son indefinidos.

3.5. BLOWING-UP DIRECCIONALES SUCESIVOS.

Analizando una singularidad, puede ocurrir que después de un Blowing-up se encuentre un número de singularidades no suficiente simples a ser tratadas por los métodos conocidos. En estas singularidades podemos aplicar de nuevo un Blowing-up.

Sea $\bar{X}^1$ obtenido por un Blowing-up a X en la dirección-z y dividido por z^s.

Supongamos que $\bar{X}^1$ tiene de nuevo una singularidad en, digamos $(a,0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ y que $j_p\bar{X}^1(a,0) = 0$ y $j_{p+1}\bar{X}^1(a,0) \neq 0$. Entonces podemos calcular el Blowing-up a $\bar{X}^1$ en $(a,0)$, en la dirección-z, de la siguiente manera natural:

$$\text{Sea } T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$$

$$(x,z) \longrightarrow (x-a,z)$$

Como $T_*\bar{X}^1$ tiene una singularidad con grado de degeneración p en 0, entonces podemos considerar el campo de vectores $\overline{T_*\bar{X}^1}^1$ obtenido de $T_*\bar{X}^1$ por blowing-up, en la dirección-z y dividido por z^p.

(3.5) **Definición:** $\overline{T_*\overline{X}^1}^1$ es el campo de vectores obtenido por DOS BLOWING-UPS EN LA DIRECCION-z, primero en (0,0) y segundo en (a,0) y dividido primero por z^s y luego por z^p.

Denotaremos a $\overline{T_*\overline{X}^1}^1$ por $\overline{X}^2$.

Evidentemente, $\overline{X}^2$ depende de la elección de la singularidad de $\overline{X}^1$.

De este modo, podemos construir sucesivamente $\overline{X}^n$ por Blowing-up sobre $\overline{X}^{n-1}$ en alguna singularidad. Obviamente, $\overline{X}^n$ depende de la elección de las singularidades en las cuales hacemos el Blowing-up.

(3.6) **Definición:** Sea $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ con $X(0) = 0$.

Llamaremos de BLOWING-UPS DIRECCIONALES SUCESIVOS de X, a una sucesión de triples $(\overline{X}^n, (x_n, 0), s_n)_{o \leqslant n < N}$, $N \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $\overline{X}^o = X$ y $(x_o, 0) = (0,0)$
2. $\forall\ n$, $o \leq n < N$; $\overline{X}^n$ tiene una singularidad con grado de degeneración s_n en $(x_n, 0)$ y $\overline{X}^{n+1}$ es obtenido por Blowing-up a $\overline{X}^n$ en $(x_n, 0)$ y dividido por z^{s_n}.

A continuación, se encuentran algunas fórmulas explícitas para Blowing-ups direccionales sucesivos en 0.

(3.7) **Lema:** Sea $\overline{X}^n$ obtenido por Blowing-ups direccionales sucesivos en 0, de X. Entonces,

$$\overline{X}^n = \frac{1}{z^{s_1+s_2+..+s_{n-1}}} \tilde{X}^n \quad , \quad \text{donde } \tilde{X}^n \text{ tiene la propiedad}$$

$$\psi_*^n(\tilde{X}^n(q)) = X(\psi^n(q)) \quad , \quad \forall\ q \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.$$

Como en (Δ) tenemos que para $X = (X_x, X_z)$, $\psi_*^n \tilde{X}^n = X$ si solamente si,

$$\tilde{X}^n + \left(\frac{1}{z^n}(X_x o\psi^n) - \frac{nx}{z}(X_z o\psi^n),\ X_z o\psi^n\right)$$

Así, $$\overline{X}^n = \frac{1}{z^{s_o+s_1+..+s_{n-1}}}\left(\frac{1}{z^n}(X_x o\psi^n) - \frac{nx}{z}(X_z o\psi^n),\ X_z o\psi^n\right)$$

Cabe hacer notar que no existe restricción, por cambios de coordenadas C^∞, suponer que los Blowing-ups direccionales sucesivos son en la dirección del **eje-z.** Se deduce de esto que existe correspondencia uno a uno entre sucesiones direccionales y (N-1)-jet de direcciones (incluido $N = \infty$).

(3.8) **Definición:** Blowing-ups direccionales sucesivos de X donde $\forall n$, $o \leq n < N$, $(x_n, o) = (o,o)$ serán llamados SUCESIONES DE BLOWING-UPS de X, en 0, en la dirección -z. Denotaremos tal sucesión por $(\overline{X}^n, o, s_n)_{o \leq n < N}$

Ahora, si tenemos una sucesión de Blowing-ups de X, a lo largo del eje-z, es posible, después de un tiempo finito, no tener más singularidades en (0,0). Esto podemos formalizarlo como sigue:

(3.9) **Definición:** La sucesión $(\overline{X}^n, o, s_n)_{o \leq n < N}$ de Blowing-ups de X, en o, a lo largo del eje-z es una SUCESION MAXIMAL si $N = \infty$ o $N \in \mathbb{N}$ y $\overline{X}^{N-1}(o) \neq o$.

Sucesiones maximales de Blowing-ups de campo de vectores, siempre existen.

(3.10) **Proposición:** Sea $N \in \mathbb{N}$, $(\overline{X}^n, O, s_n)_{o \leq n < N}$ Sucesión maximal de Blowing-ups de X. Entonces existe cono K, de con tacto N-2, en torno al eje-z tal que todas las órbitas en el interior de K, entran en K y dejan K después de un tiempo finito.

Demostración:

Como $\bar{X}^{N-1}(0) \neq 0$, podemos construir una vecindad en forma de cilindro, de 0 $\mathbb{R}^m x[0,\infty)$, de la forma,

$$C = \{(x,z) \in \mathbb{R}^m x\mathbb{R} \;/\; ||x|| \le R \;,\; z \in [0,\delta)\}$$

tal que todas las órbitas de $\bar{X}^{N-1}$ en el interior de C, entran en C y dejan C después de un tiempo finito.

Entonces,

$$\psi^{N-1}(C) = \{(z^{N-1}x,z) \;/\; ||x|| \le R \;,\; z \in [0,\delta)\}$$

$$= \{(x',z) \;/\; ||x'|| \le z^{N-1}R \;,\; z \in [0,\delta)\}$$

Sea K el germen en 0 de $\psi^{N-1}(C)$.
Luego el resultado es inmediato.

Consideremos ahora sucesiones infinitas de Blowing-ups.

Cabe indicar que esto establece que la sucesión maximal de Blowing-ups de un campo x, a lo largo del eje-z, es infinita.

(3.11) **Proposición:** Sea $(\bar{X}^n,0,s_n)_{0 \le n < N}$, sucesión maximal de Blowing-ups de X, a lo largo del eje-z.
Entonces $N = \infty$ si, y solamente si, el eje-z es formalmente invariante bajo X.

Demostración:

i) $\Longrightarrow$ Sea $j_\infty X(0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{S=s_0+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{S} a^S_{i,\alpha} x^\alpha z^{S-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} +$

$$+ \sum_{S=s_o+1} \sum_{|\alpha|=o}^{S} c^S_{i,\alpha} x^\alpha z^{S-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$j_\infty \overline{X}^n(0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{S=s_n+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=o}^{S} {}^n\bar{a}^S_{i,\alpha} x^\alpha z^{S-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{S=s_n+1}^{\infty} {}^n\bar{c}^S_{i,\alpha} x^\alpha z^{S-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

Debemos probar que $a^S_{i,0} = 0 \quad \forall\, S \geq s_o+1$ e $i \in \{1,\dots,m\}$

Con la fórmula 2. (sec.3.4) en encuentra que $\forall\, S \geq s_o+1$ e $i \in \{1,\dots,m\}$, ${}^1\bar{a}^{S-s_o-1}_{i,o} = a^S_{i,o}$ y por inducción sobre n, usando la misma fórmula tenemos que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$${}^n\bar{a}^{S-s_o-\dots-s_{n-1}-n}_{i,o} = a^S_{i,o}$$

Supongamos por contradicción, que $s^S_{i,o} = 0$. Entonces, ${}^1\bar{a}^{S-s_o-1}_{i,o} \neq 0$, así $s_1+1 \leq S-s_o-1$ (recordar la elección de s_1 en la definición 3.6) o $0 \leq S-s_o-s_1-2$; además por inducción encontramos,

$${}^n\bar{a}^{S-s_o-s_1-\dots-s_{n-1}-n}_{i,o} \neq 0$$

como siempre, como debiera ser, $0 \leq S-s_o-\dots-s_{n-1}n$.

Ciertamente, tarde o temprano $0 = S-s_o-\dots-s_{n-1}n$ para algún n.

Pero, $\overline{X}^n(0) = \sum_{i=1}^{m} {}^n\bar{a}^{o}_{i,o} \frac{\partial}{\partial x_i} \neq 0$, contradiciendo el hecho que $N = \infty$.

ii) $\Longleftarrow$ Usando la misma notación, tenemos que $a^S_{i,o} = 0$, $\forall\, S \geq s_o+1$ e

$i \in \{1,\dots,m\}$. La fórmula 2. de la secc. 3.4, da inmediatamente que,

$$a^{n-o}_{i,o} = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \quad e \quad i \in \{1,\dots,m\}$$

de donde, $\overline{X}^n(0) = 0 \;\forall\, n$.

Luego, de i) y ii), se tiene el resultado.

4. REDUCCION A UNA SINGULARIDAD CON 1-JET NO NULO.

El propósito de esta sección es probar el siguiente

TEOREMA: Sea $(\overline{X}^n, 0, s_n)_{0 \leq n < N}$ sucesión maximal de Blowing-ups de $X \in G^{m+1}$ a lo largo del eje-z $\{0\}^m x[0,\infty)$. Si X es no degenerado a lo largo del eje-z entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{X}^{N+n}$ tiene grado de degeneración cero $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

La demostración de este Teorema será consecuencia de las proposiciones (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) que se verán a continuación.

(4.1) **Proposición:** Sea $X \in G^{m+1}$ con grado de degeneración s. Si $\overline{X}^1$ tiene grado de degeneración $\geqslant s+1$, entonces

$$j_{s+1}X(0) = \sum_{|\alpha|=s+1} c^{s+1}_\alpha \, x^\alpha \frac{\partial}{\partial z}.$$

Demostración:

Como $j_s X(0) = 0$, solamente tenemos que ver $a^{s+1}_{i,\alpha}$ y c^{s+1}_α, $0 \leq |\alpha| \leq s+1$, $1 \leq i \leq m$.

De la fórmula 3. secc. 3.4, tenemos que para cada n con $1 \leq n \leq s$ y con $|\alpha| = n-1$, $0 = \overline{c}^n = c^{n+s-n-1}_\alpha = c^{s+1}_\alpha$.

Así, $c^{s+1}_\alpha = 0$ para cada α con $0 \leq |\alpha| \leq s$ (∇).

De la parte 1. de las fórmulas de la secc. 3.4, tenemos que para cada n con $1 \leq n \leq s+1$ con $|\alpha| = n$ y $1 \leq \alpha_i$

$$0 = \bar{a}^{-n}_{i,\alpha} = a^{n+s+1-n}_{i,\alpha} - c^{n+s+1-n}_{(\alpha_1,..,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},..,\alpha_m)}$$

$$= a^{s+1}_{i,\alpha} - c^{s+1}_{(\alpha_1,..,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},..,\alpha_m)}$$

Pero por (∇) anterior, estos c son cero.

En consecuencia, $c^{s+1}_{i,\alpha} = 0$ para cada α con $0 \leq |\alpha| \leq s+1$ y $1 \leq \alpha_i$.

De la misma forma, usando 2. de la secc. 3.4 se obtiene que todos los coeficientes en $j_{s+1}X(0)$ se anulan, excepto, posiblemente, c^{s+1}_{α} con $|\alpha| = s+1$.

(4.2) **Proposición**: Si $X \in G^{m+1}$ y si $\bar{X}^1$ tiene grado de degeneración s, entonces $\bar{X}^2$ tiene grado de degeneración $\leqslant s$.

Demostración:

Supongamos que $j_{s+1}\bar{X}^2(0) = 0$.
Por la proposición (4.1) anterior, esto implica que,

$$j_{s+1}\bar{X}^1(0) = \sum_{|\alpha|=s+1} \bar{c}^{s+1}_{\alpha} x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z}$$

Por nuestro supuesto, uno de los $\bar{c}^{s+1}_{\alpha}$, debe ser diferente de cero.

Esto es imposible por la observación en 3. secc. 3.4 . (Invariancia del hiperplano $z = 0$)

(4.3) **Proposición:** Si $X \in G^{m+1}$ tiene grado de degeneración s y $j_{s+1}\overline{X}^1(0) = 0$, entonces $\overline{X}^1$ tiene grado de degeneración $s+1$.

Demostración:

Debemos probar que $j_{s+2}\overline{X}^1(0) \neq 0$.

De la Proposición (4.1), y del hecho que $j_{s+1}\overline{X}^1(0) = 0$, tenemos que

$$j_{s+1}X(0) = \sum_{|\alpha|=s+1} c_\alpha^{s+1} x^\alpha \frac{\partial}{\partial z}$$

Como X tiene grado de degeneración s, existe α con $|\alpha| = s+1$ y $c_\alpha^{s+1} \neq 0$.

Usando 3. de la secc. 3.4, se observa que,

$$\overline{c}_\alpha^{s+2} = c_\alpha^{s+2+s-s-1} = c_\alpha^{s+1}$$

Así, $j_{s+2}\overline{X}^1(0) \neq 0$.

(4.4) **Proposición:** Sea $X \in G^{m+1}$. Supongamos existe un entero $s \geqslant 1$ y una sucesión infinita $(\overline{X}^n, 0, s)_{n \in IN}$ de Blowing-ups de X, en 0, en la dirección-z tal que $\forall\, n \in IN$, $\overline{X}^n$ tiene grado de degeneración s y en cada paso dividimos por z^s.

Denotando por
$$\begin{aligned} i : IR &\longrightarrow IR^{m+1} \\ z &\longmapsto (0,\ldots,0,z) \end{aligned}$$

entonces $j_\infty(j_{s-1}(X \circ i))(0) = 0$.

Demostración:

$j_{s-1}X(0,..,0,z)$ es formalmente determinado por

$$\left(\frac{\partial^M X}{\partial x^\beta \partial z^{M-|\beta|}}(0,..,0,z)\right)_{\substack{o \le M \le s-1 \\ o \le |\beta| \le M}}$$

Usando las notaciones de 3.4,

$$\frac{\partial^M X}{\partial x^\beta \partial z^{M-|\beta|}}(x_1,..,x_m,z) = \sum_{n=s+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=o}^{n} \left(a^n_{1,\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1}+...+a^n_{m,\alpha}\frac{\partial}{\partial x_m} + c^n_\alpha \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

$$\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)} x^{\alpha-\beta} \frac{(n-|\alpha|)!}{(n-|\alpha|-M+|\beta|)!} z^{n-|\alpha|-M+|\beta|}$$

Así,

$$\frac{\partial M_X}{\partial x^\beta \partial z^{M-|\beta|}}(0,..,0,z) = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(a^n_{1,\beta}\frac{\partial}{\partial x_1}+..+ a^n_{m,\beta}\frac{\partial}{\partial x_m} + c^n_\beta \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\beta\cancel{!}(n-|\beta|)!}{(n-M)!} z^{n-M}$$

Los términos de $j_\infty X(0)$ juegan su papel en $j_\infty(j_{s-1}(Xoi))(0)$, por tanto son,

$$\sum_{N=s+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=o}^{s-1} \left(a^N_{1,\beta}\frac{\partial}{\partial x_1}+...+ a^N_{m,\beta}\frac{\partial}{\partial x_m} + c^N_\beta \frac{\partial}{\partial z}\right) x^\beta z^{N-|\beta|}$$

Usando $\psi^n: IR^{m+1} \longrightarrow IR^{m+1}$

$$(x_1,..,x_m,z) \longmapsto (x_1 z^n,..,x_m z^n,z)$$

y la fórmula en Lema 3.7, entonces,

$$\overline{X}^n = \frac{1}{z^{sn}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{z^n}(X_i o\psi^n) - \frac{nx_i}{z}(X_z o\psi^n)\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + (X_z o\psi^n)\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

Tenemos para la componente $\frac{\partial}{\partial x_i}$,

$$\frac{1}{z^{sn}}\frac{1}{z^n}\sum_{N=s+1}^{\infty}\sum_{|\beta|=o}^{s-1} a_{i,\beta}^N x^\beta z^{n|\beta|} z^{N-|\beta|} - \frac{1}{z^{sn}}\frac{nx_i}{z}\sum_{N=s+1}^{\infty}\sum_{|\beta|=o}^{s-1} c_\beta^N x^\beta z^{n|\beta|} z^{N-|\beta|}$$

$$= \sum_{N=s+1}^{\infty}\sum_{|\beta|=o}^{s-1} a_{i,\beta}^N x^\beta z^{N-|\beta|-1-n(s+1-|\beta|)} - n\sum_{N=s+1}^{\infty}\sum_{|\beta|=o}^{s-1} c_\beta^N x^\beta z^{N-|\beta|-1-n(k-|\beta|)}$$

Y para la componente $\frac{\partial}{\partial z}$ tenemos

$$\sum_{N=s+1}^{\infty}\sum_{|\beta|=o}^{s-1} c_\beta^N x^\beta z^{N-|\beta|-n(s-|\beta|)}$$

Mirando en esta última expresión. Si esta construcción es posible para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $c_\beta^N = 0$, $\forall N \geq s+1$, $0 \leq |\beta| \leq s-1$.

Así la segunda sumatoria en la expresión para la componente $\frac{\partial}{\partial x_i}$, es nula. Por la misma razón recién mencionada, tenemos que

$$a_{i,\beta}^N = 0 \quad \forall N \geq s+1 \;,\quad 0 \leq i \leq m \;,\; 0 \leq |\beta| \leq s-1.$$

Esto establece que $j_\infty(j_{s-1}(Xoi))(0) = 0$

(4.6) **Proposición**: Sea $X \in G^{m+1}$, no degenerado a lo largo del eje-z. Sea $\overline{X}^n$ obtenido de X por n blowing-ups sucesivos en 0, en la dirección-z. Encontes $\overline{X}^n$ es no degenerado a lo largo del eje-z.

Demostración:

Sea $\psi^n : IR^{m+1} \longrightarrow IR^{m+1}$

$$(x_1,..,x_n,z) \longmapsto (x_1 z^n,...,x_m z^n,z)$$

La función que determina el blowing-up $\overline{X}^n$

Entonces para alguna función g_n de clase C^∞ tenemos que $\tilde{X}^n = g_n\overline{X}^n$ y $Xo\psi^n = \psi^n_* o\tilde{X}^n$.

Denotando por $i : [0,\infty) \longrightarrow IR^{m+1}$

$$z \longmapsto (0,..,0,z)$$

y suponiendo que $j_\infty(\overline{X}^n oi)(0) = 0$, entonces $j_\infty(\tilde{X}^n oi)(0) = 0$ y en consecuencia, $j_\infty(Xo\psi^n oi)(0) = 0$.

Pero, $\psi^n oi = i$. Esto implicaría que $j_\infty(Xoi)(0) = 0$ lo que contradice nuestra hipótesis.

(4.7) **Proposición:** Supongamos que $X \varepsilon G^{m+1}$ es no-degenerado a lo largo del eje-z.
Entonces es imposible que exista una sucesión infinita $(\overline{X}^n, 0,s_n)_{n\varepsilon IN}$ de Blowing-up de X en 0, en la dirección-z con $n\geq 1$; $s_n\geq 1$.

Demostración:

Supongamos que existe tal sucesión.
Entonces existen enteros $s\geq 1$ y $N\geq 1$ tal que $\forall$ $n\geq 0$, $\overline{X}^{N+n}$ tiene grado de degeneración s.
En consecuencia, de la proposición (4.4) $j_\infty(j_{s-1}(\overline{X}^N oi)(0) = 0$, lo cual contradice la Proposición (4.6).

Esta última Proposición completa la Demostración del TEOREMA, enunciado al comienzo de esta sección.

5. BIBLIOGRAFIA.

[Bo] BONCKAERT, Patrick: Smooth Invariant Curves of Singularities of vector Fields on IR^3.
Universiteit Antwerpen. Departement Wiskunde-Informatica - Wilrijk, 1984.

[Du] DUMORTIER, Freddy : Singularities of Vector Fields.
Monografías de Matemáticas. IMPA, RJ. 1978.

[Ta] TAKENS, Floris : Singularities of Vector Fields.
Publ. Math. IHES 43 (1974).