UNA NOTA SOBRE LA COMPACIDAD DE FUNCIONES COSENO DE OPERADORES

Dr. HERNAN R. HENRIQUEZ*

RESUMEN.

En este trabajo caracterizamos las funciones coseno fuertemente continua de operaciones, definidas en un espacio de Banach complejo y generadas por un operador lineal A tal que A^n es compacto, para algún $n \geq 1$.

INTRODUCCION.

Sea X un espacio de Banach y denotemos por $B(X)$ el álgebra de los operadores lineales acotados definidos y con valores en X . Una función coseno fuertemente continua de operadores en X es una función C

* Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Casilla 5669 - Correo 2, Santiago - Chile.

definida en $\mathbb{R}$ y con valores en $B(X)$ que es continua para la topología fuerte de operadores y verifica las condiciones

$$(a) \quad C(0) = I,$$

$$(b) \quad C(t+s) + C(t-s) = 2 C(t) C(s), \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}.$$

El generador infinitesimal de la función coseno fuertemente continua C es el operador A definido mediante la expresión:

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{(C(t)x - x)}{t^2} \quad (1)$$

en aquellos vectores $x \in X$ para los cuales el límite existe.

De manera similar a lo que ocurre en la Teoría de semigrupo de operadores, el operador A es cerrado y tiene dominio $D(A)$ denso en X . Además, existen constantes $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tal que:

$$\|C(t)\| \leq M \exp(\omega t), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

y si λ es un número complejo con $R(\lambda) > \omega$ entonces λ^2 pertenece al conjunto resolvente de A .

A cada función coseno C se le asocia una función seno $S : \mathbb{R} \rightarrow B(X)$ definida por la expresión:

$$S(t)x = \int_0^t C(s)x \, ds. \quad (3)$$

para todo $x \in X$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

Si A es el generador infinitesimal de una función coseno C , entonces A es también el generador infinitesimal de un semigrupo analítico que denotaremos por T . Fattorini ([2]) ha mostrado que:

$$T(t)x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) C(s)x \, ds \quad (4)$$

para todo $t > 0$ y todo $x \in X$. Se deduce de esta fórmula que si la función C verifica la desigualdad (2) entonces T es un semigrupo de tipo menor e igual a ω^2 . Además, Nelson y Triggiani ([6]) han demostrado que para cada $t > 0$ la función $s \rightarrow C(s) T(t)$ es analítica.

Las funciones coseno de operadores han sido consideradas recientemente por varios autores en relación con el problema de Cauchy abstracto de segundo orden (ver [8] para un resumen). En [4] hemos caracterizado las funciones coseno para las cuales $C(t) - I$ es un operador compacto, para todo $t \geq 0$. Específicamente, obtuvimos el siguiente resultado:

Teorema: Sea C una función coseno fuertemente continua de operadores. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) El operador $C(t) - I$ es compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
- b) El operador $S(t) - tI$ es compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
- c) El generador infinitesimal A es compacto.
- d) El operador $T(t) - I$ es compacto para todo $t \geq 0$.

El objetivo de este trabajo es extender estos resultados y caracterizar aquellas funciones coseno C para las cuales $(C(t) - I)^n$ es un operador compacto, para algún entero positivo n y todo $t \in \mathbb{R}$.

En nuestro desarrollo supondremos que X es un espacio de Banach complejo y si B es un operador lineal (posiblemente no acotado) en X denotaremos por $\sigma(B)$, $\sigma_p(B)$ y $\rho(B)$ los conjuntos espectro, espectro puntual y resolvente de B , respectivamente.

Además, si $\lambda \in \rho(B)$ entonces denotaremos por $R(\lambda, B)$ al operador resolvente $(\lambda I - B)^{-1}$.

2. RESULTADOS.

A través de toda esta sección denotaremos por C a una función coseno fuertemente continua de operadores con generador infinitesimal A y mantendremos todas las notaciones introducidas en la sección anterior. En particular, supondremos que C verifica la desigualdad (2).

Proposición 1. Si $\lambda = t$ es un punto aislado del espectro de $S(t)$, para todo $t > 0$, entonces $0 \in \sigma(A)$.

Demostración:

a) Sea λ un número complejo no nulo tal que $\lambda^2 \in \rho(A)$. Entonces

$$\lambda^2 R(\lambda^2, A) \left(\frac{1}{\lambda} \sinh(\lambda t) - S(t) \right) x = \int_0^t (\cosh \lambda(t-s) - 1) C(s)x \, ds \quad (5)$$

para todo $x \in X$ y todo $t \geq 0$.

En efecto, ha sido establecido en [5] que $\lambda R(\lambda^2, A) (\cosh(\lambda t) - C(t))x = \int_0^t \sinh \lambda(t-s) C(s)x \, ds$ e integrando esta última expresión entre $[0, t]$ se obtiene (5).

b) Denotemos por $S(t, \lambda)$ al operador definido por

$$S(t, \lambda)x = \int_0^t (\cosh \lambda(t-s) - 1) C(s)x \, ds$$

e introduzcamos los operadores lineales $S_\eta(t)$ definidos por

$$S_\eta(t)x = \int_0^t (t-s)^{2\eta} C(s)x \, ds.$$

Es inmediato que:

$$S(t, \lambda) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} S_\eta(t) \quad (6)$$

donde la serie converge en $B(X)$, uniformemente para λ y t en conjuntos acotados.

- c) Supongamos que $0 \in \rho(A)$ y sea $t > 0$. Como $\mu_0 = t$ es un punto aislado del espectro del operador $S(t)$, entonces existe $r > 0$ tal que $\lambda^2 \in \rho(A)$ y $\mu = \sinh(\lambda t) / \lambda$ pertenece al conjunto resolvente de $S(t)$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\lambda| \leq r$.

Entonces de (5) y (6) se deduce que:

$$R(\lambda^2, A) = (\mu - S(t))^{-1} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{2n-2}}{(2n)!} S_n(t) \quad (7)$$

Considerando que el operador resolvente $(\mu - S(t))^{-1}$ tiene una singularidad aislada en $\mu_0 = t$, resulta utilizando la expansión de Laurent (Taylor [7]) que:

$$(\mu - S(t))^{-1} = \sum_{n \geq 0} (\mu - t)^n A_n(t) + \sum_{n \geq 1} (\mu - t)^{-n} B_n(t), \quad (8)$$

donde los coeficientes $A_n(t)$ y $B_n(t)$ son operadores lineales acotados en $B(X)$ que conmutan con los operadores $C(s)$ y que verifican la relación:

$$B_{n+1}(t) = (S(t) - t)^n B_1(t), \quad n \geq 1$$

Como $\lambda \in \rho(A)$ entonces la función $R(\lambda^2, A)$ es analítica en una vecindad de 0. Además como la función $(\mu - t)^{-1}$ tiene un polo de orden 2 en 0 y, en una vecindad de cero, puede representarse en la forma

$$(\mu - t)^{-1} = \frac{6}{t^3 \lambda^2} + f(\lambda). \quad (9)$$

donde f es una función analítica, reemplazando (8) y (9) en (7) obtenemos que:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{6^n}{t^{3n}} \frac{B_n(t)}{(2n)!} S_n(t) = 0$$

de donde, utilizando la conmutatividad de los operadores $B_n(t)$ y $S_n(t)$ se deduce:

$$\frac{3}{t} S_1(t) B_1(t) = - \sum_{n \geq 2} \frac{6^n}{t^{3n} (2n)!} S_n(t) B_n(t) \quad (10)$$

El operador $B_1(t)$ es una proyección no trivial ([7]), luego existe un vector $x \in X$, $\|x\| = 1$, tal que $B_1(t)x = x$

Sean M_1 y ε constantes positivas tal que $\|C(s)\| \leq M$, para todo $s \in [0,1]$ y $\varepsilon(1 + \exp 6(1 + M_1)) < 1$

Por la continuidad de la función coseno existe $0 < t \leq 1$ tal que $\|C(s)x - x\| < \varepsilon$, para todo $s \in [0,t]$.

Como

$$x = \frac{3}{t} \int_0^t (t-s)^2 (x - C(s)x) ds + \frac{3}{t} S_1(t) B_1(t)x$$

entonces de (10) se deduce que:

$$\|x\| \leq \varepsilon + \sum_{n \geq 2} \frac{6^n}{t^{3n} (2n)!} \|S_n(t)\| \|B_n(t)x\|$$

y evaluando las normas indicadas en el segundo miembro resulta que:

$$\|x\| \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{n \geq 2} \frac{6^n}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} (1 + M_1)^n$$

< 1 .

por la elección de ε y M_1 .

Proposición 2. Sea C una familia coseno fuertemente continua de operadores. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(C(t) - I)^n$ es un operador compacto para todo $t \geq 0$, entonces existe $a > 0$ tal que $C(t)$ es un operador invertible para todo $t \in [0, a]$.

Demostración:

Si $C(t)$ no es invertible entonces $0 \in \sigma(C(t))$. Por la compactidad de $(C(t) - I)^n$ se deduce que $0 \in \sigma_p(C(t))$ y de Nagy [5], concluimos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda^2 \in \sigma_p(A)$ tal que $\cosh(\lambda t) = 0$.

Supongamos que existe una sucesión $(t_k)_k$ decreciente, $0 < t_k \leq 2^{-k}$ para todo $k \geq 1$, tal que $C(t_k)$ no es invertible y sea $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k^2 \in \sigma_p(A)$, tal que $\cosh(\lambda_k t_k) = 0$.

Sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de raíces complejas de la ecuación $\cosh(z) = 0$. Como $\lambda_k t_k \in \mathcal{Q}$ y $0 \notin \overline{\mathcal{Q}}$, se deduce que el conjunto $\{\lambda_k : k \geq 1\}$ es infinito.

Por otra parte, también de los resultados de Nagy sabemos que $\cosh(\lambda_k t) \in \sigma_p(C(t))$, para $t \geq 0$ y todo $k \geq 1$. Por lo tanto, el conjunto $\{\cosh(\lambda_k t) : k \geq 1\}$ es finito o debe tener un punto de acumulación en $-\mu = 1$. No es difícil verificar que en ambos casos se contradice la observación anterior.

Sea A un operador lineal cerrado y λ un número complejo tal que $\lambda/i \in \rho(A)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Definimos el operador lineal

$$F_n(\lambda) = I + \lambda \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k} \binom{n}{k} R\left(\frac{\lambda}{k}, A\right)$$

Teorema 1. Sea C una familia coseno fuertemente continua de operadores con generador infinitesimal A y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) El operador lineal A es acotado y A^n es compacto,
- b) Los operadores $(C(t) - I)^n$ son compactos para todo $t \geq 0$,
- c) Los operadores $(S(t) - tI)^n$ son compactos, para todo $t \geq 0$,
- d) Los operadores $(T(t) - I)^n$ son compactos, para todo $t \geq 0$,
- e) Existe $\lambda > n \omega^2$ tal que $F_n(\lambda)$ es un operador compacto,
- f) Los operadores $F_n(\lambda)$ son compactos para todo $\lambda > n \omega^2$.

Demostración:

- 1) La equivalencia de a), d), e) y f) ha sido demostrada en [3].
- 2) Demostraremos que a) $\Rightarrow$ b). En este caso la función coseno C es uniformemente continua y puede representarse por la serie:

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$$

de donde resulta que $(C(t) - I)^n$ es compacto.

- 3) Demostraremos que b) $\Rightarrow$ a). Sea $u > 0$. Entonces la función $t \rightarrow (C(t) - I)^n T(u)$ es analítica y

$$A^n T(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2(C(t) - I)^n}{t^2} \right) T(u)$$

en la topología uniforme de operadores. Se deduce de esto que $A^n T(u)$ es un operador compacto y por consiguiente basta mostrar que $T(u)$ es un operador invertible.

Si $T(u)$ no fuese invertible entonces $0 \in \sigma(T(u))$ y se presen

tan dos posibilidades: que 0 sea un punto de acumulación o un punto aislado del espectro. En la primera situación existiría una sucesión $(\mu_n)_n$ en $\sigma(T(u))$ tal que $\mu_n \neq 0$ y $\mu_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Podemos suponer que $|\mu_n| < 1$.

Como T es un semigrupo analítico y por tanto uniformemente continuo en $(0, \infty)$, se concluye de las propiedades espectrales de semigrupos [1] que $\mu_n \in \exp(u \sigma(A))$. Sea $\lambda_n \in \sigma(A)$ tal que $\mu_n = \exp(u \lambda_n)$. Entonces $([5]) \cosh(\lambda_n^{\frac{1}{2}} t)$ pertenece al espectro de $C(t)$, para todo $t \geq 0$.

Por la compacidad del operador $(C(t) - I)^n$ se deduce que el conjunto $\{\cosh(\lambda_n^{\frac{1}{2}} t) : n \geq 1\}$ es finito o tiene un punto de acumulación de $z = 1$, para todo $t \geq 0$. La primera posibilidad no puede ocurrir por cuanto $\mu_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Para comprobar que la segunda alternativa tampoco es posible, considérese $r_n = \operatorname{Re}(\lambda_n^{\frac{1}{2}})$. Si $\cosh(\lambda_n^{\frac{1}{2}} t) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, entonces la distancia de $r_n t$ al conjunto $2\pi\mathbb{Z}$ converge a cero, para todo $t > 0$, lo cual es absurdo.

Por consiguiente $\mu_0 = 0$ debe ser un punto aislado del espectro de $T(u)$ y $\sigma_0 = \{0\}$ es un conjunto espectral de $T(u)$. Sea P la proyección espectral asociada a $T(u)$ y σ_0 . Denotemos por X_0 y X_1 el espacio imagen de P y de $I - P$, respectivamente. Entonces X_i , $i = 0, 1$, son subespacios suplementarios e invariantes para todo operador lineal que conmute con $T(u)$. Sea A_i , $i = 0, 1$, la restricción del operador A al subespacio X_i . Entonces A_i es generador infinitesimal de una familia coseno C_i y de semigrupo T_i , que son las restricciones de C y de T al subespacio X_i , $i = 0, 1$, respectivamente.

Por la construcción realizada se deduce que $\sigma(T_0(u)) = \{0\}$ y que $0 \notin \sigma(T_1(u))$, por lo cual el operador $T_1(u)$ es invertible.

Si el subespacio X_0 fuese de dimensión finita, entonces A_0 sería un operador acotado y $T_0(u)$ sería invertible. Por el contrario,

si suponemos que X_0 no tiene dimensión finita, entonces $1 \in \sigma(C_0(t))$ ya que $(C_0(t) - I)^\eta$ es compacto. Tanto en el caso en que 1 es un punto aislado del espectro de $C_0(t)$ ([4] proposición 2) como en el caso en que no lo sea, se deduce que $\sigma(A_0) \neq \emptyset$ y como $\exp(u \sigma(A_0)) \subseteq \sigma(T_0(u))$ este último conjunto debe ser distinto de $\{0\}$, lo cual contradice nuestra construcción.

4) La demostración de la afirmación $a) \Rightarrow c)$ es análoga a la realizada en el paso 2).

5) Demostremos finalmente que $c) \Rightarrow a)$.

Sea $u > 0$. Entonces la función $t \rightarrow (S(t) - tI)^\eta T(u)$ es analítica. Además, de la definición de $S(t)$ se deduce que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} - I)^\eta T(u) = (C(t) - I)^\eta T(u)$$

en la topología de la convergencia uniforme de operadores. Luego los operadores $(C(t) - I)^\eta T(u)$ son compactos, para todo $t \geq 0$. Por lo tanto tal como en el paso 3, el problema se reduce a demostrar que el operador $T(u)$ es invertible. Para este objeto repetimos la demostración efectuada en 3), cambiando sólo el argumento final, cuando suponemos que el subespacio X_0 no tiene dimensión finita. En este caso por la compacidad del operador $(S_0(t) - tI)^\eta$ se deduce que $t \in \sigma(S_0(t))$. Si t no es un punto aislado del espectro de $S_0(t)$, para algún $t > 0$, entonces ([4], proposición 1) se deduce que $\sigma(A_0) \neq \emptyset$.

Por el contrario, si t es un punto aislado del espectro de $S_0(t)$, para todo $t > 0$, entonces por la proposición 1 también se deduce que $\sigma(A_0) \neq \emptyset$. Como $\sigma(T_0(u)) \supseteq \exp(u \sigma(A_0))$ se deduce que $\sigma(T_0(u)) \neq \{0\}$, lo que contradice la construcción realizada.

REFERENCIAS.

- [1] E. B. Davies, One-Parameter Semigroups. Academic Press, New York, 1980.
- [2] H. O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces, I. J. Diff. Eqs., 5, (1968), 72-105.
- [3] H. Henríquez, Una propiedad de compacidad para familias coseno de operadores. Atas do 14º Colóquio Brasileiro de Matemáticas, Vol. I. pág. 71-80.
- [4] H. Henríquez, Cosine operator families such that $C(t) - I$ is compact, for all $t > 0$. Indian J. pure and appl. Math, 16 (2), (1985), 143-152.
- [5] B. Nagy, On cosine operator functions in Banach spaces, Acta. Sci. Math Sz., 35, (1974), 281-289.
- [6] S. Nelson; B. Triggiani, Analytic Properties of cosine operators, Proc. Am. Math. Soc., 74(1), (1979), 101-104.
- [7] A. E. Taylor, Introduction to Functional Analysis. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [8] C. C. Travis; G. F. Webb, Proc. International Symposium on Non-Linear Equations in Abstract Spaces. University of Texas (1977) pág. 331-361.