DOI: 10.22199/S07160917.1986.0012.00003

REVISTA PROYECCIONES N° 12:17-56
Diciembre 1986 - ISSN 0716-0917
Jornada Matemáticas, Agosto 1986.

SOBRE LA CONSTRUCCION DE SISTEMAS ESTOCASTICOS DE PARTICULAS Y PROBLEMAS DE MARTINGALAS

Dr. Rolando Rebolledo B. *

RESUMEN

El texto que sigue tiene por objeto entregar una visión elemental sobre un tema que atrae hoy la atención de un gran número de investigadores. Es ciertamente una visión muy incompleta, porque la producción en el área lleva ya varios volúmenes; solicito la indulgencia del lector por las omisiones en que incurra, me doy por satisfecho si siembro en él el deseo de estudiar el tema en algún buen libro.

1. **PRELIMINARES**: Procesos Markovianos de Salto, Resultados Esenciales.

* Académico de la Facultad de Matemáticas - Universidad Católica de Chile.

1. Para explicar los modelos más usuales de sistemas estocásticos es necesario que recurramos a algunos conceptos básicos de la Teoría de Procesos de Markov, en particular los referidos a los procesos de salto.

Sea E un espacio numerable dotado de la topología discreta y sea ξ la respectiva tribu Boreliana.

Sea $Q: E\times E \to \mathbb{R}_+$, una matriz Markoviana, vale decir $Q(x,y) \geq 0$ y $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$ para todo $x\in E$.

Consideremos por otra parte una función $q:E \to [0,1]$ tal que $\sum_{x\in E} q(x) = 1$ que permite definir una probabilidad (denotada también q) sobre (E,ξ) en la forma.

(1.1) $q(A) := \sum_{x\in A} q(x)$

Dado ahora un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, una <u>cadena de Markov</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ahí definido, con <u>estados en E</u>, <u>ley inicial q</u> y <u>probabilidad de transición Q</u>, es un proceso estocástico con tiempo discreto que verifica.

(1.2) $\mathbb{P}(X_o = x) = q(x) \qquad (x\in E)$

(1.3) $$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_o = x_o, \ldots\ldots, X_n = x_n) =$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$
$$= Q(x_n, x_{n+1})$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, todo $(x_{o,\ldots,} x_{n+1}) \in E^{n+2}$

Una forma equivalente de enunciar la condición (1.3) es

(1.4) $\mathbb{P}(X_o = x_{o,\ldots,} X_n = x_n) = q(x_o)Q(x_o,x_1)Q(x_1,x_2)\ldots Q(x_{n-1},x_n)$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

Llamemos $\mathcal{F}_n$ a la tribu $\sigma(X_o,\ldots,X_n)$ generada por $X_o,\ldots,X_n$ $(n\in\mathbb{N})$. La condición (1.3) nos dice que :

$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, vale decir, el "estado futuro" X_{n+1}, condicionalmente al "presente" X_n, es independiente del "pasado" $\mathcal{F}_n$. $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia creciente de tribus tal que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}(n\in\mathbb{N})$, es un ejemplo de <u>filtración</u> o <u>historia</u> sobre el espacio $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$..

Introduzcamos la notación Qf para representar la función

(1.5) $Qf(x):=\sum_{y\in E} Q(x,y)f(y)$ donde $f:E\to R$ es positiva o bien integrable con respecto a cada $Q(x,.)$ sobre E.

Calculemos la esperanza condicional de $f(X_{n+1})$ dada $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)&=\sum_{y\in E}\mathbb{P}(X_{n+1}=y\,|\mathcal{F}_n)\;f(y)\\&=\sum_{y\in E}\mathbb{P}(X_{n+1}=y|X_n)\;f(y)\\&=\sum_{y\in E}Q(X_n,y)\;f(y)\\&=Qf(X_n)\end{aligned}$$

Obtenemos así

(1.6) $\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(f(X_{n+1})|X_n)=Qf(X_n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$

que es otra forma de enunciar (1.3).

Designemos por $Q^{\otimes n}$ el producto, n veces repetido, de la matriz Q por sí misma; vale decir:

(1.7) $Q^{\otimes n}(x,y)=\sum_{x_1\ldots,x_{n-1}\in E} Q(x,x_1)Q(x_1,x_2)\ldots Q(x_{n-1},y)$

Hagamos ahora algunos cálculos de medias:

$$\mathbb{E}(f(X_o)) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}(X_o=x)\ f(x)$$
$$= \sum_{x\in E} q(x)f(x)$$

$$\mathbb{P}(X_n=x_n \mid X_o=x_o) = \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E} Q(x_o,x_1)Q(x_1,x_2)\ldots Q(x_{n-1},y_n)$$
$$= Q^{\otimes n}(x_o,\ x_n)$$

$$\mathbb{E}(f(X_n)\mid X_o=x) = \sum_{x_n\in E} \mathbb{P}(X_n=x_n \mid X_o=x)f(x_n)$$

(1.8) $\mathbb{E}(f(X_n)\mid X_o=x) = Q^{\otimes n} f(x)$ y finalmente

(1.9) $\mathbb{E}(f(X_n)) = \sum_{x\in E} q(x)\ Q^{\otimes n}\ f(x)$

Hasta aquí hemos supuesto la existencia de $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ y (X_n). <u>La cadena de Markov canónica asociada a</u> (Q,q) se construye de la siguiente manera:

(1.10) Se considera $\Omega := E^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} := \xi^{\otimes\mathbb{N}}$

se define, sobre $(\Omega,\mathcal{F})$, el proceso (X_n) como la suce - sión de proyecciones canónicas:

(1.11) $X_n(\omega) = \omega_n$ para todo $\omega = (\omega_m;\ m\in\mathbb{N}).\in\Omega$

Con estos objetos, y dado un par (Q,q) como aquí arriba, se determina una única probabilidad $\mathbb{P}_{(Q,q)}$ sobre $(\Omega,\mathcal{F})$ tal que (X_n) sea una cadena de Markov de transición Q y ley inicial q. Es una consecuencia de los teoremas de Kolmogorov-Ionescu-Tulcea. En efecto, la probabilidad $\mathbb{P}_{(Q,q)}$ queda determinada por su valor sobre los conjuntos de la forma $\{X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n\}$. Sobre dichos conjuntos, se define

(1.12) $\mathbb{P}_{(Q,q)}(X_o=x_o,\ X_1=x_1,\ldots,\ X_n=x_n) =$
$$= q(x_o)Q(x_o,x_1)\ldots Q(x_{n-1},x_n).$$

Convendremos en suprimir la referencia a Q en la notación $\mathbb{P}_{(Q,q)}$ (cuando no sea necesaria), indicando sólo aquella relativa a q, que es el parámetro que con mayor frecuencia se cambia. En particular, llamaremos $\mathbb{P}_x$ la probabilidad que corresponde a $q=\varepsilon_x$ - la medida de Dirac en x- donde $x\in E$. $\mathbb{P}_x$ corresponde a la "probabilidad partiendo de x", así:

$$\mathbb{P}_x(X_o=x) = 1$$

Con estas notaciones, la propiedad de Markov se escribe ahora:

$$(1.13)\quad \mathbb{E}_x(f(X_{n+1})\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n}(f(X_{n+1}))$$

donde

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_o,\ldots,X_n) \quad (n\in\mathbb{N}),\ f \text{ es acotada medible.}$$

El sistema $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), (X_n), (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ constituye una <u>clase de Markov</u>. Si se conoce ésta, se conoce en realidad cualquier cadena de transición Q y ley inicial q arbitraria ya que $\mathbb{P}_q$ se calcula mediante la relación:

$$\mathbb{P}_q(A) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}_q(A\,|\,X_o=x)\mathbb{P}_q(X_o=x)$$

$$(1.14)\quad \mathbb{P}_q(A) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}_x(A)q(x) \qquad (A\in\mathcal{F})$$

Puesto que $\mathbb{P}_q(A\,|\,X_o=x) = \mathbb{P}_x(A)$, $x\in E$, $A\in\mathcal{F}$.

2. DEFINICIONES.

(2.1) Dado un espacio medible $(\Omega,\mathcal{F})$, una <u>filtración o historia</u> $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ - donde $\mathbb{I}=\mathbb{R}_+$ ó $\mathbb{N}$- es una familia de tribus sobre Ω tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ si $s\le t$, $s,t\in\mathbb{I}$ Designamos por $\mathcal{F}_\infty$ la tribu generada por la reunión de todas las $\mathcal{F}_t (t\in\mathbb{I})$, así

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\in I} \mathcal{F}_t) = \bigvee_{t\in I} \mathcal{F}_t \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}.$$

(2.2) Un proceso estocástico con estados en un espacio medible (E,ξ) es una aplicación $X: I \times \Omega \to E$ tal que para todo $t \in I$, $X(t,.)$ sea F/ξ - medible. (Habitualmente $X(t,.)$ se designa por X_t y se suprime la referencia a ω).

(2.3) El proceso X es adaptado a la filtración $\mathbb{F}$ si para cada $t\in I$, X_t es $\mathcal{F}_t|\xi$-medible.

(2.4) Dado un proceso X cualquiera, su filtración o historia natural $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}^X_t)_{t\in I}$ es aquélla definida por $\mathcal{F}^X_t = \sigma(X_s; s\leq t)$ $(t\in I)$

Cada proceso X es así adaptado a su filtración natural $\mathbb{F}^X$.

(2.5) Un tiempo opcional, o tiempo de parada de una filtración $\mathbb{F}$ es una variable aleatoria $T: \Omega \to [o, \infty]$ tal que para cada $t\in I$, $\{T\leq t\} \in \mathcal{F}_t$. En el caso $I= \mathbb{N}$, basta tener $\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$

(2.6) La definición de una cadena de Markov del número 1 podemos extenderla ahora al caso de un espacio medible cualquiera (E,ξ) en la forma siguiente:

Nos damos una medida de probabilidad q sobre ξ y un núcleo de transición Markoviano Q sobre $E\times\xi$, vale decir, $Q: E\times\xi \to \mathbb{R}_+$ es tal que:

a) $Q(x,.)$ es una probabilidad sobre ξ, para todo $x\in E$;

b) $Q(.,A)$ es una función medible para todo $A\in\xi$.

Dada una función $f: E\to\mathbb{R}$ medible y acotada (o positiva) las notaciones $q(f)$, $Qf(x)$ ó $Q(x,f)$ significan

$$q(f) := \int_E f(x)\ q(dx)$$

$$Qf(x) = Q(x,f) := \int_E f(y)\ Q(x,dy) \qquad (x \in E)$$

Así entonces, una cadena de Markov con respecto a $\mathbb{F}$, estados en E, de transición Q y ley inicial q es un proceso $X=(X_n)$ adaptado a $\mathbb{F}$ que satisface - con respecto a una probabilidad $\mathbb{P}$ sobre (Ω,F) - las relaciones:

$$\mathbb{P}\ (X_o \in A) = q(A) \qquad (A \in \xi)$$

$$\mathbb{E}\ (f(X_{n+1})\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(f(X_{n+1})\,|\,X_n) = Qf(X_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

f medible y acotada de E en $\mathbb{R}$.

(2.7) La cadena de Markov canónica asociada a (Q,q) se construye sobre $\Omega = E^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \xi^{\otimes \mathbb{N}}$ como en el N° 1, mediante el Teorema de Ionescu-Tulcea. Del mismo modo se define la clase de Markov $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$.

Sobre el espacio antes señalado, definimos el operador de traslación θ:

$$\theta(\omega) := (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{para todo } \omega = (\omega_n) \in \Omega\ .$$

Vale decir $X_n \circ \theta = X_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Su p-ésimo iterado se denota por θ_p: $X_n \circ \theta_p = X_{n+p}$. Para una variable aleatoria T con valores en $\mathbb{N}$, θ_T se define por:

$$X_n \circ \theta_T(\omega) = X_{n+T(\omega)}(\omega)$$

Se tiene así una importante propiedad de las cadenas de Markov que el lector interesado puede consultar por ejemplo en DACUNHA-CASTELLE y DUFLO [2].

3. **TEOREMA** (Propiedad de Markov fuerte).

Sea T un tiempo de parada de $\mathbb{F}$ e Y una variable aleatoria medible acotada sobre $(\Omega,\mathcal{F})$.

Entonces, para toda ley inicial q se tiene :

$$\mathbb{E}_q(Y o \theta_T \, I_{\{T<\infty\}} \mid F_T) = I_{\{T<\infty\}} \, \mathbb{E}_{X_T}(Y)$$

4. **EJEMPLOS:**

(4.1.) Sea F una función de distribución sobre $\mathbb{R}^d$; $(\xi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes de ley F definidas sobre un espacio $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Definimos:

$$X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \qquad (n\geq 1)$$

Entonces (X_n) es una cadena de Markov de transición Q definida por $Q(x,A)=F(A-x) = \int_{A-x} dF(y)$, donde $x\in\mathbb{R}^d$ y A es un boreliano de $\mathbb{R}^d$. La ley inicial que la fijamos entonces definiendo el punto inicial X_o, por ejemplo, como $X_o=x\,(x\in\mathbb{R}^d)$.

Esta cadena se conoce con el nombre de <u>paseo aleatorio</u>.

(4.2) Tomemos $E=\mathbb{N}$ y definimos

$$\begin{cases} Q(n,n+1) = \pi_n \\ Q(n,o) = 1-\pi_n \end{cases}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$ donde $o<\pi_n<1$.

5. **DEFINICION.**

Ahora estamos en condiciones de definir un proceso Markoviano de Saltos (P.M.S.).

Sea E un espacio localmente compacto numerable al infinito (I.c.n.) y ξ su tribu Boreliana.

Consideramos un núcleo Markoviano Q sobre (E,ξ) y una función medible $\gamma : E \to \mathbb{R}_+$.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Un proceso Markoviano de Saltos sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y con estados en E queda caracterizado por una sucesión $((X_n, \tau_n);\ n \in \mathbb{N})$ de variables aleatorias donde.

(5.1.) (X_n) es una cadena de Markov con estados en E y transición Q;

(5.2.) (τ_n) es una sucesión de variables aleatorias positivas que son dos a dos independientes, condicionalmente a $(\xi_n) n \in \mathbb{N})$, y verifican

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq t \mid (X_m)_{n \in \mathbb{N}}) = 1 - e^{-\lambda(X_n)t} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_+ .$$

(ley exponencial condicional)

Se define entonces

$$\begin{cases} T_o(\omega) = 0 \\ T_{n+1}(\omega) = T_n(\omega) + \tau_n(\omega) \qquad (n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega) \end{cases}$$

La sucesión (T_n) es entonces creciente, sea

$$T_\infty = \text{lím.}_n \uparrow T_n$$

Definimos un nuevo proceso:

$$\eta_t(\omega) := \{ X_{n_\dagger}(\omega) \text{ si } T_n(\omega) \ t \leq T_{n+1}(\omega) \text{ si } T_\infty(\ ) \leq t$$

$$\eta_t(\omega) := \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } T_n(\omega) \leq t \leq T_{n+1}(\omega) \\ \dagger & \text{si } T_\infty(\omega) \leq t. \end{cases}$$

$(\omega\varepsilon\Omega, t\varepsilon\mathbb{R})$ donde $\dagger$ es el llamado "punto cementerio" que no pertenece a E y lo añadimos a él para formar un espacio de estados $\bar{E}= E\cup\{\dagger\}$ que dé coherencia a la definición de η.

Habitualmente no se distingue entre el proceso η y la sucesión (X_n, τ_n) llamando a cualquiera de ellos <u>Proceso Markoviano de Saltos de parámetros (Q,λ).</u>

6. Los modelos estocásticos de sistemas de partículas estudian la interacción de varios P.M.S. en que los parámetros se han escogido de manera de reflejar ciertos fenónemos físicos o químicos. En el párrafo siguiente introduciremos cuatro ejemplos fundamentales de sistemas estocásticos de partículas. Antes haremos acopio de un par de conceptos más: el primero de ellos, el de <u>medida invariante</u>.

Si q es una medida de probabilidad sobre (E,ξ), la expresión

(6.1) $qQ(A): = \int_E q(dx)\ Q(x,A)$, $(A\varepsilon\xi)$, define otra probabilidad sobre(E,ξ).

Decimos que q <u>es invariante bajo Q</u> si $qQ = q$.

La relación anterior implica que $qQ^{\otimes n}= q$ para todo $n\varepsilon\ \mathbb{N}$, donde $Q^{\otimes n}$ es el núcleo producto que se obtiene por generalización inmediata de (1.7):

(6.2) $Q^{\otimes n}(x,A)= \int_E \cdots \int_E Q(x,dx\ )Q(x_1,dx_2)\cdots Q(x_n,A)\ ((x,A)\varepsilon E\times\xi)$.

Esto significa que si $(X_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}}$ cadena de Markov, tiene como ley inicial la probabilidad invariante q, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \varepsilon A) &= qQ^{\text{(n)}}(A) \qquad \text{(Ver (1.9))} \\ &= q(A) \\ &= \mathbb{P}(X_o \varepsilon A) \end{aligned}$$

para todo $A\varepsilon\xi$, todo $n\varepsilon\mathbb{N}$. Vale decir, el proceso permanece "estable"; el concepto de medida invariante está asociado a la idea de equilibrio en Física.

7. El segundo concepto que queremos recordar antes de pasar a los ejemplos de sistemas de partículas es el de <u>re - currencia</u> de una cadena de Markov.

Si (X_n) es una cadena de Markov adaptada a una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}}$, las variables aleatorias:

(7.1) $$\begin{cases} T_A^1 : = \inf \{n\varepsilon\mathbb{N} \;/\; X_n \; \varepsilon A\} \\ T_A^m : = \inf \{n > T_A^{m-1} : \; X_n \; \varepsilon A\} \qquad (m \geq 1) \quad (A\varepsilon\xi) \end{cases}$$

son tiempos de parada de $\mathbb{F}$, que representan los sucesivos instantes de retorno de la cadena al conjunto de estados A.

Convengamos de escribir T_x^m por $T_{\{x\}}^m$.

Decimos que un $x\varepsilon E$ es recurrente si $\mathbb{P}_x(T_x^1 < \infty) = 1$. En caso contrario, se dice que x es <u>transiente</u>.

Introduciendo el núcleo potencial

(7.2) $U(x,A) = \sum_n Q \quad (x,A)$, $((x,A)\; E\times\xi)$ y conviniendo de llamar $U(x,y)$ a $U(x,\{y\}(x,y\varepsilon E)$, se tiene que si un estado x es recurrente entonces $U(x,x) = \infty$ y si es transiente, $U(x,x) < \infty$.

Diremos que un estado $x \in E$ es <u>recurrente positivo</u> si $\mathbb{E}_x(T_x^1) < \infty$ que es, obviamente, una condición más fuerte que la recurrencia. Si $\mathbb{E}_x(T_x^1 = \infty$, se dice que x es <u>recurrente nulo</u>.

Es importante notar que en la Teoría de Cadenas de Markov se prueba que si x es un estado recurrente, entonces $\mathbb{P}_x(T_x^m < \infty)$ es igual a 1 para cada $m \in \mathbb{N}$, vale decir, la cadena vuelve un número infinito de veces al punto x. No es extraño que se tenga entonces el siguiente resultado:

8. **TEOREMA.**

Sea x un estado recurrente positivo, entonces existe una probabilidad invariante q de la forma

$$q(A) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^1)} \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=1}^{T_x^1} I_{\{X_n \in A\}}\right) \qquad (A \in \xi).$$

9. **NOTA**

Si x es sólo recurrente, la expresión del numerador define una <u>medida invariante</u> μ, i.e. $\mu(E) \neq 1$, $\mu Q = \mu$, que no es posible normalizar para tener una probabilidad invariante.

El teorema anterior tiene asociada una Ley de los Grandes Números:

10. **TEOREMA** (Ergódico)

Sea x un estado recurrente positivo tal que para cada y E, $\mathbb{P}_y(T_x^1 < \infty) = 1$. Sea f una función en E en $\mathbb{R}$, integrable con respecto a la medida q del Teorema 8. Entonces:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_y\text{-c.s.}} \int f(u)\, q(du) \qquad (y \in E).$$

§2. EJEMPLOS DE SISTEMAS ESTOCASTICOS DE PARTICULAS.

Un sistema estocástico de partículas consiste, en forma típica, de un número finito o infinito de partículas que interactúan entre sí y que, si se suprimiese dicha interaccción, evolucionarían como Procesos Markovianos de Salto independientes. Como resultado de la interacción, la evolución de cada partícula individual no es más Markoviana; pero el sistema, globalmente, es Markoviano, aunque su naturaleza sea más compleja.

Veamos algunos ejemplos, desarrollados por LIGGETT en su libro [1]

1. EL MODELO ESTOCASTICO DE ISING.

Este es un modelo para el magnetismo introducido por GLAUBER en 1963, estudiado luego por DOBRUSHIN en 1971.

El espacio de estados es $E:=\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, vale decir, cada estado $\eta=(\eta(x);\ x\in\mathbb{Z}^d)$ es una sucesión - con índices d-dimensionales- de valores ± 1. Visualizando $\mathbb{Z}^d$ como un reticulado, en cada vértice imaginamos un átomo y le asignamos un valor ± 1 (valor del spin). La dinámica de la evolución está descrita en los siguientes términos: un spin $\eta(x)$ en $x\in \mathbb{Z}^d$ se cambia a $-\eta(x)$ con una tasa.

(1.1) $$\exp\left[-\beta \sum_{\{y\in\mathbb{Z}^d:\,|y-x|=1\}} \eta(x)\,\eta(y)\right]$$

donde β es un parámetro ≥ 0 que representa el recíproco de la temperatura del sistema. Nótese que la tasa de cambio aumenta cuando la diferencia de signo se da con un mayor número de vecinos de x. Vale decir el sistema "prefiere" las configuraciones en que los spins tienden a alinearse unos con otros: es el fenómeno del ferromagnetismo.

El sistema queda caracterizado por un proceso Markoviano $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ con estados en E, sujeto a la dinámica descrita por (1.1). Si $\beta=0$, las coordenadas $\eta_t(x)$ son P.M.S. independientes con dos estados (-1 y + 1) y el sistema tiene como única medida invariante la medida q del Teorema § 1.8 y que en este caso es el producto de medidas de Bernoulli de parámetro 1/2 sobre el espacio $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

Un tal sistema -en que hay una única medida invariante a la cual se converge tomando cualquier ley inicial - se llama <u>ergódico</u>.

El primer problema importante para el modelo de Ising es determinara para qué valores de β y d el proceso es ergódico.

Se ha demostrado (LIGGETT [1]) que el proceso es ergódico para todo β si d=1. Si $d\geq 2$, existe un valor β_d crítico>0 tal que el proceso es ergódico si $\beta < \beta_d$ pero no es así para $\beta>\beta_d$. En el caso d=2 y $\beta>\beta_d$ hay exactamente dos medidas invariantes. Si $d\geq 3$ y β suficientemente grande, hay un número infinito de medidas invariantes. La no ergodicidad corresponde a la ocurrencia de transiciones de fase, cada medida invariante corresponde a una fase distinta.

2. EL MODELO DEL VOTANTE

Este modelo fue introducido en forma independiente por Clifford y Sudbury en 1973 y Holley y Liggett en 1975.

El espacio de estados es $E=\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ y el mecanismo de evolución se describe diciendo que pasamos de $\eta(x)$ a $1-\eta(x)$ con tasa

$$\frac{1}{2d} \sum_{\{y \in \mathbb{Z}^d : |x-y|=1\}} I_{\{\eta(y) \neq \eta(x)\}}$$

Los vértices en $\mathbb{Z}^d$ representan votantes que pueden tener dos posiciones políticas distintas (0 y 1). Un votante espera un tiempo aleatorio distribuido según una ley exponencial de parámetro 1 y luego adopta la posición de un vecino escogido al azar.

El modelo tiene dos medidas invariantes triviales: $\varepsilon_{\underline{o}}$ y $\varepsilon_{\underline{1}}$ ($\underline{o}(x)=o \ \forall x \in \mathbb{Z}^d$; $\underline{1}\ (x)=1 \ \forall x \in \mathbb{Z}^d$). Este modelo no es ergódico en consecuencia.

El primer problema de importancia es determinar si existen otras medidas invariantes extremales. Para el caso $d \leq 2$ no hay otras; si $d \geq 3$ existe una familia (μ_ρ, $0 \leq \rho \leq 1$) de medidas invariantes extremales tales que U_ρ $(\{\eta : \eta(x)=1\} = \rho$

3. EL PROCESO DE CONTAGIO (Harris, 1974).

Nuevamente $E = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. La dinámica se describe así: en el vértice $x \in \mathbb{Z}^d$, si tenemos un individuo infectado, escribimos $\eta(x)=1$ y pasamos al estado de individuo sano, $\eta(x)=0$, con una tasa 1; en caso de tener uno sano en x, adquirirá la infección con tasa $\lambda \sum_{\{y \in \mathbb{Z}^d : |x-y|=1\}} \eta(y)$

donde λ es un parámetro positivo que se interpreta como la tasa de infección.

Así entonces, los individuos infectados sanan al cabo de un tiempo aleatorio distribuido según una ley exponencial de parámetro 1, independientemente de la configuración; los individuos sanos en cambio, se infectan con una tasa que es proporcional al número de vecinos enfermos.

El proceso de contagio tiene una medida invariante trivial: $\varepsilon_{\underline{o}}$. La primera pregunta importante es saber si hay o no otras medidas invariantes. Harris probó que para $d \geq 1$ existe un valor λ_d crítico de modo que el proceso es ergódico si $\lambda < \lambda_d$, pero tiene al menos una medida invariante no trivial para $\lambda > \lambda_d$.

4. EL PROCESO DE EXCLUSION (Spitzer, 1970; Clifford y Sudbury, 1973).

El espacio de estados es $E=\{0,1\}^S$ donde S es un conjunto numerable. Si $\eta \in E$, $\eta(x)=0$ significa que el lugar $x \in S$ está vacío y si $\eta(x)= 1$, está ocupado por una partícula. Las partículas se mueven sobre S según las siguientes reglas:

(4.1) Una partícula $x \in S$ espera un tiempo distribuído según una ley exponencial de parámetro 1;

(4.2) Al terminar el tiempo antes especificado, la partícula escoge un lugar $y \in S$ con probabilidad $p(x,y)$ y

(4.3) Si y está vacío, salta hacia y; si y está ocupado, se queda en x.

En el caso simétrico, cuando $p(x,y)= p(y,x)$, existe una familia a un parámetro de medidas invariantes: los productos de medidas de Bernoulli de parámetro $\rho \in [0,1]$

La pregunta fundamental es si existen o no otras medidas invariantes extremales.

5. En todos los modelos antes introducidos se pone el acento en la caracterización de las medidas invariantes por constituir éstas un buen reflejo del equilibrio físico. Un estudio más detallado de ellas lleva a analizar conceptos de equilibrio local que surgen en los sistemas estocásticos de partículas motivados por la física. Ha habido una gran producción en torno al problema de determinación de límites hidrodinámicos: una excelente referencia es el libro de DEMASI-IANIRO-PELLEGRINOTTI-PRESUTTI [1]. Diversas técnicas del Análisis Estocástico se utilizan en los estudios mencionados. En lo que sigue queremos ilustrar aquellas referidas a la construcción de modelos estocásticos de sistemas de partículas.

§ 3. CADENAS DE MARKOV Y PROBLEMAS DE MARTINGALAS.

1. DEFINICION

Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad; $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ una filtración, donde $T=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$ y $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $(t\in T)$. Decimos que el sistema $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ es una base estocástica.

Un proceso X adaptado a $\mathbb{F}$, con estados reales, definido sobre Ω es una martingala si satisface:

(1.1) X_t es integrable con respecto a $\mathbb{P}$ para cada $t\in T$;

(1.2) Si $s\leq t$, $s,t\in T$, entonces $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.

2. EJEMPLOS

(2.1) Sea $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, integrables, de media 0.

Sea $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_o,\ldots.\xi_n)$ $(n\in\mathbb{N})$. Y definamos la sucesión de variables aleatorias integrables.

$$X_n := \sum_{k\leq n} \xi_k \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Entonces, si $n\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n+\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$
$$= X_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

pero como ξ_{n+1} es independiente de $\mathcal{F}_n$, entonces $\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0$. Luego $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$

De aquí se obtiene que para cada $m\geq n$, $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$; vale decir, (X_n) es una martingala.

(2.2) Sea (X_n) una cadena de Markov de transición Q, son estados en (ε,ξ), espacio de medida cualquiera, partiendo de un punto $x\varepsilon\xi$.

Definimos $L(x,A):= Q(x,A)-\varepsilon_x(A)$ para cada $(x,A)\varepsilon E\times\xi$; llamamos D_L al conjunto de las funciones $f: E\to\mathbb{R}$ que son ξ-medibles y acotadas. Para cada $f\varepsilon D_L$, escribimos $L(x,f)$ ó $Lf(x)$ la función $Qf(x)-f(x) = Q(x,f)-\xi_x(f)$. Nótese que $L(x,\{x\})=0$, para cada $x\varepsilon E$.

Sea $f\varepsilon D_L$, definimos

$$C_n^f := f(X_n) - f(X_o) - \sum_{k\leq n} Lf(X_{k-1}),$$ para cada $n\in\mathbb{N}$ (con la convención $\sum_{k\leq 0}(\ldots.)=o$).

Observemos que

$$C_{n+1}^f - C_n^f = f(X_{n+1})-f(X_n)-Lf(X_n)$$ y todas estas variables son integrables. Tomando esperanza condicional:

$$\mathbb{E}(C^f_{n+1}-C \mid \mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(f(X_{n+1})\mid \mathcal{F}_n)-f(X_n)-Lf(X_n)$$

$$\mathbb{E}(C^f_{n+1}- C^f_n\mid \mathcal{F}_n)=Qf(X_n)-f(X_n)-Lf(X_n)$$

$$=Qf(X_n)-f(X_n)-(Qf(X_n)-f(X_n)$$

$$= 0$$

Luego,

$$\mathbb{E}(C^f_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)= C^f_n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Obtenemos que para cada $f\in D_L$, (C^f_n) $n\in\mathbb{N}$ es una martingala, que satisface además $C^f_o = 0$.

3. El último ejemplo expuesto tiene particular importancia para la construcción de cadenas de Markov canónicas. En efecto, sea E un espacio localmente compacto numerable al infinito, ξ su triba boreliana. Introducimos la base estocástica canónica:

(3.1) $\Omega:= E^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{F}:= \xi^{\otimes\mathbb{N}}$; $X_n(\omega)=\omega_n$ ($\omega\in\Omega$, $n\in\mathbb{N}$).

$\mathcal{F}_n:= \sigma(X_o, X_1,..., X_n)$, $(n\in\mathbb{N})$.

$\mathbb{F}:= (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sea ahora q una probabilidad sobre (E,ξ) y Q un núcleo Markoviano; $L:= Q-I$ donde I es el núcleo que verifica $I(x,.) = \xi_x(.)$ $(x\in E)$.

Definamos:

(3.2) $C^f_n:= f(X_n)-f(X_o)- \sum\limits_{k\leq n} Lf(X_{k-1})$.

para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $f\in D_L$, donde D_L es el conjunto de las funciones ξ-medibles y acotadas de E en $\mathbb{R}$.

Como se vió en el párrafo 1 en (1.10), (1.11), (1.12) y en (2.7), existe una única probabilidad $_{(Q,q)}$ sobre $(\Omega,\mathcal{F})$ tal que (X_n) sea una cadena de Markov de ley inicial q y transición Q. Según el ejmplo (2.2) de este párrafo, con esa probabilidad $\mathbb{P}_{(Q,q)}$ el proceso C^f resulta ser una martingala para cada $f\in D_L$. Esta observación es fundamental en lo que sigue:

Nótese que el núcleo L satisface las siguientes propiedades:

(3.3) $L(x,E) = 0$, para todo $x\in E$;

$L(x,F)+I(x,F)\geq 0$, para todo $x\in E$, $F\in\xi$.

4. **DEFINICION**

Consideremos el espacio canónico introducido en (3.1) y sea L un núcleo definido sobre $E\times\xi$ que satisfaga las condiciones (3.3). Llamamos D_L al conjunto de todas las funciones ξ-medibles acotadas, con valores reales, definidas sobre E.

Sea q una probabilidad sobre (E,ξ).

Decimos que una probabilidad $\mathbb{P}$ es <u>solución del problema de martingalas de ley inicial q, asociado al operador (núcleo)</u> L si el proceso C^f de (3.2) es una martingala respecto a $\mathbb{P}$ y $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ definida en (3.1)) para cada $f\in D_L$ y además la ley de X_o bajo $\mathbb{P}$ es q, i.e. $\mathbb{P}(X_o\in A) = q(A)$ $(A\in\mathcal{F})$.

Llamamos PROB (q,L) al conjunto de soluciones (si existen) del problema de martingalas de ley inicial q asociado a L.

Nótese que en esta definición no hemos tomado como referencia núcleo markoviano alguno.

El Teorema siguiente caracteriza la relación que hay entre soluciones a problemas de martingalas y cadenas de Markov.

5. **TEOREMA**

Sea L un núcleo sobre $E \times \xi$ que satisface las propiedades (3.3) y q una ley de probabilidad sobre (E, ξ).

Entonces PROB (q, L) contiene un único elemento P si y sólo si (X_n) es una cadena de Markov para P con ley inicial q y transición Q= L+I.

DEMOSTRACION

Supongamos que PROB (q,L) contiene algún elemento P. Entonces,

(5.1) $P(X_o \varepsilon A) = q(A)$ para todo $A \varepsilon F$.

Además, sea Q= L+I; Q así definido es un núcleo Markoviano. En efecto:

$Q: E \times \xi \to \mathbb{R}_+$ y para todo $(x,A) \varepsilon E \times \xi$, se tiene

(5.2) $Q(x,A) = L(x,A) + I(X,A) \geq 0.$

Ahora bien, como L e I son núcleos, resulta que para cada $A \varepsilon F$ la aplicación $Q(.,A)$ es medible y para cada $x \varepsilon E$, $Q(x,.)$ es una medida positiva sobre (E, ξ) según (5.2).

Además, como $L(x,E)=0$ para todo $x\varepsilon E$, resulta $Q(x,E) = 1$ y esta propiedad completa la demostración de que Q es un núcleo Markoviano.

Sea ahora $n\varepsilon\mathbb{N}$, f una función ξ-medible acotada definida sobre E y con valores reales. Entonces, como C^f es una P-martingala respecto a $(\mathcal{F}_m)_{m\varepsilon\mathbb{N}}$ tenemos

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)=$$

$$= \mathbb{E}(C^f_n - C^f_n + f(X_n)+Lf(X_n)|\mathcal{F}_n)$$

$$=\mathbb{E}(C^f_{n+1}- C^f_n |\mathcal{F}_n) + f(X_n)+Lf(X_n)$$

$$= 0 + Qf(X_n)$$

Luego,

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)=Qf(X_n) \tag{5.3}$$

Y según lo estudiado en el párrafo 1, esta propie - dad, junto a (5.1), determinan que (X_n) es una cadena de Markov de transición Q y ley inicial q. Esto determina también que P es única puesto que sobre el espacio canónico hay una sola probabilidad que satisface lo anterior.

Recíprocamente, si $P=\mathbb{P}_{(Q,q)}$ la única probabilidad sobre el espacio canónico que hace que (X_n) sea una cadena de Markov de transición Q y ley inicial q, entonces $P\varepsilon$ PROB (q,L) según hemos visto en el N°3 anterior. Esto prueba también la existencia de soluciones al problema de Martingalas (q,L).

6. EJEMPLO: PROBLEMA DE MARTINGALAS ASOCIADO A UN PASEO ALEATORIO EN $\mathbb{Z}^2$.

Sea $E=\mathbb{Z}^2$, $\xi=\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$ el conjunto de todas las partes de $\mathbb{Z}^2$.

Tomemos $x_o \in E$, $q:=\xi_{x_o}$; sea Q la matriz definida por

$$Q(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{si } |x-y|=1\\ 0 & \text{si no}\end{cases} \tag{6.1}$$

$$L(x,y) = \begin{cases}\frac{1}{4} & \text{si } |x-y|=1\\ -1 & \text{si } x=y\\ 0 & \text{si } x\neq y,\ |x-y|>1\end{cases} \tag{6.2}$$

La probabilidad $P\in$ PROB $(\xi_{x_o} L)$ corresponde a una marcha (o paseo) aleatoria simétrica sobre $\mathbb{Z}^2$.

7. DEFINICION

Un núcleo L que satisfaga las propiedades (3.3) se llama <u>núcleo generador</u> de la cadena de Markov.

Una función $u\in D_L$ es <u>armónica</u> si $Lu(x)=0$ para todo $x\in E$.

8. Para una sucesión (a_n) introduzcamos la notación

$$\delta A_n = a_n - a_{n-1} \qquad (a_n \in \mathbb{R}).$$

Sea Q un núcleo Markoviano sobre(E,ξ) Llamemos $\mathbb{P}_n$ al núcleo definido como:

$$\mathbb{P}_n(x,A) = Q^{\otimes n}(x,A),\ (x,A)\in E\times\xi,\ n\in\mathbb{N}.$$

Si L es el generador de la cadena de transición Q, entonces:

(8.1) $\delta \mathbb{P}_n = L\, \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}_{n-1} L \quad (n \geq 1)$ donde el producto de dos núcleos M y N se define:

$$MN(x,A) := \int M(x,dy)\; N(y,A)$$

Las ecuaciones (8.1) reciben el nombre de ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

Obsérvese que

(8.2) $P_o = I$

provee de una condición inicial para la ecuación a diferencias finitas que satisface P_n.

Además

(8.3) $P_n P_m = P_{m+n} \quad (n,m \in \mathbb{N})$.

se dice que (P_n) constituye un semigrupo.

§4. PROBLEMAS DE MARTINGALAS PARA SISTEMAS DE PARTICULAS.

Abordaremos ahora una generalización de la caracterización de la propiedad Markoviana estudiada en el párrafo anterior para procesos con tiempo discreto. Como ya lo hemos hecho notar, el estudio de los sistemas estocásticos de partículas precisa de la introducción de procesos Markovianos de salto (con tiempo en $\mathbb{R}_+$) y esto nos lleva a considerar -en particular- estructuras topológicas un poco más complejas.

1. Sea E un espacio métrico compacto dotado de su tribu

boreliana ξ. Designamos por $D(\mathbb{R}_+,E)$ el espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}_+$ en E que son continuas a la derecha y tienen límites a la izquierda en cada punto de $\mathbb{R}_+$.

Nuestro espacio canónico será ahora $\Omega=D(\mathbb{R}_+,E)$. Sobre él definimos el proceso canónico $\eta_t(\omega)$: $\omega(t)$ para todo $\omega\in\Omega, t\in\mathbb{R}_+$. Llamamos $\mathcal{F}$ la tribu generada por todas las aplicaciones $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ y definimos la filtración canónica de la forma:

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{s>t} \sigma(\eta_u;\ u\leq s) \qquad (t\in\mathbb{R}_+)$$

que garantiza que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t$ $(t\in\mathbb{R}\ )$, vale decir, que la filtración sea continua a la derecha

$$(\mathcal{F}_{t_+} \text{ se define } \mathcal{F}_{t_+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s\ ).$$

Habiendo fijado Ω, $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F}_t)$, (η_t), llamemos MARK el conjunto de todas las familias $(P_\eta)_{\eta\in E}$ de probabilidades- que llamaremos probabilidades Markovianas - definidas sobre $(\Omega,\mathcal{F})$, y que para cada $\eta\in E$ cumplen con la propiedad de que (η_t) sea un proceso Markoviano de Saltos partiendo de η, relativamente a P_η.

Vale decir, $(P_\eta)\in$ MARK si verifica las propiedades siguientes:

(1.1) $\quad P_\eta \quad (\eta_o = \eta)=1 \qquad\qquad (\eta\in E)$

(1.2) $\quad$ La aplicación $\eta \mapsto P_\eta\ (A)$ de E en $[0,1]$ es medible para cada $A\in\mathcal{F}$.

(1.3) $\quad P_\eta(\eta\circ\theta_s \quad \in A\,|\,\mathcal{F}_s)=P_{\eta_s}(A)$

casi seguramente con respecto a P_η, para todo $\eta \varepsilon E$, para todo $A \varepsilon \mathcal{F}$, donde $\eta \circ \Theta_s$ es el proceso $t \to \eta_t \circ \Theta_s$, $(\Theta_t)_{t \varepsilon \mathbb{R}_+}$ es el desplazamiento usual, vale decir $\Theta_t(\omega) = \omega(t\ .)$, $\eta_t \circ \Theta_s = \eta_{t+s}$

2. Dada (P_η) εMARK, introduzcamos la notación

(2.1) $$P_t f(\eta) := \mathbb{E}_\eta(f(\eta_t)) = \int_\Omega f(\eta_t(\omega))\ P_\eta(d\omega)$$

($t \varepsilon \mathbb{R}_+$, $\eta \varepsilon E$, función continua de E en $\mathbb{R}$).

Nótese que $P_o f(\eta) = f(\eta)$ vale decir, $P_o = I$ (identidad).

Llamemos C(E) al espacio normado completo de las funciones continuas de E en $\mathbb{R}$ dotado de la norma uniforme:

(2.2) $$\|f\| := \sup_{\eta \varepsilon E} |f(\eta)| \qquad (f \varepsilon C(E))$$

La expresión (2.1) define una familia de operadores lineales de C(E) en el espacio de las funciones ξ- medibles y acotadas que designamos por B(E).

$$P_t : C(E) \to B(E)$$
$$f \to P_t f$$

3. **DEFINICION**

Diremos que $(P_\eta) \varepsilon$ MARK es una familia Felleriana, o de Feller, si se cumple $P_t(C(E)) \subset C(E)$, para todo $t \varepsilon \mathbb{R}_+$, vale decir, si la imagen por P_t de una función continua es continua.

4. **PROPOSICION**

Sea $(P_\eta) \in$ MARK una familia Felleriana, entonces $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ tiene las propiedades siguientes:

(4.1) $P_0 = I$, *la identidad sobre* $C(E)$.

(4.2) *La aplicación* $t \to P_t f$ *de* $\mathbb{R}$ *en* $C(E)$ *es continua a la derecha, para toda* $f \in C(E)$.

(4.3) $P_{t+s}\, f = P_t P_s f$, *para toda* $f \in C(E)$ *y todos* $s,t \geq 0$.

(4.4) $P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}_+$ *donde* $\mathbb{1}$ *es la función constante igual a a* 1 *definida sobre* E.

(4.5) $P_t f \geq 0$ *para toda* $f \geq 0$, $f \in C(E)$

DEMOSTRACION

La parte (4.1) es inmediata de la definición de (P_t).

La propiedad (4.2) es una consecuencia fácil de la continuidad a la derecha del proceso canónico (η_t) y del Teorema de la convergencia Dominada de Lebesque.

Veamos (4.3);

$$
\begin{aligned}
P_{t+s}\, f(\eta) &= \mathbb{E}_\eta (f(\eta_{t+s})) \\
&= \mathbb{E}_\eta\ (\mathbb{E}_\eta (f(\eta_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_\eta\ (\mathbb{E}_{\eta_t}\ (f(\eta_s))) \\
&= \mathbb{E}_\eta\ (P_s f\ (\eta_t)) \\
&= P_t P_s\ f(\eta)
\end{aligned}
$$

Para todos $s, t \in \mathbb{R}$, $F \in C(E)$.

Finalmente (4.4.) se obtiene del hecho que P_n es probabilidad y (4.5.) es una propiedad elemental de la integral.

5. **DEFINICION**.

Diremos que un semigrupo de operadores sobre C(E), sea (P_t), es Markoviano, si satisface las propiedades (4.1.) a (4.5.).

La importancia de los semigrupos Markovianos queda puesta en relieve por el Teorema siguiente (Dynkin).

6. **TEOREMA**.

Dado un semigrupo Markoviano (P_t) sobre C(E) existe una única familia $(P_n) \in$ MARK tal que

$$P_t f(\eta) = E_\eta (f(\eta_t))$$

para todo $f \in C(E)$, $\eta \in E$, $t \in \mathbb{R}_+$

De este modo, el conocimiento de un semigrupo de operadores Markoviano,s determina un proceso Markoviano.

La Teoría de Semigrupos, desarrollada por Hille y Yoshida, constituyó durante mucho tiempo la herramienta preferida para construir y estudiar las propiedades de distintos modelos de procesos Markovianos. Nosotros no la usaremos en estas notas, pero es importante que recordemos algunos de sus principales resultados, que el lector puede consultar en cualquier buen texto de Análisis Funcional (por ejemplo, el del propio Rosaku Yosida).

7. **DEFINICION.**

Sea D_L un subconjunto de $C(E)$. Un operador $L: D_L \to C(E)$, lineal, es un <u>pregenerador de Markov</u> si satisface las siguientes condiciones:

(7.1.) $\mathbb{1} \in D_L$ y $L\,\mathbb{1} = 0$;

(7.2.) D_L es denso en $C(E)$:

(7.3.) Si $f \in D_L$, $\lambda \geq 0$ y $f - \lambda Lf = g$,

entonces

$$\min_{x \in E} f(x) > \min_{x \in E} g(x)$$

8. Las propiedades (7.1) a (7.3.) son las análogas a las introducidas en el párrafo 3, (3.3.).

Recordemos que un operador lineal $\mathbf{U}$ en un espacio normado es cerrado si su gráfico es cerrado. Un operador $\bar{\mathbf{U}}$ es la cerradura de $\mathbf{U}$ si es la más pequeña de las extensiones cerradas de $\mathbf{U}$.

Es posible demostrar que si L es un pregenerador de Markov, entonces $\bar{L}$ también lo es. Además, si L es un pregenerador de Markov cerrado, entonces el rango $\mathcal{R}$ (I-λL) es un sub-conjunto cerrado de C(E) para $\lambda>o$. Esto explica la siguiente definición:

9. **DEFINICION**

Un generador de Markov, es un pregenerador Markoviano cerrado L que satisface (9.1) $\mathcal{R}$ (I-λL) = C(E) para todo $\lambda>o$ suficientemente pequeño.

10. **PROPOSICION** (Liggett)

Todo pregenerador de Markov acotado, definido en todo C(E), es un generador de Markov.

Todo generador de Markov satisface la igualdad (9.1) para todo $\lambda \geq 0$.

DEMOSTRACION

Todo operador lineal acotado es cerrado. Además, si $g \in C(E)$, sea $0<\lambda< \|L\|^{-1}$ -donde L es el pregenerador- y definamos $f:= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n L^n g$. Entonces $f-\lambda Lf=g$ y $(I-\lambda L)= C(E)$.

Para probar la segunda parte, basta mostrar que si $o<\lambda<\lambda_o$, entonces $R(I-\lambda L) = C(E)$ implica $R(I-\lambda_o L)=C(E)$. Supongamos $g \in C(E)$ y definamos $T: C(E) \quad D_L$ por

$Th = \frac{\lambda}{\lambda o} (I-\lambda L)^{-1} g + \frac{\lambda o \ \lambda}{\lambda o} (I-\lambda L)^{-1} h$ que está bien definida porque $R(I-\lambda L)= C(E)$.

Pero,

$$\|Th_1 \quad Th_2\| = \frac{\lambda o \ \lambda}{\lambda o} \|(I-\lambda L)^{-1}(h_1-h_2)\|$$

$$\leq \frac{\lambda o \ \lambda}{\lambda o} \|h_1-h_2\|$$

Entonces T tiene un único punto fijo, que llamamos f. Luego $f \in D_L$ y

$$(I-\lambda L)f = \frac{\lambda}{\lambda o} g + \frac{\lambda o-\lambda}{\lambda o} f$$

Reordenando estos términos resulta

$$f - \lambda o \ Lf = g$$

Pero λ_o era un valor arbitrario $>\lambda$ con λ tal que $\mathcal{R}(I-\lambda L)= C(E)$. Luego $\mathcal{R}(I-\lambda L)= C(E)$ para todo $\lambda \geq 0$.

Resumimos en el Teorema siguiente los resultados esenciales de la Teoría de Hille y Yosida:

11. **TEOREMA** (Hille-Yosida).

Existe una correspondencia biunívoca entre generadores Markovianos sobre $C(E)$ y semigrupos Markovianos, dada por:

(11.1) $\mathcal{D}_L = \{f \in C(E)$: *existe* $\lim_{t\downarrow 0} \dfrac{P_t f - f}{t}\}$, y

$$Lf = \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \quad \text{para } f\in\mathcal{D}_L \quad \text{(convergencia uniforme)}$$

(11.2) $P_t f = \lim_n \left(I - \frac{t}{n} L\right)^{-n} f, \quad (F\in C(E),\ t\in\mathbb{R}_+)$.

Más aún,

(11.3) $\dfrac{d}{dt} P_t f = L P_t f = P_t L f$ *para* $F \in \mathcal{D}_L$

(11.4) *Para* $g\in C(E)$ *y* $\lambda \geq 0$, *la solución a* $f-\lambda Lf=g$ *está dada por*

$$f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{\lambda t}\, g\, dt$$

L se llama el generador de (P_t), y (P_t) es el semigrupo generado por L. La demostración puede ser consultada en el primer capítulo del libro de Dynkin (1965).

Veamos ahora cómo se plantean los problemas de martingalas en este contexto.

12. DEFINICION

Sea L un pregenerador de Markov de dominio D_L. Definimos:

(12.1) $C_t^f = f(\eta_t)-f(\eta_o)-\int_o^t Lf(\eta_{s-})\,ds \quad (t\in\mathbb{R}_+,\ F\in D_L)$

Decimos que P es una <u>solución del problema de martingalas asociado a L y de punto inicial η</u> si P es una probabilidad sobre $(\Omega,\mathcal{F})$ tal que $\mathbb{P}(\eta_o=\eta)=1$ y C^f es una P-martingala para toda $F\in D_L$. Llamamos PROB (η,L) al conjunto de todas las probabilidades que verifican las condiciones precedentes.

Tenemos entonces la siguiente relación:

13. TEOREMA (Liggett)

Si L es un pregenerador Markoviano tal que su Cláusula $\bar{L}$ sea un generador Markoviano y (P_η) es la familia Felleriana que le corresponde, entonces para cada $\eta\in E$, P_η es el único elemento de PROB (η,L).

DEMOSTRACION

Para probar que P_η es un elemento de PROB (η,L), debemos verificar que si $s<t$, $s,t\in\mathbb{R}_+$, entonces

$$\mathbb{E}_\eta\,(C_t^f-C_s^f|\mathcal{F}_s) = 0$$

Ahora bien,

$$\mathbb{E}_\eta(C_t^f-C_s^f\;|\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}_\eta(f(\eta_t)-f(\eta_s)\,|\mathcal{F}_s)-\int_s^t\mathbb{E}_\eta(Lf(\eta_u)\,|\mathcal{F}_s)\,du$$

(usando teorema de Fubini)

$$= \mathbb{E}_{\eta_s}(f(\eta_t)) - f(\eta_s) - \int_s^t B_{\eta_s}\, Lf(\eta_u)du$$

$$= \mathbb{E}_{\eta_s}(f(\eta_t)) - f(\eta_s) - \int_s^t P_u\, Lf(\eta_s)\, du$$

$$= \mathbb{E}_{\eta_s}(f(\eta_t)) - f(\eta_s) - \int_s^t \frac{d}{du} P_u f(\eta_s)\, du$$

$$= P_t\, f(\eta_s) - f(\eta_s) - P_t f(\eta_s) + P_s f(\eta_s)$$

$$= 0$$

ya que $P_s f(\eta_s) = f(\eta_s)$. (En la segunda igualdad usamos la propiedad de Markov y el hecho que $Lf(\eta_{u-})$ difiere de $Lf(\eta_u)$ sólo en un conjunto de medida de Lebesque nula; en la cuarta usamos la ecuación diferencial satisfecha por el semigrupo).

En consecuencia, $P_\eta \in$ PROB (η, L).

Para probar la unicidad, sea $\eta \in E$ fijo y sea $P \in$ PROB(η, L). Claramente P pertenece también a PROB $(\eta, \bar{L})$. Para demostrar que $P = P_\eta$ probaremos que todas las distribuciones marginales son iguales, por inducción. Con este fin, mostraremos que las transformaciones de Laplace multidimensionales coinciden.

Sea $s<t$, $s,t \in \mathbb{R}_+$, como P es solución del problema de Martingalas $(\eta, \bar{L})$, tenemos

(13.1) $\quad \mathbb{E}(f(\eta_t) - \int_s^t Lf(\eta_u)du \mid \mathcal{F}_s) = f(\eta_s)$ para toda $f \in D_L$.

Como $\bar{L}$ es generador de Markov, dados $g \in C(E)$, $\lambda > o$, existe $f \in D_{\bar{L}}$ tal que

(13.2) $\quad (\lambda I - \bar{L}) f = g$

Aplicamos (13.1) a esta f y multiplicamos ambos miembros de esa igualdad por $\lambda e^{-\lambda t}$, integrando luego de s a ∞:

$$\mathbb{E}\left[\int_e^{\infty} {}^{\lambda t}\lambda f(\eta_t) - \int_s^{\infty} e^{-\lambda u}\bar{L}f(\eta_u)du/F_s \right]$$

$$= e^{-\lambda s} f(\eta_s).$$

Por (13.2) obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\int_s^{\infty} e^{-\lambda t} g(\eta_t)dt \mid F_s \right] = e^{-\lambda s} f(\eta_s) \tag{13.3}$$

Ahora tomemos $o<s_1<....<s_n$, $\lambda_i>o$, $h_i \varepsilon C(E)(i=1,...,n)$, multiplicamos (13.3) con $s= s_n$ por

$$\exp\left[- \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \right] \prod_{i=i}^{n} h_i(\eta_{s_i})$$

y se calcula la esperanza de ambos miembros:

$$\underset{s_1<...<_n<_t}{\int......\int} \exp\left[-\lambda t- \sum_{i=1} \lambda_i s_i\right]\mathbb{E}(g(\eta_t) \prod_{i=1} h_i(\eta_{s_i}))ds_1..ds_n\, dt \tag{13.4}$$

$$= \int_{s_1<...<s_n} \int \exp\left[-\lambda s_n - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i\right] E(f(\eta s_n) \prod_{i=1} h_i(\eta_{s_i}))ds_1...ds_n$$

Haciendo s=o en (13.3) y usando el Teorema de unicidad para la transformación de Laplace, vemos que las distribuciones marginales unidimensionales de P son las mismas que las de P_η. Del mismo modo, aplicando el teorema de unicidad para la transformación de Laplace multidimensional a la relación (13.4) y la correspondiente identidad, donde la esperanza con respecto a P es reemplazada por E_η, se obtiene como conclusión que la igualdad de distribuciones marginales n-dimensionales de P y P_η implica la igualdad de las distribuciones marginales (n+1)- dimensionales. En consecuencia $P = P_\eta$.

14. Veamos ahora cómo se construyen los pregeneradores de Markov correspondientes a sistemas estocásticos de partículas.

Nos damos un conjunto S numerable de posiciones; llamamos W a un espacio métrico compacto que jugará el papel de espacio de fase. El espacio de estados E es el compacto W^S. Llamemos $\mathcal{P}_f(s)$ al conjunto de partes finitas de S.

Consideramos una familia $(C_T, T\varepsilon\mathcal{P}_f(S)$ de núcleos C_T: $E \times \xi_T \to \mathbb{R}_+$ $(T\varepsilon\mathcal{P}_f(S))$ donde ξ_T es la familia de Bo elianos de W_T, de modo que

(14.1) $\eta \quad C_T(\eta, d\zeta)$ sea continua como aplicación de E en el espacio de las medidas finitas sobre (W^T, ξ_T) dotado de la topología de la convergencia débil, para cada $T\varepsilon\mathcal{P}_f(S)$.

C_T corresponde a la tasa según la cual ocurrirán las transiciones que involucran las coordenas en T.

Veamos cómo se construye C_T para cada uno de los modelos de partículas que hemos considerado en el párrafo 2, siguiendo a Liggett.

15. **EL MODELO DE ISING**

En este caso, $S= \mathbb{Z}^d$, $W= \{-1, 1\}$.

Si card $(T)\geq 2$, entonces $C_T(\eta, d\zeta)= 0$.

Dado $x\varepsilon S$ arbitrario y $T= \{x\}$, entonces $C_T(\eta, d\zeta)$ se concentra en $\{-\eta(x)\}$ y

$$C_T(\eta, \{-\eta(x)\}= \exp \left| -\beta \sum_{\{y: |y-x|=1\}} \eta(x)\eta(y) \right| \quad (\beta\geq 0)$$

16. EL MODELO DEL VOTANTE

$S=\mathbb{Z}^d$, $W = \{0,1\}$. Si card (T) ≥ 2, entonces

$C_T(\eta,d\zeta)= 0$. Si $T=\{x\}$ $x\in S$, entonces

$$C_T(\eta,\{1-\eta(x)\} = \frac{1}{2d} \sum_{\{y:|y-x|=1\}} I_{\{\eta(y)\neq\eta(x)\}}$$

17. EL PROCESO DE CONTAGIO

$S= \mathbb{Z}^d$, $W=\{0,1\}$. Si card(T) ≥ 2, entonces

$C_T(\eta,d\zeta) = 0$. Si $T= \{x\}$, entonces $C_T(\eta,d\zeta)$ pone masa 1 en $\{o\}$ si $\eta(x)= 1$ y masa $\lambda \sum_{\{y:|y-x|= 1\}}\eta(y)$ sobre $\{\eta(x)=0$.

18. EL PROCESO DE EXCLUSION.

S es numerable cualquiera, $W= \{0,1\}$. Si $T=\{x,y\}$, con $\eta(x)=1$, $\eta(y)=o$ entonces $C_T(\eta,d\zeta)$ pone masa $p(x,y)$ sobre $\{\zeta\}$ donde $\zeta(x)=o$ y $\zeta(y) = 1$ (Recordar que $p(x,y)\geq o$ y $\sum_{y\in s} p(x,y)=1$). En cualquier otro caso, $C_T(\eta,d\zeta)=0$.

19. Construiremos ahora una forma general de pregenerador L.

Definimos para cada $f\in C(E)$, $x\in S$:

(19.1) $\Delta_f(x)$ sup $\{|f(\eta)-f(\zeta)|:\eta,\zeta\in E$ y $\eta(y)=\zeta(y)$ para todo $y\neq x\}$

Nótese que $\lim_x \Delta_f(x)=o$ para todo $f\in C(E)$.

Introduzcamos el siguiente conjunto D_L:

(19.2) $$D_L := \{f \epsilon C(E) : \quad |||f||| := \sum_{x \epsilon S} \Delta_f(x) < \infty\}$$

Es fácil ver que este conjunto es un álgebra que separa puntos, en consecuencia, dado que E es compacto, el Teorema de Stone-Weierstrass nos permite asegurar que D_L es denso en C(E).

Para cada $\eta \epsilon E$ y $\zeta \epsilon W^T$ definimos η ϵE por la relación

(19.3) $$\eta^\zeta(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si} \quad x \notin T \\ \zeta(x) & \text{si} \quad x \epsilon T \end{cases}$$

Y consideremos la norma uniforme de $C_T(.,W^T)$ sobre E:

(19.4) $$|C_T| = \sup_{\eta \epsilon E} C_T(\eta, W^T)$$

Para cada $x \epsilon S$, sea $P_f(S,x)$ el conjunto de las partes finitas de S que contienen al punto x. Definimos

(19.5) $$N(x) := \sum_{T \epsilon P_f(S,x)} \qquad (x \epsilon S).$$

Sea $f \epsilon D_L$ y $T \epsilon P_f(S)$, entonces

$$|f(\eta^\zeta) - f(\eta)| \leq \sum_{x \epsilon T} \Delta_f(x)$$

Luego,

$$\| \int_{W_T} C_T(\eta, d\zeta) |f(\eta^\zeta) - f(\eta)| \| \leq \|C_T\| \qquad |||f|||$$

(19.6) $$\sum_{T \epsilon P_f(S)} \| \int_{W^T} C_T(\eta, d\zeta) |f(\eta^\zeta) - f(\eta)| \| \leq \sup_{x \epsilon S} N(x) ||f||$$

Suponiendo $\sup_{x \epsilon S} N(x) < \infty$, la expresión (19.6) implica que la serie

$$(19.7) \qquad \sum_{T \in \mathcal{P}_f(S)} \int_{C_T \atop W^T} (\eta, d\zeta \; |f(\eta^\zeta) - f(\eta)|$$

converge uniformemente.

Así se obtiene la primera parte de la proposición siguiente:

20. **PROPOSICION** (Liggett)

Supongamos que

$$(20.1) \qquad \sup_{x \in S} N(x) < \infty$$

Entonces el operador L *definido sobre* $\mathcal{D}_L$ *por la serie (19.7) es un pregenerador de Markov y verifica:*

$$\|Lf\| \leq (\sup_{x \in S} N \; (x) \quad \|f\| \qquad (f \in \mathcal{D}_L)$$

Si además se satisface la condición

$$(20.2) \quad \sup_{x \in S} \sum_{T \in p_f(s,x)} \sum_{u \neq x} \sup\{ \; |C_T(\eta_1, .) - C_T(\eta_2, \;)\|_T : \eta_1, \eta_2\} < \infty$$

tales que $\eta_1(y) = \eta_2(y)$, *para todo* $y \neq u$
donde $\|.\|_T$ *representa la norma en variación total para las medida finita sobre* (W^T, ξ_T), *entonces la clausura* $\bar{L}$ *de* L *es un generador Markoviano.*

La demostración de la segunda parte de la proposición puede ser consultada directamente en la obra de Liggett por el lector interesado; es uno de los resultados que exige un gran trabajo técnico en Procesos de Markov.

2.1. **NOTA.** De los ejemplos de modelos estocásticos analizados anes, los tres primeros satisfacen las condiciones (20.1) y (20.2). Para que el modelo de exclusión también las cumpla, es necesario imponer la condición

$$\sup_{y \in S} \sum_{x \in S} p(x,y) < \infty$$

22. Sea ahora D_o el subconjunto de $C(E)$ formado por las funciones cilíndricas, vale decir, todas aquellas funciones continuas f para las cuales existe una $F: W^T \to R$, T <u>finito</u> tal que $f(\eta) = F((\eta(x);\ x \in T))$.

Si $F \in D_o$ y suponemos $N(x) < \infty$ para todo $x \in S$, entonces la serie (19.7) converge uniformemente, dado que la dependencia de T de aquellas expresiones se traduce sólo en el conjunto finito de coordenadas que caracteriza a f.

Así tenemos la siguiente proposición:

23. **PROPOSICION**

Si se satisface la hipótesis

(23.1) *$N(x) < \infty$ para todo $x \in S$, entonces el operador L_o definido sobre D_o por la serie (19.7) es un pregenerador de Markov.*

Además, para cada $\eta \in E$, existe una solución del problema de martingalas (η, L_o).

DEMOSTRACION

Proporcionamos un esquema de la demostración de la última aserción.

Se considera una sucesión de subconjuntos de S, sea (S_n), que crece hacia S.

Definiendo

$$C_T^{(n)}(\eta, d\zeta) := \begin{cases} C_T(\eta, d\zeta) & \text{si } T \subset S_n \\ 0 & \text{si } T \not\subset S_n \end{cases}$$

$(n \in \mathbb{N})$, se construye una sucesión $L^{(n)}$ de pregeneradores Markovianos (meidante la Proposición 20) cuyas clausuras $\bar{L}^{(n)}$ son generadores Markovianos. Según el Teorema 13, determinamos así $P^{(n)}$ como la única solución del problema de martingalas $(\eta, L^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N})$. Se prueba enseguida que la sucesión de probabilidades $(P^{(n)})$ es relativamente debilmente compacta (usando por ejemplo los criterios de compacidad con tiempos de parada) en el espacio de las medidas de probabilidad sobre $D(\mathbb{R}_+, E)$. Si $(P^{(n_k)})_{K \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión debilmente convergente hacia una probabilidad P, usando que $L_o f = \lim_n L^{(n)} f$ para toda $\in D_o$, se prueba que $P \in$ PROB (η, L_o). De este modo, PROB $(\eta, L_o) \neq \phi$

Finalmente, el cuadro de relaciones entre problemas de martingalas y sistemas markovianos de partículas se completa con el siguiente resultado:

24. **TEOREMA**

Bajo la hipótesis (23.1), si PROB (η, L_o) tiene un único elemento para cada $\eta \in E$, entonces $(P_\eta) \in$ MARK y el generador del proceso es una extensión de L_o.

DEMOSTRACION (esquema)

La condición inicial se satisface obviamente y además $\eta \to P_\eta$ es medible por las condiciones impuestas a C_T. La propiedad sobre las esperanzas condicionales se obtiene usando la propiedad de martingala del proceso C^f.

COMENTARIOS FINALES:

En estas notas hemos cubierto sólo los aspectos básicos de construcción de algunos sistemas estocásticos de partículas, mostrando la esencia de las herramientas del Análisis Estocástico que en ellos intervienen.

El lector interesado en aspectos relacionados mayormente con la Física Matemática quedará ciertamente insatisfecho. La bibliografía anexa esperamos le entregue una vía para satisfacer su curiosidad.

REFERENCIAS

DACUNHA-CASTELLE et DUFLO 1 : Probabilités et Statistiques. Vol. II. Masson (1984).

DE MASI-IANIRO-PELLEGRINOTTI-PRESUTTI [1] : A Survey of the Hydrodinamical Behavior of Many Particle Systems. Elsevier (1984).

JACOD, J. [1] : Calcul chastique et Problemes de Martingales. Lect.Notes in Maths, Springer-Verlag (1979).

LIGGETT, T. [1] : Interacting Particle Systems. Springer (1985).

VARES, M.E. : Grandes Desvios e Metaestabilidade. Coloquio Poços de Caldas (1985), CNPq.