DOI: 10.22199/S07160917.1986.0011.00006

REVISTA PROYECCIONES N° 11: 146-177
Julio 1986 - I.S.S.N 0716-0917

INTRODUCCION A LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS*

TOMAS AVILA RODRIGUEZ**
FERNANDO JORQUERA MOLINA**
GUSTAVO POBLETE OLMOS**

Una de las ramas de la matemática que ha llegado a tener gran importancia en la fundamentación y desarrollo de la mayoría de las teorías actuales de esta ciencia, es el Análisis Funcional. El alcance de esta rama es difícil de conocer, pero sus fundamentos son relativamente simples y están prácticamente determinados.

Conocer la estructura del Análisis Funcional es importante, tanto para el especialista como para el principiante porque permite, por una parte, clasificar rápidamente el tipo de propiedades con que se trabaja, y por otra, otorga una buena muestra del habitual fenómeno matemático de compatibilidad de estructuras.

Los contenidos que se desarrollan en estas notas, es parte del

---

* Cursillo IV Jornadas de Matemáticas de la Universidad del Norte.

** Profesor Departamento Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad del Norte.

material presentado en un cursillo de las IV Jornadas de Matemáticas de la Universidad del Norte. Tiene por objeto sintetizar los conceptos fundamentales sobre espacios vectoriales topológicos (e.v.t.), necesarios para desarrollar el estudio de análisis funcional.

Los tópicos cubiertos en este trabajo, comprenden el concepto de espacio vectorial topológico y sus propiedades, e.v.t. de dimensión finita, y algunos aspectos de los espacios vectoriales localmente convexos.

CAPITULO I. GENERALIDADES.

Es habitual en matemática encontrar estructuras compatibles. Por ejemplo, la estructura $(\mathbb{N},+)$ es compatible con la estructura $(\mathbb{N},\leq)$, ya que la adición respeta el orden; esto es, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$. Queremos hacer compatible la estructura de espacio vectorial con la estructura de espacio topológico. Estas estructuras son de diferente naturaleza, una es algebraica y la otra es topológica. No basta tener un conjunto con la estructura de espacio vectorial dotado de una topología. Para establecer una compatibilidad, entre ellas, se les exigirá a la adición y ponderación que sean continuas.

1.1. Concepto de Espacio Vectorial Topológico.

Si en un espacio vectorial V_K provisto de una topología la adición y ponderación son continuas, diremos que V_K tiene estructura de espacio vectorial topológico.

<u>Definición 1.1</u>. Sea V_K un espacio vectorial sobre un campo K, valuado y no discreto, provisto de una topología τ. El par (V,τ) se llama espacio vectorial topológico (e.v.t.) sobre K si cumple:

i) $+ : V \times V \to V$

$(x,y) \to x + y$, es continua

ii) $\bullet : K \times V \to V$

$(\alpha,x) \to \alpha\cdot x$, es continua

Notemos que V está provisto de τ, K del módulo, $V \times V$ y $K \times V$ de la topología producto respectiva.

Decir que la aplicación $+ : V \times V \to V$ es continua en (x,y) significa que para toda vecindad W de $x+y$ existen V_1 y V_2 vecindades de x e y respectivamente, tal que $V_1 + V_2 \subseteq W$.

Similarmente, la aplicación $\cdot : K \times V \to V$, es continua en (λ,x) si para toda vecindad W de λx, existen un $\delta > 0$ y V_1 vecindad de x tal que $\alpha V_1 \subseteq W$ para todo $\alpha \in B(\lambda,\delta)$.

1.2. Ejemplos.

1) El conjunto de los números reales como espacio vectorial sobre él mismo y con la topología usual (topología métrica) es un espacio vectorial topológico. En efecto; sean x_o, $y_o \in \mathbb{R}$ y W una vecindad de x_o+y_o. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_o+y_o,\varepsilon) \subseteq W$, pero existen $B(x_o,\varepsilon/2)$ y $B(y_o,\varepsilon/2)$ tal que :
$B(x_o,\varepsilon/2) + B(y_o,\varepsilon/2) \subseteq B(x_o+y_o,\varepsilon) \subseteq W$, lo que demuestra la continuidad de la adición.

Para demostrar la continuidad de la ponderación, sea α_o, $x_o \in \mathbb{R}$ y W una vecindad de $\alpha_o x_o$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\alpha_o x_o,\varepsilon) \subseteq W$.

Demostraremos que existe un $\delta > 0$ tal que $\alpha \cdot B(x_o,\delta) \subseteq W \quad \forall \alpha$, $\alpha \in B(\alpha_o,\delta)$.

Tenemos que $|\alpha x - \alpha_o x_o| \leq |\alpha x - \alpha_o x| + |\alpha_o x - \alpha_o x_o| =$

$$= |\alpha - \alpha_o||x| + |\alpha_o||x - x_o|.$$

Luego $(\alpha,x) \in B(\alpha_o,\delta) \times B(x_o,\delta) \Rightarrow$

$|\alpha x - \alpha_o x_o| \leq |\alpha - \alpha_o||x| + |\alpha_o||x - x_o| < \delta|x| + |\alpha_o|\delta$, pero

$|x| \leq |x - x_o| + |x_o| < \delta + |x_o|$. Luego

$(\alpha,x) \in B(\alpha_o,\delta) \times B(x_o,\delta) \Rightarrow |\alpha x - \alpha_o x_o| < \delta(\delta + |x_o| + |\alpha_o|)$ y en consecuencia basta escoger $\delta > 0$ de modo que :

$$\delta(\delta + |x_o| + |\alpha_o|) \leq \varepsilon$$

2) Sea K un campo valuado y no discreto. Se puede considerar que $(K,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre si mismo; también, derivada del módulo, K tiene una topología y de acuerdo a la demostración del ejemplo 1), no es difícil establecer la continuidad de la adición y ponderación; es decir $(K,|\,|)$ tiene la estructura de espacio vectorial topológico.

3) Todo espacio vectorial normado es un e.v.t., como resultado del ejemplo 1). (Cambiar el módulo por la norma).

4) La topología indiscreta $\{V,\phi\}$ sobre el espacio vectorial V_K, dota a V de la estructura de e.v.t. En efecto, la topología sobre $V \times V$ es indiscreta, es decir, es $\{V \times V, \phi\}$ y luego la suma es trivialmente continua. En cuanto a la ponderación, ella es continua como toda aplicación a valores en un espacio topológico indiscrito (aún cuando la topología de $K \times V$ no es indiscreta).

5) Sea V_K un espacio vectorial, $V \neq \{0\}$. Entonces V con la topología discreta $P(V)$ no es e.v.t.

En efecto, supongamos que la ponderación es continua, entonces siendo $\{0\}$ un abierto de V, su imagen inversa $\{(\alpha,x) \in K \times V / \alpha x = 0\}$ es un abierto de $K \times V$.

Fijemos $x_o \neq 0$ en V y sea $\pi_1 : K \times V \to K$ la proyección canónica, y como $K \times \{x_o\}$ es un abierto en $K \times V$, la intersección de $\{(\alpha,x) / \alpha x = 0\} \cap (K \times \{x_o\}) = \{(0,x_o)\}$ es un abierto de $K \times V$. Además π_1 es abierta, entonces $\pi_1\{(0,x_o)\}$ es abierta en K; pero $\pi_1\{(0,x_o)\} = \{0\}$, luego $\{0\}$ es abierto de K, lo que es una contradicción, pues K sería discreto.

1.3. Propiedades.

Comencemos ahora el estudio de los e.v.t. presentando algunas propiedades elementales, que se deducen directamente de la definición.

Proposición 1.1. Si (V,τ) e.v.t., entonces :

1) Para cada a en V, la traslación, $T_a : V \to V; x \to T_a(x) = a + x$ es un homeomorfismo.

2) Para cada λ en K, $\lambda \neq 0$, la homotecia $h_\lambda : V \to V; x \to h_\lambda(x) = \lambda x$, es un homeomorfismo.

   Si $\lambda = 0$, se obtiene la aplicación nula, que es continua.

3) Para cada a en V, $\Psi_a : K \to V; \lambda \to \Psi_a(\lambda) = \lambda a$, es continua.

Demostración.

1) Puesto que la adición es continua, también lo es su restricción al conjunto $V \times \{a\}$. Por otra parte la aplicación $g : V \to V \times \{a\}; x \to g(x) = (x,a)$ es claramente un homeomorfismo; luego T_a es continua, pues $T_a = + \circ g$.

   Finalmente la inversa de T_a (T_a es biyección) es T_{-a}, que también es continua. Así T_a es un homeomorfismo. En forma análoga se demuestran (2) y (3).

   Se deduce de la proposición anterior lo siguiente :

Corolario. Sea (V,τ) e.v.t. Sean $A, F, B \subseteq V$, $x \in V$, y $\lambda \in K$ se tiene :

i) Si A es abierto entonces $-A$, $x+A$, λA y $A+B$ son abiertos.

ii) Si F es cerrado entonces $-F$, $x+F$, y λF son cerrados.

iii) Si U es vecindad del cero, entonces $-U$, λU también lo son y $x+U$ es vecindad de x.

Demostración. Para demostrar que $-A$ es abierto basta considerar que la función h_λ es un homeomorfismo, con $\lambda = -1$. Para demostrar que $x+A$ es abierto considere el homeomorfismo T_x. En forma análoga para demostrar que λA es abierto considere el homeomorfismo h_λ. La demostración de que $A+B$ es abierto se deduce del hecho:

$$A+B = \underset{b\in B}{(A+Ub)} = \underset{b\in B}{U}(A+b) \text{ donde } A+B \text{ es abierto para todo } b \in B.$$

La demostración de ii) y iii) se hacen en forma análoga.

Examinemos a continuación la estabilidad de los conjuntos equilibrados bajo los operadores clausura e interior.

Proposición 1.2. Si (V,τ) un e.v.t. y $A \subseteq V$, entonces:

i) $\overline{A} = \bigcap \{A+U \;/\; U \in \mathcal{V}(0,\tau)\}$ donde $\mathcal{V}(0,\tau)$ es filtro de vecindades del cero.

ii) A equilibrado implica $\overline{A}$ equilibrada.

iii) A equilibrado implica $\mathring{A}$ equilibrado cuando $0 \in \mathring{A}$.

Demostración. Para demostrar i) sea $x \in \overline{A}$ y como $\forall\, U \in \mathcal{V}(0,\tau)$ se tiene $(x - U)$ es vecindad de x, luego $(x - U) \cap A \neq \phi$; o equivalente, $\exists$ z tal que $z \in (x - U) \cap A \iff z \in (x - U) \wedge z \in A$, $\forall\, U \in \mathcal{V}(0,\tau)$, o sea $z = x - u$, y $z = a$, entonces $x = a + u$, de donde $x \in A+U$, $\forall\, U \in \mathcal{V}(0,\tau)$. Se ha demostrado que $\overline{A} \subseteq \bigcap\{A+U/ \; U \in \mathcal{V}(0,\tau)\}$.

Ahora sea $x \in \bigcap\{A+U/ \; U \in \mathcal{V}(0,\tau)\}$, se tiene que $x \in A+U$, $\forall\, U \in \mathcal{V}(0,\tau)$; pero si $W \in \mathcal{V}(x,\tau)$ entonces $x-W \in \mathcal{V}(0,\tau)$, o sea $x \in A+(x-W)$, luego $x = a+(x-w)$, o $a = w$ es decir $W \cap A \neq \phi$, lo que quiere decir $x \in \overline{A}$. Se ha demostrado que $\bigcap \{A+U/ \; U \in \mathcal{V}(0,\tau)\} \subseteq \overline{A}$.

Para demostrar ii), sea $\lambda \in K$, $|\lambda| \leqslant 1$, entonces, si $\lambda = 0$: $\lambda\overline{A} = \{0\} \subseteq A \subseteq \overline{A}$, si $\lambda \neq 0$: $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$ pues las homotecias son homeomorfismos. Luego $\lambda\overline{A} \subseteq \overline{A}$, ya que A es equilibrado.

Para demostrar iii), sea $\lambda \in K$, tal que $|\lambda| \leqslant 1$, entonces si $\lambda = 0$: $\lambda\mathring{A} = \{0\} \subseteq \mathring{A}$, si $\lambda \neq 0$: $\lambda\mathring{A} = \lambda\mathring{A} \subseteq \mathring{A}$ pues A es equilibrado y las homotecias son homeomorfismos.

1.4. Teorema de Caracterización de los Espacios Vectoriales Topológicos.

Sea τ una topología definida sobre un espacio vectorial V_K (K campo valuado no discreto); τ se dice invariante bajo traslación si y sólo si todas las traslaciones son homeomorfismo. Si τ es invariante bajo traslación la topología τ queda totalmente determinada por un filtro de vecindades de cualquier punto del espacio V, en particular por el filtro de vecindades del cero.

<u>Proposición 1.3</u>. Si (V,τ) e.v.t., entonces:

i) U absorbente, $\forall\, U \in \sqrt{(0,\tau)}$.
ii) $\forall\, U \in \sqrt{(0,\tau)}$ existe U' tal que $U'+U' \subseteq U$.

<u>Demostración</u>. i) Sea $x \in V$ y considerando la continuidad de la ponderación en $(0,x)$, se tiene que para U vecindad de $0 \cdot x = 0$, existe $W \in \sqrt{(x,\tau)}$ y $\alpha > 0$ tales que $|\lambda| < \alpha$, se tiene $\lambda y \in U$, $\forall\, y \in W$. En particular, como $x \in W$, $\lambda x \in U$, cuando $|\lambda| < \alpha$ o bien si $|\lambda| > \alpha$ entonces $x \in \lambda U$, es decir U es absorbente.

En cuanto a ii) resulta de la continuidad de la adición en $(0,0)$.

El siguiente teorema es fundamental, pues nos permite caracterizar las topologías compatibles con la estructura de e.v.t.

Teorema 1.1.

Sea V_K un espacio vectorial (K campo valuado no discreto, y una topología sobre V. La adición y ponderación son continuas si y sólo si τ es invariante bajo traslación y posee una base de vecindades del cero β con las siguientes propiedades:

a) Cada U en β es absorbente e equilibrado.

b) Para cada U en β existe U' en β tal que $U'+U' \subseteq U$.

c) Existe $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| < 1$, tal que $V \in \beta$ implica $\lambda V \in \beta$.

Demostración. Demostraremos primero la existencia, en cada e.v.t., de una base de vecindades del cero, con las propiedades pedidas. Sea W una vecindad del cero en V, existe una vecindad del cero W' y un número real $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda W' \subseteq W$, cuando $|\lambda| \leq \varepsilon$, por la continuidad de la ponderación en (0,0). Ahora $U = \bigcup\{\lambda W' : |\lambda| \leq \varepsilon\}$ es una vecindad del cero contenida en W y obviamente es equilibrada.

Sea $\beta = \{U \in \mathcal{V}(0,\tau)$ /U es equilibrada$\}$ por lo demostrado, tenemos que β es un sistema fundamental de vecindades del cero, constituido por vecindades equilibradas y absorbentes (toda vecindad del cero es absorbente). Luego (a) es claro, y (b) es la parte ii) de la proposición 1.3. Para (c) es suficiente observar que existe $\lambda \in K$ tal que $0 < |\lambda| < 1$, ya que K es no discreto y λU ($U \in \beta$) es vecindad del cero por corolario parte iii) y equilibrada (note que si $|u| \leq 1$ entonces $u = \lambda v \lambda^{-1}$, donde $|v| \leq 1$). Finalmente la topología de V es invariante bajo traslación por proposición 1.1.

Recíprocamente sea β una topología invariante bajo traslación en V que posee una base de vecindades del cero con las propiedades a), b) y c).

Tenemos que demostrar la continuidad de la adición y de la ponderación.

Para demostrar la continuidad de la adición, sean a, b $\in$ V y c = a+b. Si U $\in$ β entonces existe U' $\in$ β tal que U'+U' $\subseteq$ U. Ahora a+U' $\in$ $\mathcal{V}(a,\tau)$, b+U' $\in$ $\mathcal{V}(b,\tau)$, c+U' $\in$ $\mathcal{V}(c,\tau)$ y además (a+U')+(b+U') $\subseteq$ c+U. Luego la adición es continua.

Probemos ahora la continuidad de la ponderación en (ξ,a) $\in$ K x V. Si W $\in$ β, entonces ξa+W $\in$ $\mathcal{V}(a,\tau)$. Debemos encontrar vecindades de ξ en K y de a en V, tales que su producto sea sub-conjunto de ξa+W. Es decir, debemos probar que existen S $\in$ β y α > 0 tal que x $\in$ a+S, $|\lambda - \xi| < \alpha \Rightarrow$ λx $\in$ ξa+W.

En primer lugar notemos que:
$\lambda x - \xi a = \xi(x - a) + (\lambda - \xi)a + (\lambda - \xi)(x - a)$, luego el problema se reduce a encontrar S $\in$ β y α > 0 tales que S + S + S $\subseteq$ W y ξ(x - a), (λ - ξ)a, (λ - ξ) (x - a) $\in$ S.

Comencemos la construcción de S y α. Por (b) existe U $\in$ β tal que U + U + U $\subseteq$ W. Como U es absorbente, existe ρ > 0 tal que ka $\in$ U, $\forall$ k $\in$ K, $|k| \leq \rho$.

(1) Luego basta hacer $|\lambda - \xi| \leq \rho$ para obtener (λ - ξ) a $\in$ U.

(2) Si $|k| \leq 1$ y (x - a) $\in$ U siendo U equilibrado, k(x - a) $\in$ U.
Luego (λ - ξ) (x - a) $\in$ U, si $|\lambda - \xi| \leq 1$.

Por consiguiente (λ - ξ) a y (λ - ξ) (x - a) pertenecen a U si $|\lambda - \xi| \leq$ min {1,ρ}. Además dados U $\in$ β y ξ $\in$ K por lo demostrado anteriormente, existe T $\in$ β tal que ξT $\subseteq$ U.

Escogiendo S $\in$ β de modo que S $\subseteq$ T $\cap$ U, resulta:

S $\subseteq$ U y ξS $\subseteq$ ξT $\subseteq$ U.

Luego para todo x de V, y todo λ de K se tiene:

x $\in$ a+S, $|\lambda - \xi| \leq \alpha$ = min {1,ρ} $\Rightarrow$

$\xi(x - a)$, $(\lambda - \xi)a$, $(\lambda - \xi)(x - a) \in \xi S \subseteq U$, y por consiguiente $\lambda x - \xi a \in U + U + U \subseteq W$, es decir $\lambda x \in \xi a+W$, para todo $x \in a+S$ y todo $|\lambda - \xi| < \alpha$. Luego la ponderación es continua.

Corolario.

Si V_K es un espacio vectorial y β una base de filtro de V con las propiedades a), b) y c) del teorema 1.1, entonces β es una base del cero para una única topología τ tal que (V,τ) es e.v.t. sobre K.

<u>Demostración</u>. La demostración se basará en el teorema que sostiene que una topología se puede describir a partir de los filtros de vecindades de cada punto, es decir: Si a cada elemento x de un conjunto X, se hace corresponder un conjunto $W(x)$ de partes de X, de manera que se verifican:

i) Si $W \subseteq X$ y si W contiene un $V \in W(x)$, entonces $W \in W(x)$.
ii) La intersección de una colección finita de elementos de $W(x)$, pertenecen a $W(x)$.
iii) $x \in V$, para cada $V \in W(x)$.
iv) Para cada $V \in W(x)$, existe $W \in W(x)$ tal que para cada $y \in W$, $V \in W(y)$.

Entonces existe una única topología sobre X, tal que para cada $x \in X$, $W(x)$ es el conjunto de vecindades de x en dicha topología.

La idea es entonces construir esta topología sobre V, definiendo convenientemente los filtros de vecindades de cada punto de V. Para cada x de V, definamos $W(x) = \{W \subseteq V \;/\; \exists\, U \in \beta: x+U \subseteq W\}$; como β no es vacío, $W(x)$ también no lo es y siendo cada $U \in \beta$ equilibrado $x \in x+U$. Luego sólo hay que probar i), ii) y iv) del teorema antes mencionado. i) es claro, demostraremos ii);

Si $W_j \in W(x)$, $j = 1,\ldots\ldots,n$, entonces existen $U_j \in \beta$ tales que $x+U_j \subseteq W_j$, $j = 1,\ldots\ldots,n$.

Como β es base de filtro, existe $U \in \beta$ tal que $U \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U_j$ de don de $x+U \subseteq x+ \bigcap_{j=1}^{n} U_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} W_j$; luego $\bigcap_{j=1}^{n} W_j \in W(x)$.

Demostraremos iv):

Si $V \in W(x)$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x+U \subseteq V$, pero por parte b) del teorema 1.1, $U \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists\, U' \in \mathcal{B}$ tal que $U'+U' \subseteq U$.

Si $W = x+U'$, $y \in W$, entonces $y+U' \in W(y)$, y además $y+U' \subseteq x+U'+U' \subseteq x+U \subseteq V$.

Luego hemos demostrado que $V \in W(y)$, $\forall\, y \in W = x+U' \in W(x)$.

En estas condiciones por el teorema recordado, existe una única topología τ sobre V, tal que para cada $x \in V$, $W(x)$ es el conjunto de vecindades de x en (V,τ).

Por el teorema 1.1, la adición y ponderación son τ - continuas y por lo tanto (V,τ) es un e.v.t.

1.5. Otros Ejemplos de Espacios Vectoriales Topológicos.

El teorema 1.1 junto con su corolario, nos permite describir espacios vectoriales topológicos por medio de una base de vecindades del cero que satisfagan las condiciones a), b) y c) de dicho teorema, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

1. Sea K un campo valuado no discreto y $A \subseteq K$, $A \neq \phi$. Definimos $K^A = \{f/f: A \to K\}$. Entonces $(K^A,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre K.

   Ahora tenemos $H \subseteq A$, H finito y $\varepsilon > 0$; se construye $V(H,\varepsilon) = \{f \in K^A / |f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\, x \in H\}$. Es fácil verificar que $\mathcal{B} = \{V(H,\varepsilon) /\ H \subseteq A$, H finito, $\varepsilon > 0\}$ es base de vecindades del cero. En efecto:

   $0 \in V(H,\varepsilon)$, $\forall\, H \subseteq A$, H finito, $\varepsilon > 0$, o sea $V(H,\varepsilon) \neq \phi$ y $\mathcal{B} \neq \phi$.

Además dado $V(H_1,\varepsilon_1)$ y $V(H_2,\varepsilon_2) \in \beta$, existe $V(H,\varepsilon) \in \beta$, con

$H = H_1 \cap H_2$ y $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ tal que:

$V(H,\varepsilon) \subseteq V(H_1,\varepsilon_1) \cap V(H_2,\varepsilon_2)$.

β satisface a), b) y c) del teorema 1.1.

a) Para todo $W \in \beta$, existe $U \in \beta$ tal que $U+U \subseteq W$. Tome $U=V(H,\varepsilon/2)$.

b) Todo $W \in \beta$ es equilibrado y absorbente. Para demostrar que $V(H,\varepsilon) \in \beta$ es equilibrado, basta demostrar que $\alpha V(H,\varepsilon) \subseteq V(H,\varepsilon)$ con $|\alpha| \leq 1$. Si $g \in \alpha V(H,\varepsilon)$ entonces $g = \alpha f$, $f \in V(H,\varepsilon)$; o sea, para $x \in H$, $|g(x)| = |\alpha f(x)| = |\alpha|\cdot|f(x)| \leq 1 \cdot |f(x)| = |f(x)|$, es decir $g \in V(H,\varepsilon)$.

Para demostrar que $V(H,\varepsilon) \in \beta$ es absorbente, sea $f \in K^A$, entonces $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, con $x_1, \ldots, x_n \in H$ es una sucesión finita.

Sea $\lambda_o = \max\{\frac{1}{\varepsilon}|f(x_1)|, \ldots\ldots, \frac{1}{\varepsilon}|f(x_n)|\}$. Luego $\frac{1}{\varepsilon}|f(x)| \leq \lambda$ $\forall$ $x \in H$, $|\lambda| \geq \lambda_o$. Ahora $f(x) \leq \lambda\varepsilon$, por lo tanto $f \in \lambda V(H,\varepsilon)$.

c) Es obvio que existe $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| < 1$, tal que $\forall$ $V \in \beta$, implica que $\lambda V \in \beta$, pues para todo $\lambda \in K$ con $|\lambda| \leq 1$ $\lambda V \subseteq V$, $V \in \beta$.

El conjunto β induce una topología lineal en K^A.

2. Sea K un campo valuado no discreto y (X,τ) espacio topológico. Definimos: $\mathcal{C}_K(X) = \{f \in K^X / f \text{ continua}, \sup_{t\in X}|f(t)| < \infty\}$, es un subespacio vectorial de K^X. Se construye

$U_n = \{f \in \mathcal{C}_K(X) / \sup_{t\in X} f(t) < \frac{1}{n}\}$, entonces $\beta = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades del cero, satisfaciendo a), b) y c) del teorema 1.1. En efecto, β es una base de filtro de vecindades del cero, pues la función idénticamente nula pertenece a U_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $U_{n_1}, U_{n_2} \in \beta$, existe $U_n \in \beta$ tal que $U_n \subseteq U_{n_1} \cap U_{n_2}$. (Tome $n = \max \{n_1, n_2\}$).

Es evidente que U_n es equilibrado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar que U_n es absorbente, tomamos $f \in \mathcal{C}_K(X)$, $U_n \in \beta$ y $\sup_{t \in X} |f(t)| = \alpha$; pongamos $\lambda_o = \frac{1}{n\alpha}$, luego para $|\lambda| < |\lambda_o|$ se tiene $\sup_{t \in X} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in X} |f(t)| < \frac{1}{n\alpha} \cdot \alpha = \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda f \in U_n$.

Para demostrar b), es decir, dado $U_n \in \beta$ existe $U_{n'} \in \beta$ tal que $U_{n'} + U_{n'} \subseteq U_n$, basta tomar $n' = \frac{1}{2n}$.

Es evidente c), es decir, si $|\lambda| \leq 1$ se tiene $\lambda U_n \subseteq U_n$.

3. Sea K un campo valuado no discreto y $K[t] = \{ \sum_{i=0} \alpha_i t^i / \alpha_i \in K\}$ el anillo de polinomios sobre K.

Sea $r \in \mathbb{R}$, r fijo tal que $0 < r \leq 1$.

Definimos $V_\varepsilon = \{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i / \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|^r \leq \varepsilon \}$. No es difícil demostrar que $\beta = \{V_\varepsilon / \varepsilon < 0\}$ es base de vecindad del cero, satisfaciendo a), b) y c) del teorema 1.1, por lo cual $K[t]$ es e.v.t. sobre K con la topología derivada de la base.

1.6. Uniformidad y Espacios Vectoriales Topológicos.

Todo espacio vectorial topológico es uniformizable y de este hecho derivan importantes consecuencias.

<u>Proposición 1.4</u>. Si (V,τ) e.v.t. y $x \in V$, entonces cada vecindad de x contiene una vecindad cerrada de x. En particular, la familia de todas las vecindades cerradas del cero, forman una base para las vecindades del cero.

<u>Demostración</u>. Para cada vecindad del cero U, existe otra W tal que $W+W \subseteq U$. Como $y \in \overline{W}$, equivale a decir $(y - W) \cap W \neq \emptyset$, se sigue que $\overline{W} \subseteq W+W \subseteq U$. De aquí $x+U$ contiene una vecindad cerrada $x+\overline{W}$.

Corolario 1.

Si (V,τ) e.v.t., entonces el filtro de vecindades de cero admite un sistema fundamental de vecindades equilibradas y cerradas.

<u>Demostración</u>. Si W es una vecindad del cero, entonces existe U vecindad del cero y un número real $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda U \subseteq W$, cuando $|\lambda| \leq \varepsilon$, por la continuidad da la ponderación, y de aquí $U' = \bigcup\{\lambda U / |\lambda| \leq \varepsilon\}$ es una vecindad del cero contenida en W y obviamente equilibrada. Ahora por proposición anterior se sigue que existe una vecindad cerrada y como la clausura sigue siendo equilibrada, sigue el corolario.

Corolario 2.

Todo espacio vectorial topológico verifica el axioma de regularidad.

<u>Demostración</u>. Basta recordar que un espacio topológico cumple el axioma de regularidad si cada punto del espacio admite un sistema fundamental de vecindades cerradas.

<u>Definición</u>. Una uniformidad sobre un espacio vectorial V_K es llamada invariante bajo traslación, si tiene una base η tal que $(x,y) \in N$ es equivalente con $(x+z,y+z) \in N$ $\forall$ $z \in V$ y $N \in \eta$.

Ahora demostraremos que todo e.v.t. es uniformizable.

Proposición 1.5. La topología de cualquier espacio vectorial topológico puede ser derivada de una única uniformidad η invariante bajo traslación. Si β es cualquier base de vecindades del cero, la familia $N_U = \{(x,y)/\ (x - y) \in U\}$, $U \in \beta$ es una base para η.

Demostración. Sea (V,τ) e.v.t. con β base de vecindad de cero. Por demostrar $\tilde{\eta} = \{N_U/\ U \in \beta\}$ forma una base de filtro sobre V x V.

i) $\tilde{\eta} \neq \phi$, pues $\forall\ U \in \beta$, $0 \in U \Rightarrow (0,0) \in N_U$ y $N_U \neq \phi\ \forall\ N_U$.

ii) $N_U, N_W \in \tilde{\eta} \Rightarrow U \subseteq W$ o $W \subseteq U$, sin pérdida de generalidad.

$U \subseteq W = N_U \subseteq N_U\ N_W$. Luego $\tilde{\eta}$ es una base de filtro sobre V x V, que es una base para la uniformidad $\tilde{\eta}$ invariante bajo la traslación produciendo la topología τ de V.

Si η_1 es otra uniformidad con estas propiedades existe una base $\mathfrak{m}$ de η_1 constituida de conjuntos invariantes bajo traslación tal que los conjuntos $U_M = \{x - y\ /\ (x,y) \in M\}$, $M \in \mathfrak{m}$, forman una base de vecindades del cero para $\tilde{\tau}$ y puesto que $U_M \subseteq U$ si y sólo si $M \subseteq N_U$, se tiene que $\eta_1 = \eta$.

El hecho de que la topología de un e.v.t. se derive de una uniformidad permite hablar de filtro de Cauchy y de Completitud en ese espacio.

$A \subseteq V$ es completo si y sólo sí cada filtro de Cauchy en A converge a un elemento de A (A con la uniformidad inducida).

Un e.v.t. V es un e.v. Hausdorff si y sólo sí V es un espacio topológico T_2. Luego V es T_2 si y sólo sí $\bigcap \{U/\ U \in \mathcal{U}\} = \{0\}$ donde $\mathcal{U}$ es cualquier base de vecindades de cero en V.

Sea (V,τ) un e.v.t. Por subespacio vectorial topológico de V, entenderemos un subespacio M de V_K, provisto de la topología inducida de V.

Teorema 1.2. (Complementación de V).

Si V un e.v.t. Hausdorff, entonces existe un e.v.t. completo Hausdorff $\tilde{V}$ sobre K, tal que $V \subseteq \tilde{V}$ es denso. $\tilde{V}$ es único salvo isomorfismo. Además para cualquier base β de vecindades del cero en V, la familia $\beta = \{\bar{U} / U \in \beta\}$ de clausura en $\tilde{V}$ es una base de vecindades del cero en $\tilde{V}$.

<u>Demostración</u>. Asumamos conocido la existencia de un espacio uniforme Hausdorff completo $\check{V}$, el cual contiene a V como subespacio denso. $\tilde{V}$ es único salvo isomorfismo uniforme. Por proposición anterior:

$$\left.\begin{array}{l} + : V \times V \to \tilde{V} \\ \quad (x,y) \to x+y \\ \bullet : K \times V \to \tilde{V} \\ \quad (\lambda, x) \to \lambda x \end{array}\right\} \quad \text{Son uniformemente continuas.}$$

En efecto : $(V,\tau) \times (V,\tau) \overset{c.}{\to} (V,\tau)$

$$\underbrace{(V,\mathcal{U}_\tau) \times (V,\mathcal{U}_\tau) \to (V,\mathcal{U}_\tau) \overset{u.c}{\to} (\tilde{V},\tilde{\mathcal{U}})}_{+}$$

($\mathcal{U}_\tau$: uniformidad derivada de τ)

Por demostrar: dado $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$, $\exists\ U \times U \in \mathcal{U}_\tau \times \mathcal{U}_\tau$ tal que $U+U \subseteq \tilde{U}$.

Sea β base de vecindades del cero en τ, entonces $\{N_V / V \in \beta\}$ en base de $\mathcal{U}_\tau$.

Por continuidad de la adición, dado $T \in \tau$, $\exists\ S \times S \in \tau \times \tau$ tal que $S+S \subseteq T$ (donde S y T son vecindades del cero).

Pero asociado a S tenemos N_S y a T, N_T. Ahora, dado $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ $\exists\ U \in \mathcal{U}_\tau$ tal que $U \subseteq \tilde{U}$ pero $\{N_V\}_{V \in \beta}$ es base de $\mathcal{U}_\tau \Rightarrow \exists\ T \in \tau$ tal que $N_T \subseteq U$.

Luego, si probamos que $N_S + N_S \subseteq N_T \subseteq U \subseteq \tilde{U}$ tendríamos que dado

$U \in \tilde{\mathcal{U}}$, $\exists\ N_S+N_S \in \mathcal{U}_\tau \times \mathcal{U}_\tau$ tal que $N_S+N_S \subseteq \tilde{U}$, lo que probaría la continuidad uniforme.

En efecto: $(a,b) \in N_S \Rightarrow a - b \in S$

$(c,d) \in N_S \Rightarrow c - d \in S$

$(a,b))+(c,d) = (a+c,b+d) \in N_T$, puesto que $(a+c)-(b+d)=\underset{\in S}{(a-b)}+\underset{\in S}{(c-d)} \in T$.

Luego la adición y ponderación tienen únicas extensiones continuas:

$+ : \tilde{V} \times \tilde{V} \to V$ y $\cdot : K \times V \to V$ que transforma a $\tilde{V}$ en un espacio vectorial topológico sobre K.

Puesto que $\{N_V / V \in \beta\}$ es base la uniformidad $\mathcal{U}$ de V, las clausuras $\overline{N}_V$ en base de la uniformidad $\hat{\mathcal{U}}$ de $\tilde{V}$ y además $N_{\overline{V}}=\overline{N}_V\ \forall\ V \in \beta$. (Se prueba usando la continuidad $\tilde{V} \times \tilde{V} \to \tilde{V} : (\tilde{x},\tilde{y}) \to (\tilde{x}-\tilde{y})$)

Luego $\tilde{\beta} = \{\overline{V} / V \in \beta\}$ es una base de vecindades de cero en $\tilde{V}$.

Por demostrar que la topología $\tilde{\tau}$ definida por $\hat{\mathcal{U}}$ hace a $\tilde{V}$ un espacio vectorial topológico.

Es claro que $\tilde{\tau}$ es invariante bajo traslaciones pues estamos tomando los $\overline{N}_V = N_{\overline{V}}$.

Además como β satisface:

a) $\forall\ V \in \beta$, $\exists\ U \in \beta$ tal que $U+U \subseteq V$.

b) $\forall\ V \in \beta$ es equilibrado y absorbente.

c) $\forall\ \lambda \in K$, $0 < |\lambda| < 1$ tal que $V \in \beta \Rightarrow \lambda V \in \beta$.

Se deduce que $\tilde{\beta}$ satisface a) y c) puesto que

a) $\overline{U+U} = \overline{U}+\overline{U} \subseteq \overline{V}$ y

c) $V \in \beta \Rightarrow \lambda V \in \beta \Longrightarrow \lambda\overline{V} \in \tilde{\beta}$ es decir $\overline{V} \in \tilde{\beta} = \lambda\overline{V} \in \tilde{\beta}$.

Por demostrar b) con lo cual probaríamos que $(\tilde{V},\tilde{\tau})$ es e.v.t.

Sea $V \in \beta$, $\exists$ U vecindad de cero equilibrada tal que $U+U \subseteq U$. Luego $\overline{U+U}$ en $\tilde{V}$ es vecindad de cero equilibrada y $\overline{U}+\overline{U} \subseteq \overline{V}$.

Por demostrar que es absorbente.

Sea $\tilde{x} \in \tilde{V}$, $\exists$ $\mathcal{F}$ filtro de Cauchy en V convergente a $\tilde{x}$ y $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subseteq V$.

Sea $x_o \in F$ arbitrario, puesto que U es absorbente $\exists\, \lambda \in K$ tal que $x_o \in \lambda U$ y como U es absorbente podemos asumir que $|\lambda| \geq 1$.

Además $F - x_o \subseteq U \Rightarrow F \subseteq x_o+U$ y $\tilde{x} \in F \subseteq (\overline{U+U})$ es decir $\lambda\tilde{x} \in \overline{U+U}\ \forall\ \tilde{x} \in \tilde{V}$.

La unicidad, se obtiene del hecho de que $(\tilde{V},\tilde{\tau})$ como espacio uniforme, es único.

CAPITULO II. FORMACION DE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

Es obvio que si W es subespacio de V_K y (V,τ) es e.v.t. entonces W es e.v.t. con la topología inducida, pues la continuidad de la adición y ponderación se mantienen. Si tenemos una familia de e.v.t. ¿es su producto un e.v.t.? Si W es subespacio vectorial de V. ¿Es V/W, el espacio cuociente un e.v.t.?; en este capítulo desarrollaremos estos conceptos.

2.1. Productos de Espacios.

Sea $\{V_\alpha /\ \alpha \in A\}$ una familia de espacios vectoriales sobre el mismo campo K, su producto cartesiano $V = \pi_\alpha V_\alpha$ es un espacio vectorial sobre K con la adición y ponderación definidas por:

$(x_\alpha)+(y_\alpha) = (x_\alpha+y_\alpha)$; $\lambda(x_\alpha) = (\lambda x_\alpha)$ con (x_α), $(y_\alpha) \in V$ y $\lambda \in K$.

Si $(V_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha\in A}$, son e.v.t. sobre K, entonces $V = \pi_{\alpha\in A} V_\alpha$ es e.v.t. bajo la topología producto $\tau = \pi_{\alpha\in A} \tau_\alpha$. Para demostrar la continuidad de la adición y ponderación en V, basta aplicar la continuidad de cada una de sus componentes.

Además es conocido, de topología genera, que (V,τ) es un espacio Hausdorff y un espacio uniforme completo, respectivamente, si y sólo sí cada factor lo es.

Sea V_K espacio vectorial y $\{M_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ subespacios de V_K tal que V_K es suma directa de los M_i, $(i = 1, 2, 3,\ldots\ldots,n)$. Se sigue que cada $x \in V$ tiene una única representación
$x = \Sigma_i x_i$, $x_i \in M_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ y la función $(x_1, x_2,\ldots,x_n) \to \Sigma_i x_i$ es un isomorfismo algebraico de πM_i sobre V. La función $\mu_i : x \to x_i$ es llamada la proyección de V sobre M_i asociada con esta descomposición.

Ahora si $(V,\mathcal{T})$ es e.v.t. y V_K está descompuesto algebraicamente en los $M_i(i=1,2,\ldots,n)$ subespacios de V, cada proyección μ_i es una función abierta de V sobre M_i. Ya que la adición es continua, es claro que la función $\psi : \pi M_i \to V$ tal que $\psi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_i x_i$, es continua. Si ψ es un homeomorfismo, V es llamada la suma directa topológica de los subespacios $M_i(i=1,2,\ldots,n)$ y anotamos $V = M_i \oplus \ldots \oplus M_n$.

<u>Proposición 2.1</u>. Sea (V,τ) e.v.t. y V es la suma directa algebraica de n subespacios $M_i(i=1,2,\ldots,n)$. Entonces $V = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ si y sólo sí las proyecciones μ_i asociadas son continuas.

<u>Demostración</u>. Esta sigue de la definición de la topología producto ya que la función $\psi^{-1} : x \to (\mu_1 x,\ldots.,\mu_n x)$ de V sobre $\pi_i M_i$ es continua si y sólo sí cada μ_i lo es.

Un subespacio N de V_K, (V,τ) e.v.t., es llamado subespacio complemento de M si $V = N \oplus M$.

2.2. Espacio Cuociente.

Sean (V,τ) e.v.t., M un subespacio de V y ϕ el homomorfismo canónico de V en V/M (esto es, la función que a cada $v \in V$ le asocia la clase de equivalencia $\overline{v} = v+M$). La topología cuociente $\tilde{\tau}$ está definida por la topología más fina en V/M que hace continua a ϕ. Luego se tiene que los conjuntos abiertos en V/M son los conjuntos $\phi(H)$ tal que H+M es abierto en V. Como $G \neq M$ es abierto si G lo es, tenemos que $\phi(G)$ es abierto en V/M para todo abierto G de V, es decir, ϕ es una función abierta. Se sigue que $\phi(\beta)$ es una base de vecindades del cero en V/M para cada β, base se vecindades del cero en V, ya que ϕ es lineal, $\tilde{\tau}$ es invariante bajo traslación y $\phi(\beta)$ satisface condición a), b) y c) del teorema 1.1, sí β las satisface.

Entonces $(V/M,\tilde{\tau})$ es e.v.t. sobre K, llamado espacio cuociente de (V,τ) sobre M.

Proposición 2.2. Sean (V,τ) es e.v.t. y M subespacio de V. Entonces V/M es Hausdorff si y sólo sí M es cerrado en V.

Demostración. Si V/M es Hausdorff, el conjunto $\overline{0} \in V/M$ es cerrado; por la continuidad de ϕ, $M = \phi^{-1}(0)$ es cerrado.

Recíprocamente, si $\overline{x} \neq \overline{0}$ en V/M, entonces $\overline{x} = \phi(x)$ donde $x \notin M$. Si M es cerrado, el complemento U de M en V es vecindad de x y de aquí $\phi(U)$ es vecindad de $\overline{x}$ que no contiene al cero. Entonces $\phi(U)$ contiene una vecindad cerrada de $\overline{x}$, luego V/M es espacio de Hausdorff.

Existe una interesante relación entre cuociente y suma directa.

Proposición 2.3. Sea (V,τ) e.v.t. y sea V suma directa algebraica de los subespacios M y N. Entonces V es la suma directa topológica de M y N

($V = M \oplus N$) si y sólo sí la función v que asocia a cada clase de equivalencia módulo M su único representante en N, es un homeomorfismo del e.v.t. $(V/M,\tilde{\tau})$ sobre el e.v.t. (N,τ_N).

Demostración. Sea μ la proyección de V sobre N y ϕ el homeomorfismo canónico de V sobre V/M. Pongamos $\mu = v \circ \phi$. Sea $V = M \oplus N$. Ya que ϕ es abierta y μ continua, v es continua; y como ϕ es continua y μ es abierta, v es abierta.

Recíprocamente si v es un homeomorfismo entonces v es continua y luego μ es continua, lo cual implica $V = M \oplus N$.

2.3. Espacios Vectoriales Topológicos de Dimensión Finita.

Entenderemos por dimensión de un e.v.t. (V,τ) sobre K, la dimensión de V_K como espacio vectorial sobre K. Como K es un espacio vectorial de dimensión uno sobre el mismo, se puede considerar como e.v.t. ya que es evaluado. Sea (K_o,τ_o) e.v.t. en que consideramos a K como espacio vectorial sobre si mismo y τ_o la topología inducida del módulo en K.

Proposición 2.4. Todo e.v.t. (V,τ) Hausdorff de dimensión uno sobre K es

Demostración. Por proposición 1.1 se demostró que para cada $x_o \in V$, $\psi_{x_o} : K_o \to V$, $\psi_{x_o}(\lambda) = \lambda x_o$ es continua. Además como V es de dimensión uno, esta función es un isomorfismo algebraico de K_o en V. Para ver que $\lambda x_o \to \lambda$ es continua, es suficiente demostrar que lo es en el cero de V. Sea $\varepsilon < 1$ un real positivo, ya que K no es discreto, existe $\lambda_o \in K$ tal que $0 < |\lambda_o| < \varepsilon$, y ya que V es Hausdorff por hipótesis, existe una vecindad equilibrada del cero $U \subseteq V$ tal que $\lambda_o x_o \notin U$. De aquí $\lambda x_o \in U$ implica $|\lambda| < \varepsilon$.

Para $|\lambda| \geq \varepsilon$ implicaría $\lambda_o x_o \in U$, pues U es equilibrado y eso es una contradicción.

Ahora podemos demostrar un teorema fundamental en los espacios vectoriales topológicos de dimensión finita.

Teorema 2.1.

Todo e.v.t. Hausdorff (V,τ) de dimensión n sobre un campo valuado no discreto completo K es

Demostración. La demostración sigue por inducción sobre la dimensión de V.

La proposición 2.4 demustra que el teorema es válido para n = 1.

Supongamos que para k = n - 1 es válida. Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de V, V es la suma directa de los subespacios M y N con bases $\{x_i, \ldots, x_{n-1}\}$ y $\{x_n\}$ respectivamente. Por la hipótesis de inducción, M es homeomórdico con K_o^{n-1}. Ahora ya que K_o es completo, M es completo y como V es Hausdorff M es cerrado en V. Por la proposición 2.2 V/M es Hausdorff y claramente de dimensión uno y por proposición 2.4 la función v que asocia a cada clase de equivalencia módulo M su único representante en N es un homeomorfismo. Sigue de la proposición 2.3 que $V = M \oplus N$, lo cual significa que $(\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n) \to \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ es un homeomorfismo de $K_o^{n-1} x\, K_o = K_o^n$ sobre V.

El teorema puede ser también enunciado de la siguiente manera:

Si K es un campo valuado no discreto completo, entonces la topología producto en K_o^n es la única topología Hausdorff que hace continua adición y ponderación.

Del teorema se desprenden importantes consecuencias.

Proposición 2.5. Sea V un e.v.t. sobre un campo valuado no discreto completo K. Si M es un subespacio cerrado de V y N es un subespacio de V de divensión finita, entonces M+N es cerrado en V.

Demostración. Sea ϕ un homeomorfismo natural de V sobre V/M; V/M es Hausdorff por proposición ya que $\phi(N)$ es un subespacio de V/M de dimensión finita el cual es completo por teorema 1.2, y de aquí cerrado en V/M. Esto implica que $M+N = \phi^{-1}(\phi(N))$ es cerrado ya que ϕ es continua.

Proposición 2.6. Sea K completo, N e.v.t. de dimensión finita y Hausdorff sobre K, y sea (V,τ) e.v.t. sobre K. Cada función lineal de N en V es continua.

Demostración. El resultado es trivial si N tiene dimensión 0. Si N tiene dimensión positiva n, es isomorfo con K_o^n por el teorema 2.1. Pero cada función lineal de K_o^n en V es necesariamente de la forma $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n) \to \lambda_1 y_1 + \ldots\ldots + \lambda_n y_n$ donde $y_i \in V$ y de aquí continúa por la continuidad de la adición y ponderación.

Proposición 2.7. Sea (V,τ) un e.v.t. sobre un campo completo K y sea M un subespacio cerrado de dimensión finita. Entonces $V = M \oplus N$, para todo subespacio N complemento de M.

Demostración. Se tiene que V/M es e.v.t. de dimensión finita, el cual es Hausdorff por proposición.

Ahora por proposición anterior, la función v de V/M en N, que asocia a cada elemento de V/M su único representante en N, es continua. Por proposición, esto implica que $V = M \oplus N$, ya que la proyección $\mu = v \circ \phi$ es continua.

CAPITULO III. ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS.

La teoría general de e.v.t. puede desarrollarse en diferentes direcciones, pero en su todo es una teoría poco interesante por el gran número de resultados valiosos, tanto teóricos como aplicados, pero poco manejables. El concepto de e.v.t. como lo hemos definido antes, es demasiado general para soportar una teoría rica, como por otra parte, el concepto de espacio de Banach es demasiado estrecho. La noción más adecuada para construir una teoría aplicable más satisfactoria es la de localmente convexo. En este capítulo presentaremos las propiedades elementales de los e.v.t. en los cuales cada punto tiene una base de vecindades convexas.

3.1. Conjuntos Convexos.

En lo que sigue K será siempre el cuerpo de los números reales o el de los complejos y V_K un espacio vectorial sobre K.

Definición 3.1.

a) Un subconjunto A de un espacio vectorial V_K, es convexo si $x \in A$, $y \in A$ se tiene que $\lambda x+(1-\lambda)\ y \in A$ para todo escalar λ tal que $0 < \lambda < 1$.

b) Una parte A de V_K es absolutamente convexa (disco) si es equilibrada y convexa.

Proposición 3.1. Sea A parte de V_K espacio vectorial entonces, A es un disco si y sólo sí

$$\forall\ \alpha, \beta \in K,\ |\alpha|+|\beta| \leq 1 \Rightarrow \alpha A+\beta A \subseteq A$$

Demostración. Supongamos que la condición se satisface, entonces
$|\alpha| \leq 1 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \alpha A \subseteq A$, es decir A es equilibrado.
$\alpha+\beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0 \Rightarrow \alpha A+\beta A \subseteq A$, es decir A es convexo.

Luego A es un disco.

Recíprocamente si A es un disco,
$\forall\ \alpha, \beta \in K$, con $0 < |\alpha|+|\beta| \leq 1$, $\forall\ x, y \in A$ tenemos:

$$\alpha x+\beta y = (|\alpha|+|\beta|)\ \{\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}(\frac{\alpha}{|\alpha|}\ x)+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}(\frac{\beta}{|\beta|}\ y)\},$$

$\in (|\alpha|+|\beta|)\ \{\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|} A + \frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|} A\}$, luego $\alpha A+\beta A \subseteq (|\alpha|+|\beta|)A \subseteq A$.

Es inmediato que la intersección de cualquier familia de conjuntos convexos (respectivamente equilibrados, absolutamente convexos) es convexa (respectivamente equilibrada, absolutamente convexa).

En consecuencia podemos pensar en un conjunto convexo (respectivamente equilibrado, absolutamente convexo) que contiene a un subconjunto dado.

Definición 3.2. Sea A una parte de V_K espacio vectorial sobre K, entonces:

a) La cápsula convexa de A es:

$C(A) = \bigcap \{B \subseteq V / B \text{ convexo}, A \subseteq B\}$

b) La cápsula absolutamente convexa o disqueada de A es:

$\Gamma(A) = \bigcap \{B \subseteq V / B \text{ absolutamente convexo}, A \subseteq B\}$

c) La cápsula equilibrada de A es:

$e(A) = \bigcap \{B \subseteq V / B \text{ equlibrado}, A \subseteq B\}$

Proposición 3.2. Sea A una parte de V, entonces:

1) $C(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i / \lambda_i \geq 0,\ a_i \in A,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$

2) $\Gamma(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i / \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1,\ a_i \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$

3) $e(A) = \{\alpha x / |\alpha| \leq 1,\ x \in A\} = \bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha A$

Demostración.

Demostración 1). Es trivial que:

$$C(A) \subseteq \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i / \lambda_i \geq 0,\ a_i \in M,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Para la inclusión recíproca, comenzaremos probando que si B es convexo y si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ es una sucesión finita de elementos de B y $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ es una sucesión de escalares tales que:

$$\lambda_i \geq 0\ (1 \leq i \leq n),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \quad \text{Entonces } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in B.$$

Si n = 1 esto es trivial y si n = 2 se reduce a la definición de convexo. Supongamos que la afirmación es válida para n-1. Es claro que podemos suponer que $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq n$. Sean

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i,\ \beta = \lambda_n,\ u_i = \frac{\lambda i}{\alpha}\ (1 \leq i \leq n-1).$$

Puesto que $\sum_{i=1}^{n-1} u_i = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$, por hipótesis de inducción:

$\sum_{i=1}^{n-1} u_i x_i \in B$; y luego siendo $\alpha+\beta = 1$, por la definición de convexo se tiene $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \beta x_n = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} u_i x_i + \beta x_n \in B$, con lo cual la afirmación anterior está probada.

Sea ahora $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ una sucesión finita de elementos de A y $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ una sucesión de escalares de K tales que:

$\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, entonces siendo $A \subseteq C(A)$, por lo demostrado anteriormente $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in C(A)$. Luego,

$\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i / \lambda_i \geq 0,\ a_i \in A,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(A)$, y la tesis está probada.

Demostración 2). Su demostración es análoga a la de 1).

Demostración 3). Sea $B \subseteq V$ equilibrada tal que $A \subseteq B$ y sea $y = \alpha x$ con $|\alpha| \leq 1$, $x \in A$. Entonces $x \in A$, $|\alpha| \leq 1 \Longrightarrow y = \alpha x \in \alpha A \subseteq \alpha B \subseteq B$. Luego $\{\alpha x / |\alpha| \leq 1, x \in A\} \subseteq B$, para cualquier B equilibrado que contiene A, es decir $\{\alpha x / |\alpha| \leq 1, x \in A\} \subseteq e(A)$.

Recíprocamente, sea $z \in e(A)$, entonces z pertenece a cualquier equilibrado que contiene A; en particular $\{\alpha x / |\alpha| \leq 1, x \in A\}$ es un equilibrado que contiene A, luego $\{\alpha x / |\alpha| \leq 1, x \in A\} \_ e(A)$.

Proposición 3.3. Sea (V,τ) un e.v.t. y A y B subcojuntos convexos de V. Entonces $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $A+B$ y αA $(\alpha \in K)$ son convexos.

Demostración. La convexidad de $\mathring{A}$ es inmediata de proposición. Ahora sea λ fijo, $0 < \lambda < 1$, entonces $\lambda A+(1-\lambda)A \subseteq A$, luego $\lambda\overline{A}+(1-\lambda)\overline{A} \subseteq \overline{A}$ por la continuidad de la adición y ponderación, esto es $\overline{A}$ convexo. No es difícil probar la convexidad de $A+B$ y αA.

3.2. **Semi-normas.**

Definición 3.3. Sea V_K e.v. sobre K, campo valuado. Una semi-norma sobre V es una aplicación $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) p es sub-aditiva : $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, $\forall\ x, y \in V$.

b) p es absolutamente homogénea : $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall\ x \in V$, $\forall\ \lambda \in K$.

La familia de todas las semi-normas sobre V la identificaremos $S(V)$. Es inmediato que la aplicación nula es un elemento de $S(V)$. El conjunto de todos los discos absorbentes sobre V lo designaremos por $Q(V)$.

<u>Proposición 3.4.</u> Sea $p \in S(V)$, entonces:

1) $p(0) = 0$.

2) p es no negativa: $p(x) \leq 0 \ \forall\, x \in V$.

3) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y),\ \forall\, x, y \in V$.

<u>Demostración.</u>

1) $p(0) = p(0x) = 0p(x) = 0$.

2) $0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$
luego $0 \leq p(x)$.

3) $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y)+p(y) \Longrightarrow p(x)-p(y) \leq p(x-y)$
análogamente $-p(x-y) \leq p(x)-p(y)$, luego $|p(x)-p(y)| \leq p(x-y)$.

<u>Proposición 3.5.</u> Sea $p \in S(V)$, entonces para todo
$\varepsilon \geq 0$: $B_p(0,\varepsilon) = \{x \in V/\ p(x) < \varepsilon\} \in Q(V)$

$B'_p(0,\varepsilon) = \{x \in V/\ p(x) \leq \varepsilon\} \in Q(V)$

Además si q es otra semi-norma sobre V:
$p = q \iff B_p(0,1) = B_q(0,1) \iff B'_p = B'_q(0,1)$.

<u>Demostración.</u> Veamos la demostración de $B_p(0,\varepsilon)$.

Sean $x, y \in B_p(0,\varepsilon)$ y sean $\alpha, \beta \in K$ tales que $|\alpha|+|\beta| \leq 1$ entonces: $p(\alpha x+\beta y) \leq p(\alpha x)+p(\beta y) = |\alpha|p(x)+|\beta|p(y) \leq |\alpha|+|\beta| \leq 1$, luego $\alpha x+\beta y \in B_p(0,\varepsilon)$, es decir $B_p(0,\varepsilon)$ es un disco.

Sea $x \in V$ y pongamos $\alpha = \frac{p(x)+1}{\varepsilon}$, entonces $p(\frac{x}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\, p(x)$

$p(\frac{x}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\, p(x) = \frac{p(x)}{p(x)+1}\, \varepsilon < \varepsilon \Longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in B_p(0,\varepsilon) \Longrightarrow x \in \alpha\, B_p(0,\varepsilon)$; en consecuencia $B_p(0,\varepsilon)$ es un disco absorbente, esto es $B_p(0,\varepsilon) \in Q(V)$.

De la misma forma se demuestra que $B'_p(0,\varepsilon) \in Q(V)$.

La segunda parte se deja como ejercicio.

Sea A una parte de V; para cada x en V sea A_x el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por:

$$A_x = \{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha > 0, x \in \alpha A\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

Es claro que A_x es acotado inferiormente y que A_x puede ser vacío (es el caso cuando A no absorbe x). La funcional o Jauge de Minkowski g_A se define entonces por $g_A : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ donde

$$x \to g_A(x) = \begin{cases} \text{Inf } A_x & \text{si } A_x \neq \phi \\ \\ +\infty & \text{si } A_x = \phi \end{cases}$$

Es claro que g_A es no negativa, esto es que $g_A(x) \geq 0$, $\forall\, x \in V$.

Examinemos ahora algunas propiedades de g_A. No es difícil demostrar la siguiente proposición;

<u>Proposición 3.6</u>. Sea A una parte de V, entonces

1) Si A es absorbente, g_A es finita.

2) $g_A(\lambda x) = \lambda g_A(x)$; $\forall\, x \in V$, $\forall\, \lambda > 0$.

3) Si $0 \in A$: $g_A(0) = 0$.

4) Si A es convexo, g_A es sub-aditiva, es decir

$g_A(x+y) \leq g_A(x)+g_A(y)$, $\forall\, x, y \in V$.

5) Si A es equilibrada, g_A es absolutamente homogénea, es decir

$g_A(\lambda x) = |\lambda| g_A(x)$, $\forall\, x \in V$, $\forall\, \lambda \in K$.

6) $A \subseteq x \in V/ g_A(x) \leq 1$.

7) Si $0 \in A$ y A es convexo, entonces $\{x \in V/ g_A(x) \leq 1\} \subseteq A$.

De esta proposición se deduce el siguiente corolario:

Corolario.

Sea $A \in Q(V)$, entonces $g_A \cdot V \to \mathbb{R}$, es una semi-norma sobre V, es decir $g_A \in S(V)$. Además $B_{g_A}(0,1) \subseteq A \subseteq B'_{g_A}(0,1)$.

4.3. Concepto de Espacio Localmente Convexo.

Definición 3.4. Un espacio vectorial topológico (V,τ) se dice localmente convexo, si cada punto x del espacio admite un sistema fundamental de vecindades convexas.

Un espacio vectorial topológico, localmente convexo, se dirá simplemente "espacio localmente convexo" y eventualmente se abreviará por e. l.c.

Del hecho que las traslaciones en un e.v.t. son homeomorfismos y que ellas preservan la convexidad, se desprende de inmediato que:

Proposición 3.7. Un e.v.t. es un e.l.c. si y sólo sí el origen admite un sistema fundamental de vecindades convexas.

Ahora podemos dar más información sobre el filtro de vecindades del cero en un e.l.c.

Proposición 3.8. En un e.l.c. (V,τ), un sistema fundamental de vecindades del origen está dado por:

1) Las vecindades disqueadas y abiertas de 0.

2) Las vecindades disqueadas y cerradas de 0.

Demostración.

1) Sea $V \in \sqrt{(0,\tau)}$; como (V,τ) es un e.l.c., existe una vecindad de 0 convexa W tal que $W \subseteq V$. Ahora, por la proposición anterior, existe $U \in \sqrt{(0,\tau)}$ equilibrada y abierta tal que $U \subseteq W$.

Luego $\Gamma(U) = c(e(U)) = c(U) \subseteq c(W) = W \subseteq V$, por último siendo U abierta, $\Gamma(U)$ también lo es y $\Gamma(U) \in \sqrt{(0,\tau)}$.

2) Sea $V \in \sqrt{(0,\tau)}$; como cada e.v.t. es regular, existe $W \in \sqrt{(0,\tau)}$ cerrada tal que $W \subseteq V$; como (V,τ) es un e.l.c., existe $U \in \sqrt{(0,\tau)}$ convexa tal que $U \subseteq W$.

Por otra parte, las vecindades equilibradas constituyen un sistema fundamental de vecindades del cero, luego existe $U' \in \sqrt{(0,\tau)}$, equilibrada tal que $U' \subseteq U$. Además $\overline{\Gamma(U')}$ es una vecindad cerrada y disqueada de 0.

Ahora vamos a utilizar el teorema 1.1, para construir topologías localmente convexas sobre un espacio vectorial.

Teorema 3.1.

En un espacio localmente convexo (V,τ), existe un sistema fundamental β de vecindades del cero, tal que

a) Cada U en β es absorbente.

b) Cada U en β es equilibrada.

c) Cada U en β es convexa.

d) Para cada U en β existe U' en β tal que $U'+U' \subseteq U$.

Recíprocamente, si V es un espacio vectorial y β una base de filtro en V que verifica a), b), c) y d), entonces existe una única topología τ sobre V tal que (V,τ) es un espacio localmente convexo y para lo cual β es un sistema fundamental de vecindades del cero.

<u>Demostración</u>. La existencia de β es consecuencia inmediata del teorema 1.1 y de la continuidad de la adición en (0,0).

Recíprocamente, la existencia de una topología lineal τ está asegurada por las condiciones a), b) y d) que verifica β y la condición c) asegura que tal topología es localmente convexa.

BIBLIOGRAFIA.

1. H. Schaefer
Topología Vector Spaces
Springer-Verlag 1980.

2. Kelly - Namioka
Linear Topological Spaces
Van Nostrand 1963.

3. W. Rudin
Análisis Funcional
Editorial Reverté S.A. 1979.

4. Jorge Rojo
Espacios Lineales Topológicos
Publicación Quinta Semana Matemática
U.C.V. 1978.