DOI: 10.22199/S07160917.1986.0012.00008

REVISTA PROYECCIONES N° 12:103-106
Diciembre 1986 - ISSN 0716-0917
Jornada Matemáticas, Agosto 1986.

LA CONDICION DE BABUSKA-BREZZI Y LOS PROBLEMAS VARIACIONALES RESTRINGIDOS

PEDRO HUERTA MARIN *

RESUMEN

Uno de los temás más importantes de la teoría variacional es el problema de minimizar una funcional convexa diferenciable J, definida sobre una clase adecuada de funciones que está sujeta a restricciones lineales sobre el minimizador. La formulación clásica de este problema es:

(1) PROBLEMA DE MINIMIZACION RESTRINGIDA: Sean H y Q espacios de Hilbert, $B:H \longrightarrow Q$ un operador lineal, $J:H \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional convexa y diferenciable. Interesa encontrar $u \in H$ tal que:

* Académico Departamento Matemáticas. Universidad de Antofagasta. ANTOFAGASTA.

$$J(u) \leq J(v), \ \forall v \in K$$

$$K = \{v \in H \mid Bv = g\}$$

Este problema puede transformarse en un problema equivalente mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello se introduce el espacio Q', esto es, el dual de Q y se introduce la funcional $L: H \times Q' \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$L(v,q) = J(v) + [q, Bv-g]$$

donde $[.,.]$ denota la dualidad en Q' x Q. Se tiene entonces:

(2) PROBLEMA DE PUNTO SILLA: Encontrar un par $(u,p) \in H \times Q'$ tal que:

$$L(u,q) \leq L(u,p) \leq L(v,p), \ \forall v \in H, \forall q \in Q'$$

El par (u,p) es un punto silla de L. En resumen, u es una solución del problema (1) y $p \in Q$ es un multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción $Bu=g$, Más aún, al calcular las variaciones de L con respecto a v y q, se concluye que un punto silla $(u,p) \in H \times Q'$ está caracterizado por

(3) PROBLEMA VARIACIONAL CON CONDICIONES DE BORDE: Encontrar $(u,p) \in H \times Q'$ tal que:

$$\begin{aligned} \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] &= 0 \qquad v \in H \\ [q, Bu-g] &= 0 \qquad q \in Q' \end{aligned}$$

donde $\langle .,. \rangle$ denota la dualidad en $H' \times H$.

Las condiciones clásicas de existencia de un punto silla no se verifican directamente para la funcional L, por lo cual es necesario imponer condiciones adicionales a

J, B y δJ e incluso introducir el concepto de Lagrangiano perturbado, L_ε:

$$L_\varepsilon(v,q) = L(v,q) - \frac{\varepsilon}{2} \| q \|^2_{Q'}$$

donde $\varepsilon > 0$.

En estas condiciones se puede concluir que existe un punto silla $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ de L_ε en $H\times Q'$ para todo $\varepsilon > o$. Más aún, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ es una solución del problema variacional con condiciones de borde:

$$\begin{aligned} &< \delta J(u_\varepsilon), v> + [p_\varepsilon, Bv] = 0, \forall v \varepsilon H \\ &[q, Bu_\varepsilon] - \varepsilon [q, p_\varepsilon] = [q, g], \forall q \varepsilon Q' \end{aligned}$$

Sin embargo, resta por aclarar si las soluciones perturbadas $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ convergen a la solución del problema original cuando ε 0. Esto se consigue a través de la condición adicional:

Existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\beta \| q \|_{Q'} \leq \sup_{\substack{v \varepsilon H \\ (v \neq o)}} \frac{| [q, Bv] |}{\| v \|_H}, \forall v \varepsilon Q'$$

Esta es la llamada CONDICION DE BABUSKA-BREZZI y es clave para garantizar que una sucesión de multiplicadores p_ε, que son soluciones del problema perturbado, converge débilmente en Q' y también para garantizar (con leves condiciones adicionales) que las soluciones $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ del Lagrangiano perturbado convergen fuertemente a la solución (u,p) de (2) cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Existen algunas generalizaciones de la condición

Babuska-Brezzi que son necesarias para problemas elípticos lineales con restricciones, más generales. Por ejemplo si existen funciones no nulas $q_o \varepsilon Q'$ tales que $B^*q_o=0$, donde B^* es la traspuesta de B que aplica Q' en H', entonces:

$$[q_o, Bv] = < B^*q_o, v > = 0, \forall v \varepsilon H$$

en este caso tendríamos necesariamente $\beta=0$. Para salvar esta dificultad se debe reformular el problema de punto silla de modo que los multiplicadores de Lagrange estén definidos en el espacio $Q'/\mathrm{Ker}\, B^*$, donde

$$\mathrm{Ker}B^* = \{q \varepsilon Q' \mid < B^*q, v > = 0, \forall v \varepsilon H\}$$

el estudio de esta situación conduce ahora a la siguiente condición de Babuska-Brezzi. Existe una constante $\beta>0$ tal que

$$\beta \min_{\bar{q}\varepsilon \mathrm{Ker}B^*} \| q+\bar{q} \|_{Q'} \leq \sup_{\substack{v\varepsilon H \\ (v\neq 0)}} \frac{|[q, Bv]|}{\|\cdot v\|_H}$$

$(v\neq o)$

OBSERVACION:

Una sólida teoría de existencia para nuestro problema variacional restringido nos deja expedito el camino para el estudio de la aproximación de problemas lineales con restricciones, mediante métodos de elementos finitos, en particular mediante el método de elementos finitos mixtos.