DOI: 10.22199/S07160917.1986.0011.00002

REVISTA PROYECCIONES N° 11: 18-60
Julio 1986 - I.S.S.N. 0716-0917

ESPACIOS DE SOBOLEV H^1 Y H^2

Dr. JAIME FIGUEROA N.*

---

1. **Introducción**.

Los espacios de Sobolev son espacios de funciones reales o complejas de varias variables reales integrables en el sentido de Lebesgue y diferenciable en el sentido de las distribuciones, esto es, débilmente diferenciables.

Estos espacios así como sus generalizaciones, son importantes por estar vinculados a numerosos problemas en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales y en otras áreas del análisis matemático. Actualmente constituye una herramienta fundamental en este campo.

El nombre de estos espacios recuerda al matemático soviético que los introdujo, quien contribuyó con muchos resultados a la teoría, entre ellos el importante "teorema de inmersión de Sobolev". Otro resultado importante de la teoría, basado en este Teorema, es el "teorema de inmersión

* Profesor Departamento Matemáticas, Física y Computación - Facultad de Ciencias - Universidad de Talca - Chile.

compacta" debido a Kondrachov. Este teorema permite probar por ejemplo que el espectro de los operadores diferenciales parciales lineales y elípticos definidos sobre dominios acotados es discreto.

El estudio de estos espacios comienza por los de orden entero positivo ($W^{m,p}$ con $m,p \in \mathbb{Z}^+$). Enseguida se extiende la noción de tal manera de considerar valores no enteros de m. Posteriormente se consideran espacios con otras normas en L^p. Un tratamiento completo puede encontrarse en la referencia clásica de Adams, R.

Sin embargo, el tipo de espacios de Sobolev más importentes son los de funciones de cuadrado integrable, esto es los $W^{m,2}$ los que serán denotados H^m. Estos espacios son espacios de Hilbert separables.

Entre los espacios H^m los más importantes son H^1 y H^2. Por ejemplo, la formulación variacional del clásico problema de Dirichlet-Poisson: $-\Delta u = f$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u = 0$ en $\partial\Omega$ se realiza en $H^1(\Omega)$. La del problema de Dirichlet-Poisson correspondiente al operador biharmónico Δ^2 se realiza en el espacio $H^2(\Omega)$.

Por otro lado, desde el punto de vista del análisis numérico, interesa conocer $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$ para poder construir subespacios de dimensión finita incluido en ellos.

Por otra parte, esencialmente las demostraciones para los espacios H^1 y H^2 sirven para los espacios H^m. Por lo demás el delicado problema de la traza sobre el borde se ve sobre H^1 y el de la derivada normal sobre H^2.

Estas razones son las que motivan que una presentación relativamente fácil y completa, además de útil, pueda hacerse sin pérdida de generalidad tratando a fondo H^1 y H^2, después H^m extendiendo los resultados.

Sobre la bibliografía hay que señalar lo siguiente: los espacios de Sobolev fueron introducidos en [5], en [3] se demuestra que los espacios $W^{m,p}$ son las completaciones de C^m con respecto a la norma $||\cdot||_{m,p}$, en [6] se prueba el teorema de inmersión de Sobolev y en [2] el de inmersión compacta de Kondrachov. Sobre generalizaciones ver [1], [4].

2. EL ESPACIO DE SOBOLEV $H^1(\Omega)$.

De la identificación de $L^2(\Omega)$ a un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$ ($L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$) toda la función de $L^2(\Omega)$ es derivable en el sentido de las distribuciones. En general esta derivada no está en $L^2(\Omega)$.

Por ejemplo si es un abierto de $\mathbb{R}$ y $[a,b] \subset \Omega$. Sea χ la función característica de $[a,b]$. Se tiene $\chi \in L^2(\Omega)$. Su derivada es $\frac{d\chi}{dx} = \delta_a - \delta_b$ la cual no es una función de $L^2(\Omega)$.

<u>Definición 2.1</u>. (el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$).

Se llama espacio de Sobolev de orden 1 sobre Ω al espacio:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ : \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ , \quad 1 \leq i \leq n\}$$

Se define en $H^1(\Omega)$ el producto escalar

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv\right)dx \qquad \ldots \qquad (2.1)$$

y se denota

$$||v||_{1,\Omega} = (v,v)^{\frac{1}{2}}_{1,\Omega} \qquad \ldots \qquad (2.2)$$

la norma correspondiente.

<u>Observación</u>.

$$(u,v)_{1,\Omega} = (u,v)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{0,\Omega} \qquad \ldots \qquad (2.2a)$$

$$||u||_{1,\Omega} = \left(||u||^2_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots \qquad (2.2b)$$

Teorema 2.3.

El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno definido por (2.1).

Demostración.

Es claro que $(H^1(\Omega), (\ ,\ )_{1,\Omega})$ es un espacio pre-hilbertiano. Hay que verificar que $H^1(\Omega)$ es completo con respecto a la norma $||\cdot||_{1,\Omega}$. Sea $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$.

De (2.2b)

$$||v_n - v_m||_{0,\Omega} \leq ||v_n - v_m||_{1,\Omega}$$

$$||\partial_i v_n - \partial_i v_m||_{0,\Omega} \leq ||v_n - v_m||_{1,\Omega}$$

esto es (v_n) y $(\partial_i v_n)$ son sucesiones de Cauchy en el espacio completo $L^2(\Omega)$.

Se tiene entonces

$$v_n \to v \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

$$\partial_i v_n \to w_i \quad \text{en } L^2(\Omega) \ , \ 1 \leq i \leq n$$

Si se prueba que $w_i = \partial_i v$ en el sentido de las distribuciones se tendrá $\partial_i v \in L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$ lo cual probará que

$v \in H^1(\Omega)$ y que $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$, ya que:

$$||v_n - v||_{1,\Omega} = \left(||v_n - v||^2_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} ||\partial_i v_n - \partial_i v||^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

Por lo tanto debe establecerse:

$w_i = \partial_i v \quad , \quad 1 \leq i \leq n$

Se demostró que la inyección de $L^2(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es continua, entonces

$v_n \to v \quad$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\partial_i v_n \to w_i \quad$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$

De la continuidad de la derivación $\partial_i : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$,

$\partial_i v_n \to \partial_i v \quad$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$

Por lo tanto $\partial_i v = w_i$, $1 \leq i \leq n$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, esto es en el sentido de las distribuciones. []

Observación. Se verán algunos resultados del espacio $H^1(\Omega)$ en lo que no interviene la regularidad de la frontera Γ de Ω.

Teorema 2.4.

El espacio $H^1(\Omega)$ es separable, esto es, existe un conjunto numerable denso en $H^1(\Omega)$.

Demostración.

Se considera el espacio producto $(L^2(\Omega))^{n+1}$ provisto de la estructura hilbertiana producto, esto es:

$$< (v_i), (w_i) > = \sum_{i=1}^{n+1} < v_i, w_i >$$

Se considera la aplicación

$$F : H^1(\Omega) \to (L^2(\Omega))^{n+1}$$
$$v \to (v, \partial_1 v, \ldots, \partial_n v)$$

La aplicación F es una isometría ya que:

$$||F(v)||_{(L^2(\Omega))^{n+1}} = ||v||_{1,\Omega}$$

Luego $H^1(\Omega)$ se identifica a $F(H^1(\Omega))$ subespacio cerrado de $(L^2(\Omega))^{n+1}$.

El espacio $L^2(\Omega)$ es separable, lo mismo para el espacio producto $(L^2(\Omega))^{n+1}$. Puesto que $H^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado del espacio del Hilbert separable $(L^2(\Omega))^{n+1}$, también lo es $H^1(\Omega)$. []

Definición 2.5. ($H_0^1(\Omega)$: subespacio de $H^1(\Omega)$ de las funciones "nulas" sobre $\partial\Omega$).

Se designa por $H_0^1(\Omega)$ la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en el espacio $H^1(\Omega)$, esto es: $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.

Observación. Se tienen dos resultados

- Si Ω es acotado : $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$

- Si $\Omega = \mathbb{R}^n$: $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$

es decir, en el primer caso $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $H^1(\Omega)$, en el segundo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.6.

Si $v \in H_0^1(\Omega)$, el prolongamiento $\tilde{v}$ de v por 0 en $\mathbb{R}^n - \Omega$ pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración.

Es evidente que si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la función $\tilde{\psi}$ prolongamiento de ψ por 0 en $\mathbb{R}^n - \Omega$ pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, además se tiene:

$$||\tilde{\psi}||_{1,\mathbb{R}^n} = ||\psi||_{1,\Omega}$$

Luego la función:

$$F : (\mathcal{D}(\Omega), ||\ ||_{1,\Omega}) \to H^1(\mathbb{R}^n) \quad , \quad F\psi = \tilde{\psi}$$

es un isometría. Por definición de $H_0^1(\Omega)$, F se prolonga por continuidad en una aplicación

$$\tilde{F} : H_0^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$$

Problema: Probar que $\tilde{F}(v) = \tilde{v}$ p.p.

En efecto, sea $\psi_n \to v$ en $H^1(\Omega)$, (ψ_n) sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Se tiene que $\tilde{F}(\psi_n) \to \tilde{F}(v)$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$, luego en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

De la sucesión $(\tilde{F}(\psi_n))$ se puede extraer una subsucesión $(\tilde{F}(\psi_i))$ tal que $\tilde{F}(\psi_i) \to F(v)$ p.p. Pero $\tilde{F}(\psi_i)_{/\Omega} = F(\psi_i)_{/\Omega} = \psi_i$, de donde $\tilde{F}(v)_{/\Omega} = v$ p.p. Por otro lado resulta evidente que $\tilde{F}(v)_{/\mathbb{R}^n - \Omega} = 0$. []

Corolario 2.7.

Si Ω es acotado entonces $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$.

Demostración.

Si Ω es acotado la función $v \equiv 1$ pertenece a $H^1(\Omega)$. Si $v \in H_0^1(\Omega)$ entonces el prolongamiento $\tilde{v}$ de v por cero en $\mathbb{R}^n - \Omega$ pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pero $\tilde{v} \notin H^1(\mathbb{R}^n)$. Luego $v \notin H_0^1(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$. []

Teorema 2.8.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$, esto es $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Ver [7].

Observación:

Se verá a continuación un resultado práctico de gran importancia.

Teorema 2.9. (desigualdad de Poincaré).

Si Ω es acotado, existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega) : ||v||_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{n} \int |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots (2.9)$$

Demostración.

Se basa en la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\tilde{v}$ el prolongamiento de v por cero fuera de Ω. Como Ω es acotado, podemos suponer $\Pi_n(\Omega) \subset [a,b]$. Si se escribe

$$x = (x', x_n) \quad \text{con } x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

entonces:

$$\tilde{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', s) ds$$

de donde utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|\tilde{v}(x', x_n)|^2 = \left| \int_a^{x_n} 1 \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', s) ds \right|^2$$

$$\leq (x_n - a) \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', s) \right|^2 ds$$

$$\leq (x_n - a) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', s) \right|^2 ds$$

Integrando con respecto a las n-1 primeras variables

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x',x_n)|^2 \, dx' \leq (x_n - a) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right|^2 dx$$

y entonces

$$||\tilde{v}||^2_{0,\, R^n} = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}|^2 \, dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x',x_n)|^2 \, dx' \right) dx_n$$

$$\leq \left(\int_a^b (x_n - a)\, dx_n \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} (b-a)^2 \quad \left|\left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right|\right|^2_{0,\mathbb{R}^n}$$

Se obtiene luego la desigualdad

$$||v||^2_{0,\Omega} \leq \frac{1}{2} (b - a)^2 \quad \left|\left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|\right|^2_{0,\Omega} \quad ; \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Por densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1_0(\Omega)$ con la norma fuerte $||\cdot||_1$ se obtiene la misma desigualdad $\forall\, v \in H^1_0(\Omega)$.

La desigualdad obtenida es más fuerte que (2.9). []

Observación.

- De la demostración precedente la desigualdad (2.9) sigue siendo válida si Ω es acotado sólo en una dirección.
- El resultado es falso para las funciones de $H^1(\Omega)$, por ejemplo tomar $v = 1$.

Corolario 2.10.

Si Ω es acotado, la seminorma

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right|^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots \qquad (2.10)$$

es una norma sobre $H^1_0(\Omega)$ equivalente a la norma inducida por $||v||_{1,\Omega}$.

Observación.

La norma dada por (2.2b) puede escribirse

$$||u||_{1,\Omega} = (||u||^2_{0,\Omega} + |u|^2_{1,\Omega})^{\frac{1}{2}}$$

3. TRAZA.

Dada una función $v \in H^1(\Omega)$ se trata de definir su valor en el borde $\partial\Omega=\Gamma$ esto es v/Γ. Esto no es evidente porque para $n \geq 2$ las funciones de $H^1(\Omega)$ no son continuas en general.

Por el contrario para $n = 1$: $H^1(\Omega)$, en que $\Omega =]a,b[$, es de funciones casi continuas en todas partes en $[a,b]$, de manera que no hay dificultad para definir $v(a)$ y $v(b)$. Pero, en general para $n \geq 2$ será necesario utilizar argumentos más rebuscados para definir el valor en el borde v/Γ de una función $v \in H^1(\Omega)$.

Notaciones.

1) Sea m entero positivo.

$C^m(\bar{\Omega})$: espacio de las funciones m veces diferenciables en $\bar{\Omega}$.

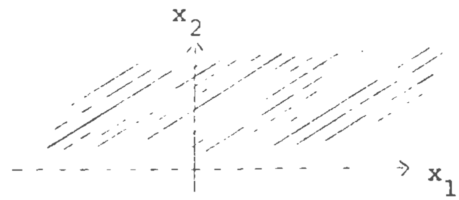
$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$: espacio de las funciones indefinidamente diferenciables a soporte compacto en $\bar{\Omega}$.

Esto equivale a:

$v \in C^m(\bar{\Omega}) \iff \exists\ O$ abierto, $\bar{\Omega} \subset O$ y $\exists\ f \in C^m(O) \ni f/\Omega = v$

$\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \iff \exists\ O$ abierto, $\bar{\Omega} \subset O$ y $\exists\ \Psi \in \ (O) \ni \Psi/\Omega = \psi$

2) $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$



Observación.

$\mathbb{R}^2_+$ es el semiplano superior

$\partial\ \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$

$\partial\ \mathbb{R}^2_+ \cong \mathbb{R}$

Lema 3.1.

$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n_+)$

Demostración.

La demostración es análoga a la del teorema 2.8. Por truncamiento se verifica que el subespacio de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ formado de las funciones de soporte compacto en $\mathbb{R}^n_+$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Observación.

Si $v \in \mathcal{D}(\overline{R^n_+})$, la función

$v(\cdot\ ,\ 0) : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \to v(x'\ ,\ 0)$

pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Lema 3.2.

Se tiene para todo $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

$$||v(\cdot\ ,\ 0)||_{0,\ \mathbb{R}^{n-1}} \leq ||v||_{1,\ \mathbb{R}^n_+} \qquad \ldots \qquad (3.2)$$

Demostración.

Sea $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$.

Se puede escribir

$$v(x', 0)^2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n} (v(x', x_n)^2)\, dx_n$$

$$= -2\int_0^\infty v(x', x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} v(x', x_n) dx_n$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$v(x', 0)^2 \leq 2 \left(\int_0^\infty v(x', x_n)^2\, dx_n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_n} v(x', x_n)\cdot\right)^2 dx_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

De la desigualdad: $2ab \leq a^2 + b^2$

$$v(x', 0)^2 \leq \int_0^\infty \left\{ v(x', x_n)^2 + \frac{\partial v}{\partial x_n} (x', x_n)^2\right\} dx_n$$

Integrando con respecto a x' se deduce

$$||v(\cdot, 0)||^2_{0, \mathbb{R}^{n-1}} \leq ||v||^2_{0, \mathbb{R}^n_+} + \left|\left|\frac{\partial v}{\partial x_n}\right|\right|^2_{0, \mathbb{R}^n_+} \leq ||v||^2_{1, \mathbb{R}^n_+}$$

[]

Consecuencia.

De los lemas anteriores resulta que la aplicación

$$v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to v(\cdot, 0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$$

se prolonga por continuidad en una aplicación lineal continua

$$v \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \to v(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \cong L^2(\partial \mathbb{R}^n_+).$$

La desigualdad (3.2) es válida para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Por lo tanto, cuando $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ se puede definir el valor en el bor̲de de v/Γ de una función $v \in H^1(\Omega)$ en tanto la función de $L^2(\partial\Omega)$. Estos resultados podrán generalizarse al caso de un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ a con̲dición de hacer hipótesis convenientes sobre la regularidad de la frontera $\partial\Omega$ de Ω.

<u>Definición 3.3</u>. (Ω abierto 1-regular) ($\partial\Omega$ de clase C^1).

Un abierto ∂ de $\mathbb{R}^n$ se dice 1-regular si

i) Ω es acotado

ii) su frontera $\partial\Omega$ es una variedad de clase C^1 de dimensión n-1, está localmente de un solo lado de $\Gamma = \partial\Omega$.

<u>Observación</u>. (Explicación).

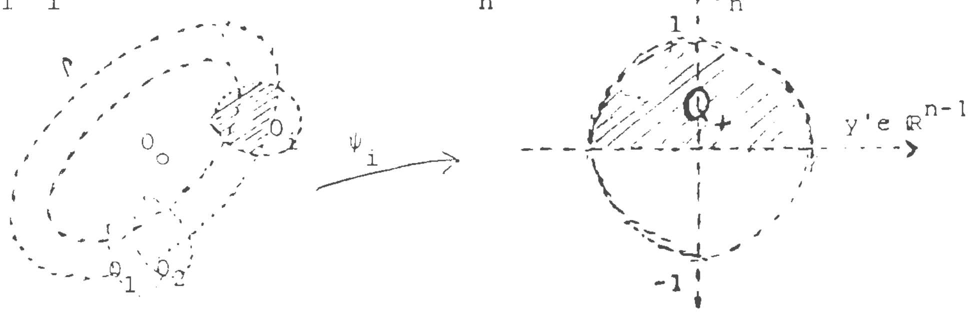
Por lo tanto existe un número finito de abiertos acotados $\{O_i\}_{i=0}^N$ de $\mathbb{R}^n$ tales que $\overline{O}_o \subset \Omega$, $\{O_i\}_{i=0}^N$ es un cubrimiento abierto de $\overline{\Omega}$ y $\{O_i\}_{i=1}^N$ es un cubrimiento de Γ ; además para cada i=1,..., N existe.

$$\psi_i : O_i \to Q = \{y = (y' , y_n) : ||y|| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

invertible, una vez continuamente derivable, la aplicación inversa ψ_i^{-1} es una vez continuamente derivable de Q en O_i y tal que

$$\psi_i(O_i \cap \Omega) = Q_+ = Q \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$$

$$\psi_i(O_i \cap \partial\Omega) = Q \cap \{y \in \mathbb{R}^n ; y_n = 0\}$$



Esto es $\{O_i, \psi_i\}_{i=1}^{N}$ es un sistema de cartas locales que define $\partial\Omega = \Gamma$.

Observación. (abierto Ω m-regular) ($\partial\Omega$ de clase C^m).

Si m es un entero > **1**, se dice que el abierto Ω es m-regular si es acotado y su frontera $\Gamma = \partial\Omega$ es una variedad de clase C^m, y de dimensión n-1, es decir si las funciones ψ_i , ψ_i^{-1} son m veces continuamente diferenciables.

Observación. ($\partial\Omega$ de clase C^1 por tramos) ($\partial\Omega$ lipschitziana).

Cuando las funciones ψ_i , ψ_i^{-1} son de clase C^1 por tramos (resp. lipschitziana) se dirá que $\partial\Omega$ es de clase C^1 por tramos (resp. lipschitziana).

Orientación.

Se probará en etapas que si Ω es lo "bastante regular", digamos 1 - regular, C^1 por tramos o lipschitziana, entonces $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y la aplicación $\gamma_o : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to C^o(\Gamma)$; $v \to v/\Gamma$ se prolonga por continuidad en una aplicación lineal continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$ que se seguirá escribiendo γ_o , llamada "aplicación traza" cuyo valor en $v \in H^1(\Omega)$ se llama "traza de v sobre $\Gamma = \partial\Omega$".

Proposición 3.4.

Si Ω es 1-regular, existe un operador $P \in \mathcal{L}(H^1(\Omega);H^1(\mathbb{R}^n))$ llamado de prolongamiento, tal que $\forall\, v \in H^1(\Omega)$, $Pv = v$ p.p. en Ω.

Demostración.

1) Caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Definamos la función reflexión por:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n ; \quad x = (x', x_n) \to f(x) = \begin{cases} (x', x_n) & \text{si } x_n > 0 \\ (x', -x_n) & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$

Se define el operador $P : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ como:

$P\,v = v \circ f$. Se tiene que $\partial_i(P\,v) = \partial_i(v \circ f) = (\partial_i\, v \circ f)\ (\mathrm{Sgn}\ \Pi_n)$

ya que
$$\begin{cases} (\partial_i f_j)(x', x_n) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } x_n > 0 \\ -\delta_{ij} & \text{si } x_n < 0 \end{cases} \quad ; \quad j = n \\ \partial_i f_j = \delta_{ij} \quad \text{si } j < n \end{cases}$$

Luego $\forall\, v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$:

$$||P\,v||^2_{1,\mathbb{R}^n} = ||v \circ f||^2_{0,\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^{n} ||\,\partial_i(v \circ f)||^2_{0,\mathbb{R}^n}$$

$$= ||v \circ f||^2_{0,\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^{n} ||\partial_i\, v \circ f||^2_{0,\mathbb{R}^n}$$

$$= 2\ ||v||^2_{1,\mathbb{R}^n_+}$$

ya que $||v \circ f||^2_{0,\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v \circ f\ (x', x_n)|\ dx_n\right) dx'$

y $\int_{\infty}^{\infty} |v \circ f(x', x_n)|\ dx_n = \int_{-\infty}^{0} |v \circ f(x', x_n)|dx_n + \int_{0}^{\infty} |v \circ f(x', x_n)|dx_n$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} |v(x', x_n)|dx_n$$

Puesto que $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, el operador P se prolonga por continuidad en una aplicación lineal continua P de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$ que verifica $P\,v = v \circ f$, $\forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ y

$||P\,v||_{1,\mathbb{R}^n} = 2||v||_{1,\mathbb{R}^n_+}$.

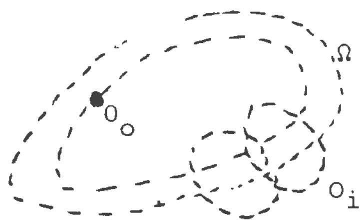
2) <u>Caso Ω Abierto 1-regular de $\mathbb{R}^n$.</u>

Se considera el cubrimiento abierto $\{0_i\}_{i=0}^N$ de Ω y una partición de la unidad $\{\alpha_i\}_{i=0}^N$ correspondiente, es decir:

$$\alpha_i \in \mathcal{D}(0_i) \;;\quad 0 \leq i \leq N \;;\quad \sum_{i=0}^N \alpha_i \equiv 1 \text{ sobre } \overline{\Omega} \;;\; \alpha_i : \bigcup_{i=0}^N 0_i \supset \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

Si $v \in H^1(\Omega)$ se puede escribir $v = \sum_{i=0}^N \alpha_i\, v$.

<u>Orientación</u>: para cada $i = 0, 1, \ldots, N$ se va a definir $P(\alpha_i\, v)$ con lo cual se definirá $P\,v = \sum_{i=0}^N P(\alpha_i\, v)$.

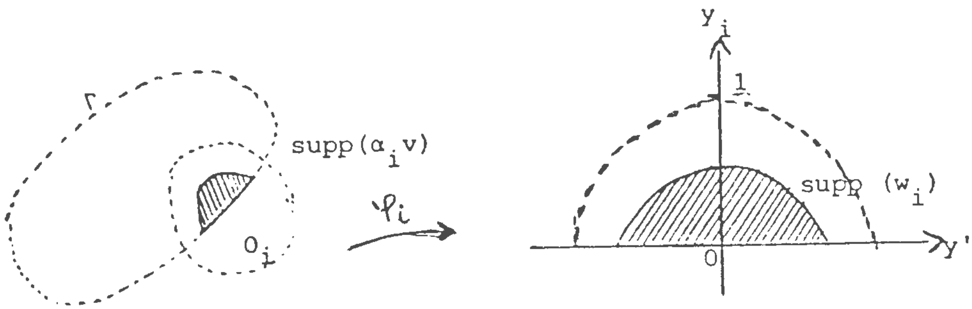


Se define $P(\alpha_o\, v)$ como el prolongamiento $\widetilde{\alpha_o\, v}$ de $\alpha_o\, v$ por cero en $\mathbb{R}^n - 0_o$. La función $\alpha_o\, v$ tiene soporte compacto en 0_o y $\alpha_o\, v \in H^1(0_o)$, luego el prolongamiento $P(\alpha_o\, v) \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Para $i = 1, \ldots, N$ se considera la función de $H^1(Q_+)$

$$w_i = (\alpha_i\, v) \circ \psi_i^{-1} \qquad (\alpha_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R})$$

Puesto que $\psi_i(0_i \cap \partial\Omega) = Q \cap \{ y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0 \}$, w_i es nula en una vecindad de la frontera de Q_+ diferente de $\{y \in Q : y_n = 0\}$.



Por lo tanto se puede prolongar w_i por cero en $\mathbb{R}^n_+ - Q_+$ lo que da una función $\tilde{w}_i \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Luego $P\,\tilde{W}_i \in H^1(\mathbb{R}^n)$, tiene soporte incluido en Q y $(P\,\tilde{w}_i) \circ \psi_i \in H^1(0_i)$ tiene soporte compacto en 0_i. Por consiguiente el prolongamiento $\widetilde{(P\,\tilde{w}_i) \circ \psi_i}$ de la función $(P\,\tilde{w}_i) \circ \psi_i$ por cero en $\mathbb{R}^n - 0_i$ es una función de $H^1(\mathbb{R}^n)$. Se define:

$$P(\alpha_i\, v) = \widetilde{(P\,\tilde{w}_i) \circ \psi_i}$$

Se define el operador $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$;

$$v \to P\,v = \sum_{i=0}^{N} P(\alpha_i\, v)$$

$$= \widetilde{\alpha_o\, v} + \sum_{i=0}^{N} \widetilde{(P\,\tilde{w}_i) \circ \psi_i}$$

• Se tiene: $Pv/\Omega = \widetilde{\alpha_o\, v}/\Omega + \sum_{i=0}^{N} \widetilde{(P\,\tilde{w}_i) \circ \psi}_{i/\Omega}$

$$= \alpha_o\, v + \sum_{i=0}^{N} \widetilde{(P\,\tilde{w}_i) \circ \psi}_{i/\Omega}$$

Como $\psi_i(\Omega \cap 0_i) \subset Q_+$, $\forall\ i = 0,\dots,N$ $\widehat{(P\ \tilde{w}_i)\ o\ \psi_{i/\Omega \cap 0_i}} = \alpha_i v/0_i \cap \Omega$ y cero fuera, $(P\ \tilde{w}_i)\ o\ \psi_{i/\Omega} = \alpha_i\ v$ p.p. Por lo tanto:

$$P\ v/\Omega = \Sigma\ \alpha_i\ v = v \text{ p.p.}$$

• P es continuo. En efecto, sea $A = \bigcup_{i=0}^{N} 0_i$

$$||P(\alpha_i v)||_{1,\mathbb{R}^n} = ||P(\alpha_i v)||_{1,0_i} = ||P\ \tilde{w}_i||_{1,\mathbb{R}^n} = 2\ ||\tilde{w}_i||_{1,\mathbb{R}^n_+} =$$

$$= 2\ ||(\alpha_i\ v)\ o\ \psi_i^{-1}||_{1,Q_+} \leq C\ ||\alpha_i\ v||_{1,\Omega} \leq C\ ||\alpha_i||\ \ ||v||_{1,\Omega}$$

Si $M = \max_{0 \leq i \leq N} ||\alpha_i||$, $||P\ v||_{1,\mathbb{R}^n} \leq \sum_{i=0}^{N} ||P(\alpha_i v)||_{1,\mathbb{R}^n} \leq (1+CM)||v||_{1,\Omega}$

[]

Proposición 3.5.

Si Ω es 1-regular, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.

Demostración.

Por la proposición 3.4, $\forall\ v \in H^1(\Omega)$ existe una función $P\ v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ que prolonga v en $\mathbb{R}^n - \Omega$. Puesto que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión $\{v_m\}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ que converge a P v en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Por restricción a Ω existe una sucesión $\{v_n\}$ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tal que v_m converge a P v en $H^1(\Omega)$.

Observación.

Se denota por $d\sigma$ la medida superficial sobre Γ inducida por la medida de Lebesgue dx.

Se designa por $L^2(\Gamma)$ las funciones de cuadrado integrable sobre para la medida superficial $d\sigma$. Se define en el espacio $L^2(\Gamma)$ la norma

$$||v||_{0,\Gamma} = \left(\int_\Gamma |v|^2 \, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots \quad (3.5)$$

De manera equivalente, utilizando la partición de la unidad $\{\alpha_i\}_{i=0}^N$ introducida en la demostración de la proposición 3.4, se tiene

$$L^2(\Gamma) = \{v : \Gamma \to \mathbb{R} : \widetilde{(\alpha_i\, v) \circ \psi_i^{-1}}(\cdot\,,0) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}),\ 1 \leq i \leq N\}$$

donde la función $\widetilde{(\alpha_i\, v) \circ \psi_i^{-1}}(\cdot, 0)$ es el prolongamiento de $(\alpha_i\, v) \circ \psi_i^{-1}(\cdot,0)$ por cero en $\mathbb{R}^{n-1} - \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : ||y'|| < 1\}$, además la norma

$$v \to \left(\sum_{i=1}^N ||\widetilde{(\alpha_i\, v) \circ \psi_i^{-1}}||^2_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots \quad (3.6)$$

es equivalente a la norma (3.5). []

Proposición 3.6.

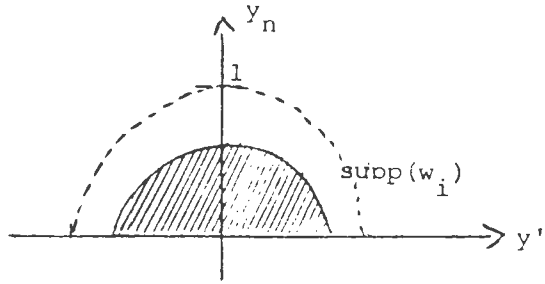
Si Ω es 1-regular, la aplicación $\gamma_o : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to C^o(\Gamma)$; $v \to \gamma_o\, v = v/\Gamma$ se prolonga por continuidad en una aplicación lineal continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$.

Demostración.

Sea $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Para todo $i=1, \ldots, N$ se pone:

$$w_i = (\alpha_i\, v) \circ \psi_i^{-1}$$

Como en la segunda parte de la demostración del teorema 3.4 se tiene que $w_i \in H^1(Q_+)$ y w_i se anula en una vecindad de la frontera de Q_+ diferente de $\{y \in Q : y_n = 0\}$



Por lo tanto se puede prolongar w_i por cero en $\mathbb{R}^n_+ - Q_+$ lo que da una función $\underline{\tilde{w}_i} \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Puesto que $\alpha_i \in \mathcal{D}(0_i)$, $\psi_i^{-1} \in C^1(Q)$, $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\tilde{w}_i \in C^1(\mathbb{R}^n_+)$. La función $\tilde{w}_i(\cdot\ , 0) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ pertenece a $C^1(\mathbb{R}^{n-1})$. De manera análoga se puede establecer como en el lema 3.2 que

$$||\tilde{w}_i(\cdot\ , 0)||_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \leq ||\tilde{w}_i||_{1,\mathbb{R}^n_+}$$

Del hecho que $v/\Gamma \in L^2(\Gamma)$ y de la equivalencia de normas se tiene que exis- te $C_1 > 0$ $\ni$

$$||v||_{0,\Gamma} \leq C\ ||\tilde{w}_i(\cdot,0)||_{0,\mathbb{R}^{n-1}}$$

Puesto que $\psi_i^{-1} \in C^1(Q)$ y $\alpha_i \in \mathcal{D}(0_i)$ existe $C_2 > 0$ $\ni$

$$||\tilde{w}_i||_{1,\mathbb{R}^n_+} \leq C_2\ ||v||_{1,\Omega}$$

Por lo tanto existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{0,\Gamma} \leq C\ ||v||_{1,\Omega}\ , \quad \forall\ v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

esto es $\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to C^0(\Gamma)$ es continua. De la densidad de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$, γ_0 se prolonga por continuidad en una aplicación continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$. []

Observación.

1) Los resultados de las proposiciones 3.4 - 3.6 se generalizan fácilmente al caso donde Ω es un abierto acotado a $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ C^1 por tramos o lipschitziana.

2) El teorema 3.6 no es optimal en el sentido que la aplicación traza no es sobre de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$. El lema 3.2 puede generalizarse ya que en su demostración no se utilizó el hecho que $\partial_i v \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, $i = 1, \ldots, n = 1$. Si se quiere un resultado más general es necesario introducir el espacio $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Se probó entonces el siguiente teorema

Teorema 3.7. (Teorema de la Traza).

Si Ω es "bastante regular", $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y la aplicación $\gamma_o : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to v/\Gamma \in C^o(\Gamma)$ se prolonga por continuidad en una aplicación lineal continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$ que se sigue denotando γ_o llamada "aplicación traza" y cuyo valor en $v \in H^1(\Omega)$ se llama "traza de v sobre $\partial\Omega$".

4. RESULTADOS DEL TEOREMA DE TRAZA.

Entre los resultados se tienen las fórmulas de Green y una caracterización del espacio $H^1_0(\Omega)$. También otro, de importancia en la construcción de subespacios de dimensión finita de $H^1(\Omega)$, que se refiere a las funciones de $C^o(\Omega)$ localmente H^1.

Proposición 4.1. (fórmulas de Green en Ω).

Sea Ω un abierto acotado de frontera Γ "bastante regular" (por ejemplo C^1 por tramos o lipschitziana). Entonces si $u,v \in H^1(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega (\partial_i u)\, v\, dx = -\int_\Omega (\partial_i v)\, u\, dx + \int_\Gamma uv\, \nu_i\, d\sigma \qquad \ldots \quad (4.1)$$

en que ν_i es el i-ésimo coseno director de la normal Γ dirigida al exterior de Ω.

Demostración;

El resultado es verdadero si $u,v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Basta pasar al límite en (4.1) en virtud del teorema 3.7. []

Proposición 4.2. (fórmulas de Green en $\mathbb{R}^n_+$)

Si $v, \psi \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ se tiene las fórmulas de Green:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} v \ \partial_i \psi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n_+} \psi \ \partial_i v \, dx \quad ; \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} v \ \partial_n \psi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n_+} \psi \ \partial_n v \, dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x', 0) \, \psi(x', 0) \, dx'$$

Demostración.

Las fórmulas son verdaderas para $v,\psi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. El resultado sigue de la densidad de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ en $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ y de la continuidad de la aplicación traza de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. []

Teorema 4.3. (Caracterización de $H^1_0(\Omega)$)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de frontera Γ "bastante regular" (por ejemplo C^1 por tramos o lipschitziana). Entonces se tiene

$$H^1_0(\Omega) = \text{Ker } \gamma_o = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ \gamma_o v = v/\Gamma = 0\}$$

Demostración.

1) Sea $v \in H^1_0(\Omega)$ y sea (ψ_m) una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ que converge hacia v en $H^1(\Omega)$. De la continuidad de la aplicación traza se tiene

$\psi_{m/\Gamma} \to v/\Gamma$ en $L^2(\Gamma)$ de donde $v/\Gamma = 0$ ya que las funciones ψ_m tienen soporte compacto en Ω.

2) Se prueba que Ker $\gamma_o \subset H_0^1(\Omega)$. Por cargas locales y partición de la unidad se reduce al caso en que la función $v \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}_+^n$ y verifica $v(\cdot\ , 0) = 0$. Lo que se trata de mostrar es que $v \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$. Sea $\tilde{v}$ el prolongamiento de v por cero en $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}_+^n$. Mediante las fórmulas de Green y teniendo en cuenta la hipótesis $v(\cdot\ , 0) = 0$ se establece:

$$\forall\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : < \partial_i\ \tilde{v},\psi > = - < \tilde{v},\ \partial_i\psi > = - \int_{\mathbb{R}_+^n} v\ \partial_i\ \psi\ dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial_i\ v)\ \psi = < \widetilde{\partial_i\ v},\psi > .$$ Es decir $\partial_i\ \tilde{v} = \widetilde{\partial_i\ v}$ en el sentido de las distribuciones. Luego la función $\tilde{v}$ pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Por ser $\tilde{v}$ el prolongamiento de v por cero en $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}_+^n$, $\tilde{v}$ tiene soporte compacto en $\overline{\mathbb{R}_+^n}$. Se construirá una familia de funciones que tengan soporte compacto en $\mathbb{R}_+^n$. Para todo $h > 0$ se considera la traslación $(x'\ , x_n) \to (x'\ , x_n - h)$ y se define $\tilde{v}_h$ como la función $\tilde{v}_h(x'\ , x_n) = \tilde{v}(x'\ , x_n - h)$. La función $\tilde{v}_h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tiene soporte compacto en $\mathbb{R}_+^n$. Sus derivadas parciales son tales que $\partial_i\ \tilde{v}_h(x'\ , x_n) = \partial_i\ \tilde{v}\ (x'\ , x_n - h)$. Luego $\tilde{v}_h \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Se puede verificar que $\tilde{v}_h \to \tilde{v}$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$ si $h \to 0$. Se introduce una sucesión regularizante (e_ε) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces: $e_\varepsilon * \tilde{v}_h \to \tilde{v}_h$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$ si $\varepsilon \to 0$. Para $\varepsilon > 0$ bastante pequeño la función $e_\varepsilon * \tilde{v}_n$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}_+^n$. Luego existe una sucesión $e_\varepsilon * \tilde{v}_{h/\mathbb{R}_+^n}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ que converge a v en $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ de donde $v \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$. []

Teorema 4.4.

Sea $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega}_i$ una descomposición de $\overline{\Omega}$ tal que:

a) $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n \cap \Omega$ es un abierto de frontera Γ_i "bastante regular" (por ejemplo C^1 por tramos o lipschitziana), $1 \leq i \leq m$.

b) $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Sea $v \in C^0(\bar{\Omega})$ una función tal que para cada $i = 1,\ldots, m$ la restricción v/Ω_i de v a Ω_i pertenece a $H^1(\Omega_i)$. Entonces v pertenece a $H^1(\Omega)$.

Demostración.

Para todo $j = 1, \ldots, n$ se define la función $v_j \in L^2(\Omega)$ por $v_j/\Omega_i = \partial_j(v/\Omega_i)$. Se prueba que $v_j = \partial_j v$ en el sentido de las distribuciones sobre Ω. Utilizando las fórmulas de Green se tiene $\forall\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$<v_j,\psi> = \int_\Omega v_j\ \psi\ dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_i} v_j/\Omega_i\ \psi\ dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_i} \partial_j(v/_{\Omega i})\ \psi\ dx =$$

$$= - \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_i} v\ \partial_j\psi\ dx + \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i} v\ \psi\ \nu_i\ d\sigma$$

$$= - \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_i} v\ \partial_j\ \psi\ dx$$

ya que $v \in C^0(\bar{\Omega})$ y Ψ se anula sobre Ω. Luego

$$<v_j,\psi > = - \int_\Omega v\ \partial_j\ \psi\ dx = - < v,\ \partial_j\ \psi > = < \partial_j\ v,\ \psi >$$ de donde resulta

$v_j = \partial_j v$ en el sentido de las distribuciones. Por lo tanto $\partial_j v \in L^2(\Omega)$ $j = 1, \ldots, m$, esto es $v \in H^1(\Omega)$. []

Orientación.

Se dará una caracterización del espacio de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^n)$ y se mostrará que la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta siempre que la frontera de Ω sea "bastante regular". Este resultado se lo conoce como el "Teorema de Rellich". Su generalización a espacios de Sobolev de orden superior es el "Teorema de Kondrachov".

5. UN RESULTADO DE COMPACIDAD.

Si $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier v está definida por

$$\hat{v}(\xi) = (2\Pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} \, v(x)dx \quad ; \xi \in \mathbb{R}^n \quad ((\mathbb{R}^n, |\ |)).$$

resultado conocido como "Teorema de Plancharel" asegura que la aplicación $v \to \hat{v}$ es una isometría lineal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sobre la transformada de Fourier de una derivada se tiene lo siguiente: si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$D^\alpha f\ (\xi) = i^{|\alpha|}\ \xi^\alpha\ \hat{f}(\xi)$$

Teorema 5.1.

Se tiene

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^n) \ : \ (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\ \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

y

$$||v||_{1,\mathbb{R}^n} = ||(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\ \hat{v}||_{0,\mathbb{R}^n}$$

<u>Demostración</u>.

$$\begin{aligned}
v \in H^1(\mathbb{R}^n) &\iff \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \widehat{\partial_j v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\ , \quad j = 1, \dots, n \\
&\iff \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n),\ i\,\xi_j\,\hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\ , \quad j = 1, \dots, n \\
&\iff \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)\ |\hat{v}(\xi)|^2\ d\xi < +\infty \\
&\iff (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Del teorema de Plancharel se obtiene:

$$||v||^2_{1,\mathbb{R}^n} = ||\hat{v}||^2_{0,\mathbb{R}^n} + \sum_{j=1}^{n} ||\widehat{\partial_j v}||^2_{0,\mathbb{R}^n}$$

$$= ||(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{v}||^2_{0,\mathbb{R}^n}$$

Teorema 5.2. (Teorema de Rellich)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de frontera "bastante regular". Entonces la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, esto es, todo conjunto acotado en $H^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.

Demostración.

Se recuerda que en un espacio de Hilbert H todo conjunto acotado es relativamente compacto débil, esto es, para toda sucesión (f_m) acotada en H, existe un elemento $f \in H$ y una subsucesión (f_μ) tales que $f_\mu \to f$ débilmente en H, esto es: $\forall g \in H : \langle f_\mu, g\rangle \to (f,g)$ donde $(\cdot\ ,\ \cdot)$ designa el producto escalar en H.

Se supondrá que Ω es 1-regular. Por la proposición 3.4 existe un operador $P \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\mathbb{R}^n))$ tal que $\forall v \in H^1(\Omega)$ se tiene $Pv = v$ p.p. en Ω. Truncando la función Pv se puede suponer el caso en que Pv tiene soporte compacto incluido en un compacto fijo $K \subset \Omega$.

Sea (v_m) una sucesión acotada de $H^1(\Omega)$. La sucesión imagen $(u_m) = (Pv_m)$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ luego en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Se puede extraer una subsucesión u_μ que converge débilmente en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sin perder generalidad se puede suponer que $u_\mu \to 0$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para demostrar que todo conjunto acotado en $H^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$ bastará probar que $u_\mu \to 0$ (fuertemente) en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Según el teorema de Plancharel y la caracterización de $H^1(\mathbb{R}^n)$

dada:

$$||u_\mu||^2_{0,\mathbb{R}^n} = ||\hat{u}_\mu||^2_{0,\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leq \int_{\overline{B}(0,M)} |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{\overline{B}(0,M)^c} |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi \qquad \text{en que}$$

$$\int_{\overline{B}(0,M)^c} |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\overline{B}(0,M)^c} (1+|\xi|^2)^{-1} (1+|\xi|^2) |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leq (1+M^2)^{-1} \int_{\overline{B}(0,M)^c} (1+|\xi|^2) |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leq (1+M^2)^{-1} ||(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{u}_\mu||_{0,\mathbb{R}^n}$$

$$= (1+M^2)^{-1} ||u_\mu||_{1,\mathbb{R}^n}$$

$$\leq C (1+M^2)^{-1}$$

ya que la sucesión (u_m) es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\overline{B}(0,M)^c} |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi < \varepsilon/2$$

Se prueba a continuación que $\int_{\overline{B}(0,M)} |\hat{u}_\mu(\xi)|^2 \, d\xi < \varepsilon/2$ para μ grande.

En efecto, puesto que $\operatorname{supp}(u_\mu) \subset K$ para todo μ se tiene

$$\hat{u}_\mu(\xi) = (2\Pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} u_\mu(x)dx = (2\Pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_K(x) \, e^{-i<x,\xi>}) u_\mu(x)dx$$

donde $\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in K \\ 0 & \text{si} \quad x \notin K \end{cases}$

Como la función $x \to \chi_K(x)\, e^{-i<x,\xi>}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y la subsucesión (u_μ) converge débilmente a cero se obtiene que $\hat{u}_\mu(\xi) \to 0$ cuando $\mu \to \infty$.

Del acotamiento de la sucesión (u_μ) en $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$|\hat{u}_\mu(\xi)| = |(2\Pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} u_\mu(x)dx| \leq (2\Pi)^{-n/2} ||u_\mu||^2_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_1;$$

por el teorema de Lebesgue:

$$||\hat{u}_\mu||^2_{0,\overline{B}(0,M)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mu \to \infty$$

de manera que existe $\mu_o \in \mathbb{N}$ tal que $||\hat{u}_\mu||^2_{0,\overline{B}(0,M)} < \varepsilon/2 \; ; \; \forall \mu \geq \mu_o$

Por lo tanto dado $\varepsilon > o$ existe $\mu_o \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||u_\mu||^2_{0,\mathbb{R}^n} \leq ||\hat{u}_\mu||_{0,\overline{B}(0,M)} + ||\hat{u}_\mu||_{0,\overline{B}(0,M)^c} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad ;$$

$\forall \mu \geq \mu_o$. []

<u>Observación</u>.

1) Si $\Omega =]a,b[\quad \mathbb{R}$, el teorema es una consecuencia simple del teorema de Ascoli ya que si $v \in H^1(\Omega)$, v es continua p.p. y verifica

$$\forall\, x,y \in [a,b]: v(x) - v(y) = \int_y^x \frac{dv}{dx}(\xi)d\xi$$

2) El resultado en general es falso si Ω no es acotado.

3) Si Ω es acotado solamente, la inyección canónica de $H^1_0(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta. En este caso el prolongamiento que se toma es el del Teo. 2.6

6. LOS ESPACIOS DE SOBOLEV $H^m(\Omega)$, m ENTERO POSITIVO.

Definición 6.1. (espacio $H^m(\Omega)$)

Para todo entero $m \geq 1$, se llama espacio de Sobolev de orden m sobre Ω al espacio.

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\} \quad \ldots \quad (6.1)$$

Se define en $H^m(\Omega)$ el producto escalar

$$(u,v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \{ \partial^\alpha u \, \partial^\alpha v \} \, dx \quad \ldots \quad (6.2)$$

y se denota

$$||v||_{m,\Omega} = (v , v)^{\frac{1}{2}}_{m,\Omega} \quad \ldots \quad (6.3)$$

la norma correspondiente.

Teorema 6.2.

El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable para el producto escalar definido en (6.2)

Demostración.

Es análoga al caso $H^1(\Omega)$.

Observación.

Se considera el espacio $H^2(\Omega)$. Si $v \in H^2(\Omega)$ entonces $v \in H^1(\Omega)$ y $\partial_i v \in H^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Se puede definir la traza de v y de $\partial_i v$ sobre Γ como funciones de $L^2(\Gamma)$. (Teor. 3.7), esto es:

$\gamma_o(v) = v/\Gamma \in L^2(\Gamma)$, $\gamma_o(\partial_i v) = \partial_i v/\Gamma \in L^2(\Gamma)$. Luego existe la derivada normal

$$\gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial \nu} /\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \partial_i v/\Gamma \; \nu_i$$

como elemento de $L^2(\Gamma)$. Además la aplicación

$v \to \vec{\gamma}\, v = (\gamma_o\, v,\ \gamma_1\, v)$ es lineal y continua de $H^2(\Omega)$ en $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

El resultado no es optimal. Se puede demostrar introduciendo el espacio de Sobolev $H^{3/2}$ que la aplicación es sobreyectiva sobre el espacio $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$. []

Orientación.

Se probó que $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, es decir la inyección canónica es continua y compacta. Pero las funciones de $H^1(\Omega)$ no son necesariamente continuas. Se probará que para un orden m bastante grande en relación a la dimensión de $\mathbb{R}^n$ se verifica: $H^m(\Omega) \subset C^\circ(\bar{\Omega})$.

Teorema 6.3.

Se tiene:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{m/2}\ \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

y la norma

$$|||v|||_{m,\mathbb{R}^n} = ||(1 + |\xi|^2)^{m/2}\ \hat{v}||_{0,\mathbb{R}^n}$$

es equivalente a la norma (6.3).

Demostración.

Se recuerda que para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|}\ \xi^\alpha\ \hat{f}(\xi) = (i\ \xi_1)^{\alpha_1} \ldots (i\ \xi_n)^{\alpha_n}\ \hat{f}(\xi)$$

Se tiene, por el teorema de Plancharel

$$v \in H^m(\mathbb{R}^n) \iff v \in L^2(\mathbb{R}^n),\quad \partial^\alpha\ v \in L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\quad |\alpha| \leq m$$

$$\iff \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \widehat{\partial^\alpha v} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \le m$$

$$\iff \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \le m$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m \, |\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi < + \infty$$

$$\iff (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Nuevamente del teorema de Plancharel

$$||v||^2_{m,\mathbb{R}^n} = \sum_{|\alpha| \le m} ||\partial^\alpha v||^2_{0,\mathbb{R}^n}$$

$$= \sum_{|\alpha| \le m} ||\widehat{\partial^\alpha v}||^2_{0,\mathbb{R}^n}$$

$$= \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_1|^{2\alpha_1} \cdots |\xi_1|^{2\alpha_n} \, |\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi$$

El resultado se obtiene entonces de la existencia de $C > 0$ tal que

$$(1 + |\xi|^2)^m \le \sum_{|\alpha| \le m} \xi_1^{2\alpha_1} \cdots \xi_n^{2\alpha_n} \le C \, (1 + |\xi|^2)^m \qquad []$$

Teorema 6.4.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado de frontera Γ "bastante regular" (por ejemplo de clase C^m). Entonces si $m > n/2$ se tiene $H^m(\Omega) \subset C^\circ(\bar{\Omega})$ con inyección continua.

Demostración.

Se supone Ω m-regular; entonces existe un operador $P \in \mathcal{L}(H^m(\Omega), H^m(\mathbb{R}^n))$ llamado m-prolongamiento, tal que para todo $v \in H^m(\Omega)$ se tiene $P v = v$ p.p. en Ω. (Generalización del teorema 3.4).

Sea $v \in H^m(\Omega)$ con $m > n/2$ y sea $u = Pv$; se escribe

$$\hat{u}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-m/2} \quad (1 + |\xi|^2)^{m/2}\, \hat{u}(\xi)$$

Puesto que $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$: $(1 + |\xi|^2)^{m/2}\, \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Por otro lado para $m > n/2$: $(1 + |\xi|^2)^{-m/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

En efecto, si $m > n/2$ entonces $-m + n/2 - 1 < -1$ y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^m} = \sigma_n \int_0^\infty \frac{\eta^{n-1}\, d\eta}{(1 + \eta^2)^m} < +\infty$$

en que σ_n designa el área de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$.

Luego $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Puesto que $u \in H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, según el teorema de inversión la función $w_o(x) = (2\Pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>}\, \hat{u}(x)dx$ verifica:

$w_o = u$ p.p. en $\mathbb{R}^n$ y $w_o \in C^\circ(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto la función $v \in C^\circ(\bar{\Omega})$. []

Corolario 6.5.

Si $K \in \mathbb{Z}^+$ y $m > {}^n/2 + k$ entonces

$$\boxed{H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})}$$

con inyección contínua.

Demostración.

$m - k > {}^{n}/2 \qquad H^{m-K}(\Omega) \subset \mathscr{C}^{o}(\bar{\Omega})$

Si $v \in H^{m}(\Omega)$, $\partial^{\alpha} v \in H^{m-k}(\Omega)$, $\forall\ \alpha,\ |\alpha| \leq K$

Por lo tanto $\partial^{\alpha} v \in \mathscr{C}^{o}(\bar{\Omega})$, $\forall\ \alpha,\ |\alpha| \leq K$ es decir $v \in \mathscr{C}^{k}(\Omega)$.

7. LOS ESPACIOS DE SOBOLEV $W^{m,p}(\Omega)$

Definición 7.1. (espacio $W^{m,p}(\Omega)$)

Para todo $m \geq 1$, se llama espacio de Sobolev de orden m en L^{p} con $1 \leq p < \infty$ sobre Ω al espacio:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^{p}(\Omega) \mid \partial^{\alpha} u \in L^{p}(\Omega),\ |\alpha| \leq m\} \qquad \ldots \qquad (7.1)$$

con norma $$||u||_{m,p} = \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||\partial^{\alpha} u||^{p}_{m,p}\Big)^{1/p} \qquad \ldots \qquad (7.2)$$

$W_{0}^{m,p}(\Omega)$: clausura de $\mathscr{D}(\Omega)$ en el espacio $W^{m,p}(\Omega)$

Teorema 7.1.

$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración.

Para la demostración basta observar que $L^{p}(\Omega) \subset L^{1}_{loc}(\Omega)$. El razonamiento es directo.

Teorema 7.2.

$W^{m,p}(\Omega)$ es separable.

Demostración.

Proviene de la separabilidad de L^p , $1 \leq p < \infty$

Orientación.

A continuación se enunciarán de manera general los teoremas de inmersión de Sobolev y el de inmersión compacta de Kondrachov. Se supondrá dominios con frontera Lipschitz continua. Sin embargo estos teoremas pueden ser demostrados en un contexto más general, como es el de dominios con la propiedad de cono.

Teorema 7.3. (Teorema de inmersión de Sobolev).

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ de frontera Lipschitz continua. Sean j,m enteros no negativos y $1 \leq p < \infty$. Entonces según el signo de mp-n se tienen las inmersiones siguientes:

1) Si $mp < n$, entonces:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \ , \quad p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$$

en particular

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ , \quad p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$$

2) Si $mp = n$, entonces:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ ; \quad p \leq q < \infty$$

3) a) Si $mp > n > (m-1)p$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \ ; \quad 0 < \lambda \leq m - n/p$$

b) Si $n = (m - 1)p$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \ , \quad 0 < \lambda < 1$$

4) Todas las conclusiones anteriores son válidas si en lugar de los espacios W se reemplazan por los espacios W_o.

Teorema 7.4. (Teorema de Kondrachov)

Sea Ω un dominio **acotado** de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz continua. Sean j,m enteros no negativos y $1 \leq p < \infty$.

Entonces las siguientes inmersiones son compactas:

1) Si $mp < n$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$$

2) Si $mp = n$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq q < \infty$$

3) Si $mp > n$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j}(\Omega)$$

4) Si $mp > n \geq (m - 1)p$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega}) \quad \text{donde} \quad 0 < \lambda < m - n/p$$

A N E X O

SOBRE DISTRIBUCIONES

Notaciones.

Ω : designará un abierto de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\partial\Omega = \Gamma$

$L^2(\Omega)$: espacio de (clases) funciones reales cuyo cuadrado es integrable sobre Ω.

$(f,g) = \int_\Omega fg \quad ; \quad f,g \in L^2(\Omega)$ define en $L^2(\Omega)$ una estructura hilbertiana.

$||f||_{0,\Omega} = (f,f)^{\frac{1}{2}}$ la norma en $L^2(\Omega)$.

Definición 1. (espacio de las funciones test $\mathcal{D}(\Omega)$).

Se define el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ como el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables con soporte compacto en Ω, esto es:

$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \psi \quad C^\infty(\Omega), \text{ supp}(\Omega) = \overline{\{x \in \Omega : \psi(x) \neq 0\}} \quad \text{es compacto en } \Omega\}$

Observación.

Si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multindice, se escribe

$$\partial^\alpha\psi = (\partial_1\psi)^{\alpha_1} \dots (\partial_n\psi)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}\psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_1}} , \quad |\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$$

Ejemplo.

Un ejemplo clásico de función $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ está dado por

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{para} \quad |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1 \\ 0 & \text{para} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Se observa que si $|x| < 1$ y $|x| \to 1$ entonces

$\frac{1}{|x|^2-1} < 0$ y $\frac{1}{|x|^2-1} \searrow -\infty$ de donde $\psi(x) \to 0$.

El $\operatorname{supp}(\psi) = [-1,1]$ en el caso $n=1$; en el caso general el $\operatorname{supp}(\psi) = \overline{B}(0,1)$.

Definición 2. (pseudo-topología en $\mathcal{D}(\Omega)$)

Se define en $\mathcal{D}(\Omega)$ una pseudo-topología, es decir, se definen las sucesiones convergentes de $\mathcal{D}(\Omega)$: si (ψ_j) es una sucesión de $\mathcal{D}(\Omega)$ se dirá que ψ_j converge a ψ en $\mathcal{D}(\Omega)$ si:

i) los soportes de ψ_j están contenidos en un mismo conjunto acotado, independientemente de j.

ii) las derivadas de cualquier orden m de ψ_j convergen uniformemente cuando $j \to \infty$ a la correspondiente derivada de ψ.

esto es:

i) $\exists\, B \subset \Omega$, B acotado tal que $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset B$, $\forall\, j$

ii) $\forall\, \alpha \in N^n$, $\partial^\alpha \psi_j \to \partial^\alpha \psi$ [unif]

Definición 3. (espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de las distribuciones sobre Ω).

Se define el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de las distribuciones sobre Ω como el espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, el espacio de las formas lineales "continuas" sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Esto es, si $\langle \cdot,\cdot \rangle$ designa la dualidad entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$ se tiene para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ψ, $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\langle T, \lambda\psi \rangle = \lambda \langle T,\psi \rangle$

$<T, \psi_1 + \psi_2> \; = \; <T, \psi_1> \; + \; <T, \psi_2>$ (linealidad)

$\psi_m \to \psi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ $\Rightarrow$ $<T, \psi_m> \; \to \; <T, \psi>$ (continuidad)

Definición 4. (pseudo-topología en $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Se define en $\mathcal{D}'(\Omega)$ una pseudo-topología : si (T_j) es una sucesión de $\mathcal{D}'(\Omega)$ se dirá que T_j converge a T en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si para todo $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $<T_j, \psi> \; \to \; <T,\psi>$

Ejemplo 5a. (Masa de Dirac).

Sean $a \in \Omega$, se define la distribución "masa de Dirac δ_a en el punto a" por

$$<\delta_a,\psi> \; = \; \psi(a)$$

Es claro que es una distribución sobre Ω. Si $a_m \to a$ en Ω se verifica $\delta_{a_m} \to \delta_a$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Ejemplo 5b. ($L^2(\Omega)$ es un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Se recuerda que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$

Dada una función $f \in L^2(\Omega)$ se le asocia la distribución $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad , \quad < T_f, \psi > \; = \int_\Omega f(x) \;\; \psi(x)dx$$

Se observa que la aplicación $f \to T_f$ es inyectiva. En efecto $T_f = 0$ implica

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad , \quad \int_\Omega f(x) \;\; \psi(x)dx = 0$$

que implica $f = 0$ en virtud de la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Luego $T_f \neq T_g$ si $f \neq g$ de manera que se puede identificar f a T_f lo que equivale a identificar $L^2(\Omega)$ a un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Esta identificación se escribe

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Se tiene por lo demás que la inclusión es "continua":

$$f_n \to f \quad \text{en } L^2(\Omega) \quad = \quad f_n \to f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

En efecto, según la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left| \int_\Omega (f_n - f)\, \psi \, dx \right| \leq \|f_n - f\|_{0,\Omega} \; \|\psi\|_{0,\Omega}$$

Como $f_n \to f$ en $L^2(\Omega)$, $\|f_n - f\|_{0,\Omega} \to 0$, luego:

$$\int_\Omega (f_n - f)\, \psi \, dx \to 0 \quad , \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

de donde

$$\int_\Omega f_n\, \psi \, dx \to \int_\Omega f\, \psi \, dx \;, \quad \text{esto es: } f_n \to f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

<u>Observación</u>.

De la misma manera se puede identificar $L^1_{loc}(\Omega)$ de las funciones localmente integrables en Ω a un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Definición 6</u>. (derivación en el sentido de distribuciones).

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ como la distribución:

$$< \frac{\partial T}{\partial x_i} , \psi > = - < T , \frac{\partial \psi}{\partial x_i} > \quad , \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observación.

1) La definición 6 tiene sentido porque

$$\psi \rightarrow - < T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} >$$

define una forma lineal "continua" sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

En efecto, si $\psi_m \rightarrow \psi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, $\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Como $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$<T, \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i}> \rightarrow < T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} > \text{ por "continuidad" de } T$$

2) Si $f \in C^1(\Omega)$, su derivada $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en el sentido clásico coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones.

En efecto, integrando por partes:

$$<\frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \psi > = - <T_f, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} > = - \int_\Omega f(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (x)dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} (x) \psi (x)dx$$

ya que ψ se anula en una vecindad de Γ (ψ es de soporte compacto en Ω).

Por la identificación $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} (x) \psi (x)dx = < T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \psi >$$

Por lo tanto $\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$ (en que $\frac{\partial T_f}{\partial x_i}$ es la derivada en el sentido de las distribuciones)

<u>Definición 7.</u> (generalización de la def. 1.6).

Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define la derivada en el sentido de las distribuciones

$$\partial^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \text{por:}$$

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) : < \partial^\alpha T, \psi > = (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \psi >$$

<u>Observación.</u>

1) De la definición 1.7 se tiene que una distribución es indefinidamente derivable en el sentido de las distribuciones.

2) La aplicación $T \to \partial^\alpha T$ es continua de $\mathcal{D}'(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ en el sentido siguiente

$$T_n \to T \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

En efecto: $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\partial^\alpha \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Como $T_n \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ $< T_n, \partial^\alpha \psi > \to < T, \partial^\alpha \psi >$, luego $\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Ejemplo 8a.</u> (la derivada de la función de Heaviside es la masa de Dirac en 0).

Se define la función de Heaviside H sobre $\mathbb{R}$ por:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Se tiene

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta_o \qquad \text{(masa de Dirac en el origen)}$$

En efecto, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$<\frac{d}{dx} T_H, \psi > = - <T_H, \frac{\partial \psi}{\partial x} > = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} (x) dx = - \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) dx = \psi(0)$$

porque ψ es de soporte compacto en $\mathbb{R}$.

<u>Ejemplo 8b</u>. (derivada de una función $C^1(\mathbb{R})$ por tramos, f' acotada).

Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$ y que admite una derivada $\frac{df}{dx}$ continua y acotada sobre $\mathbb{R} - \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\}$. Sea

$s_j = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$ el salto de f en el punto x_j. Entonces

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{\frac{df}{dx}} + \sum_{j=1}^{n} s_j \delta_{x_j}$$

En efecto,

$$< \frac{dT_f}{dx}, \psi> = - < T_f, \frac{d\psi}{dx} >$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d\psi}{dx} (x) dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} s_j \psi(x_j) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} (x) \psi(x) dx$$

$$= < \sum_{j=1}^{n} s_j \delta_{x_j}, \psi > + < T_{\frac{df}{dx}}, \psi >$$

$$= < \sum_{j=1}^{n} s_j \delta_{x_j} + T_{\frac{df}{dx}}, \psi >$$

BIBLIOGRAFIA.

1. ADAMS, R. "Sobolev Spaces", Academic Press, 1975.

2. KONDRACHOV, V. "Certain properties of functions in the spaces L^p", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 48(1945), 535-538.

3. MEYERS, N. & SERRIN, J. "H = W", Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51(1964), 1055-1056.

4. NIKOL'SKII, S. "On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables", Russian Math. Surveys 16(1961) 55-104.

5. SOBOLEV, S. "On a theorem of functional analysis", Math. Sb.46 (1938), 471-496.

6. SOBOLEV, S. "Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics", Leningrad 1950 (traducción inglesa: Amer. Math. Soc., Trans., Math. Mono. 7 (1963)).

7. TARTAR, L. "Topics in Nonlinear Analysis", MRC, Madison, Wisconsin, Report # 1584.