DOI: 10.22199/S07160917.1983.0005.00009

REVISTA PROYECCIONES: 179-200.
JORNADAS MATEMATICAS, AGOSTO 1983.

ESPACIOS UNIFORMES

Dr. SAMUEL NAVARRO HERNANDEZ *

NOCIONES BASICAS SOBRE FILTROS.

Sea X un conjunto no vacío, $F \subset P(X)$ es un filtro sobre X si

1) Dados A, B en F se tiene $A \cap B \in F$
2) Si $A \in F$ y $A \subset B$ entonces $B \in F$
3) $\phi \notin F$

Un conjunto $B \subset P(X)$, $B \neq \phi$ es una base de filtro sobre X si

1) Dados A, B en B se tiene $A \cap B \in B$
2) $\phi \notin B$

Un conjunto $S \subset P(X)$, $S \neq \phi$ es una subbase de filtro sobre X si

---

* Profesor Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile.

1) Toda familia finita en S tiene intersección no vacía.

CONSTRUCCION DE FILTROS Y BASES DE FILTRO.

A) Si B es base de filtro entonces

$$F = \{A \subset X \ / \ A \supset B \text{ para algún } B \text{ en } B\}$$

es un filtro que se llama filtro generado por B.

Si S es subbase de filtro entonces

$$B = \{B \subset X \ / \ B = \bigcap_{i=j}^{n} S_i \ , \ S_i \in S\}$$

es una base de filtro.

Obs.: Un filtro puede tener más de una base. En un conjunto X puede haber tantos filtros como permita la cardinalidad de X.

Notación. $\Phi(X) = \{F \ / \ F \text{ es un filtro sobre } X\}$ $(\Phi(X), \subset)$ es ordenado.

Ejemplos:

1) Dado $x \in X$, $\{x\}$ es una base de filtro.
Se usa la notación $\dot{x}$ para el filtro generado por $\{x\}$.

2) Si X es infinito
$B = \{A \ / \ A^c \text{ finito}\}$ es base de filtro.

3) Si X es espacio topológico y $x \in X$
$V(X) = \{\text{las vecindades abiertas de } X\}$ es una base de filtro.

4) Si $\{X_n\}$ es una sucesión en X $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$B_n = \{x_m \ / \ m \geq n\}$, es una base de filtro.

5) $F = \{X\}$ es un filtro.

6) Si $X = \mathbb{N}$

$F = \{A_n \ / \ A_n = \{m \ / \ m \geq n\}\}$

se llama filtro de Frèchet.

7) Si X es preordenado filtrante según σ y a $\in$ X anotamos el conjunto

$S(a) = \{X \in X \ / \ a \ \sigma \ x\}$

que llamamos sección de a.

$B = \{S(a) \ / \ a \in X\}$ es una base de filtro, el filtro generado se llama filtro de las secciones de X.

Def.:

Un ultrafiltro es un elemento maximal de $(\Phi(X), \subset)$

Obs.:

Para cada filtro hay un ultrafiltro que lo contiene (Zorn).

Una forma de caracterizar los ultrafiltros es:

1) F es un ultrafiltro ssi $A \cup B \in F$

$\Longrightarrow A \in F$ ó $B \in F$

2) F es un ultrafiltro ssi

$A \cap F \neq \phi \ \forall \ F \in F$ implica $A \in F$

FILTROS INDUCIDOS.

Sea X un conjunto, S $\subseteq$ X, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, definimos el conjunto

$$\mathcal{F}_S = \{A \cap S \,/\, A \in \mathcal{F}\}$$

que llamamos traza de $\mathcal{F}$ sobre S.

Obs.:

$\mathcal{F}_S$ es un filtro en S ssi

$\mathcal{F}$ está frecuentemente en S (i.e $A \cap S \neq \phi \;\forall\; A \in \mathcal{F}$)

Producto:

Si X, X' son dos conjuntos

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ dos bases de filtro en X y X' respectivamente.

$$\mathfrak{B} = \{B_1 \times B_2 \,/\, B_1 \in \mathcal{B},\ B_2 \in \mathcal{B}'\}$$

es una base de filtro en X x X'.

(El caso infinito también vale)

$$\mathfrak{B} = \{\P B_i \,/\, B_i \in \mathcal{B},\ B_i \neq X \text{ sólo en un número finito de índices}\}$$

es una base de filtro en $\P X_i$

Dados X, X' conjuntos

$f : X \longrightarrow X'$ una función.

y $\mathcal{F}$ un filtro en X siempre se tiene que

$f(\mathcal{F})$ es base de filtro en X'.

ESPACIOS UNIFORMES.

Sea X conjunto no vacío. Para W, V c X x X definimos:

$$W^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \,/\, (x, y) \in W\}$$

$$V \circ W = \{(x, z) \in X \times X \,/\, \exists\, y \in X \ni (x, y) \in W \wedge (y, Z) \in V\}$$

La diagonal de X x X es:

$$\Delta = \{(x, x) \,/\, x \in X\}$$

Sea U un filtro sobre X x X satisfaciendo los axiomas:

1) $\forall\, W \in U$, $\Delta \subset W$

2) $W \in U \Longrightarrow W^{-1} \in U$

3) $\forall\, W \in U$, $\exists\, V \in U \ni V \circ V \subset W$

Decimos que el filtro U define una uniformidad o una estructura uniforme sobre X y cada $W \in U$ es llamada una vecindad de la uniformidad. (conector).

Def.:

El par (X, U) se llama Espacio Uniforme.

Def.:

Una estructura uniforme U sobre X es Hausdorff si

$$\bigcap \{W \,/\, W \in U\} = \Delta$$

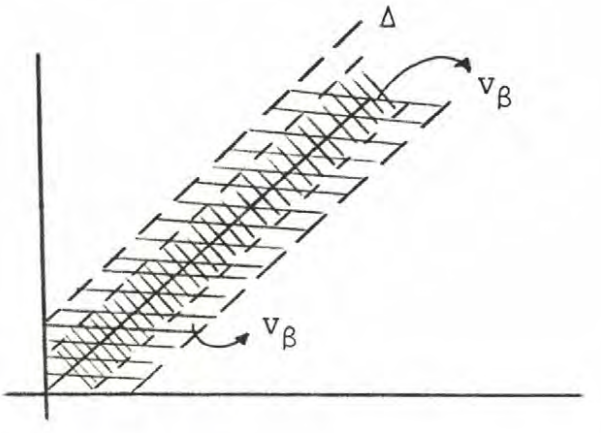
Ejemplo:

1) $U = \{A \times B \subseteq X \times X \,/\, A \times B \supseteq \Delta\}$

2) $U = \{X \times X\}$

3) Sea $X = \mathbb{R}^+$ y sea $H = \{V_\alpha \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / \alpha \in \mathbb{R}^+\}$ donde

$V_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / |x - y| < \alpha\}$



Entonces H es una base de filtro sobre X x X y el filtro U generado por H define una uniformidad sobre $X = \mathbb{R}^+$.

Dados X conjunto, U estructura uniforme en X x X se define V como la familia de subconjuntos $G \subset X$ tal que:
si $X \in G$ entonces $\exists W \in U \ni \{y \in X / (x, y) \in W\} \subset G$

Prop.:

Sean $G_i \in V$, i = 1,...,n entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in V$$

Sea: $X \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i \Longrightarrow X \in G_i \ \forall i = 1,....,n \Longrightarrow \exists W_i \in U$

tal que: $\{y \in X/(x, y) \in W_i\} \subset G_i \ \forall i = 1,....,n \Longrightarrow$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in X / (x, y) \in W_i\} \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

Como U es filtro, $\bigcap_{i=1}^{n} W_i = \tilde{W} \in U \Longrightarrow \{y \in X/ (x, y) \in \tilde{W}\}$

$c \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in X/ (x, y) \in W_i\} \; c \bigcap_{i=1}^{n} G_i \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in V$

Prop.:

Dado $G_i \in V$, i $\in$ I, conjunto de índices arbitrario

$\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in V$

Sea $X \in \bigcup_{i\in I} G_i \Longrightarrow \exists$ j $\in$ I tal que: $X \in G_j \Longrightarrow \exists \tilde{W} \in U \ni$

$\{y \in X/ (x, y) \in \tilde{W}\} \; c \; C_j \Longrightarrow \{y \in X/ (x, y) \in \tilde{W} \; c \bigcup_{i\in I} G_i \Longrightarrow$

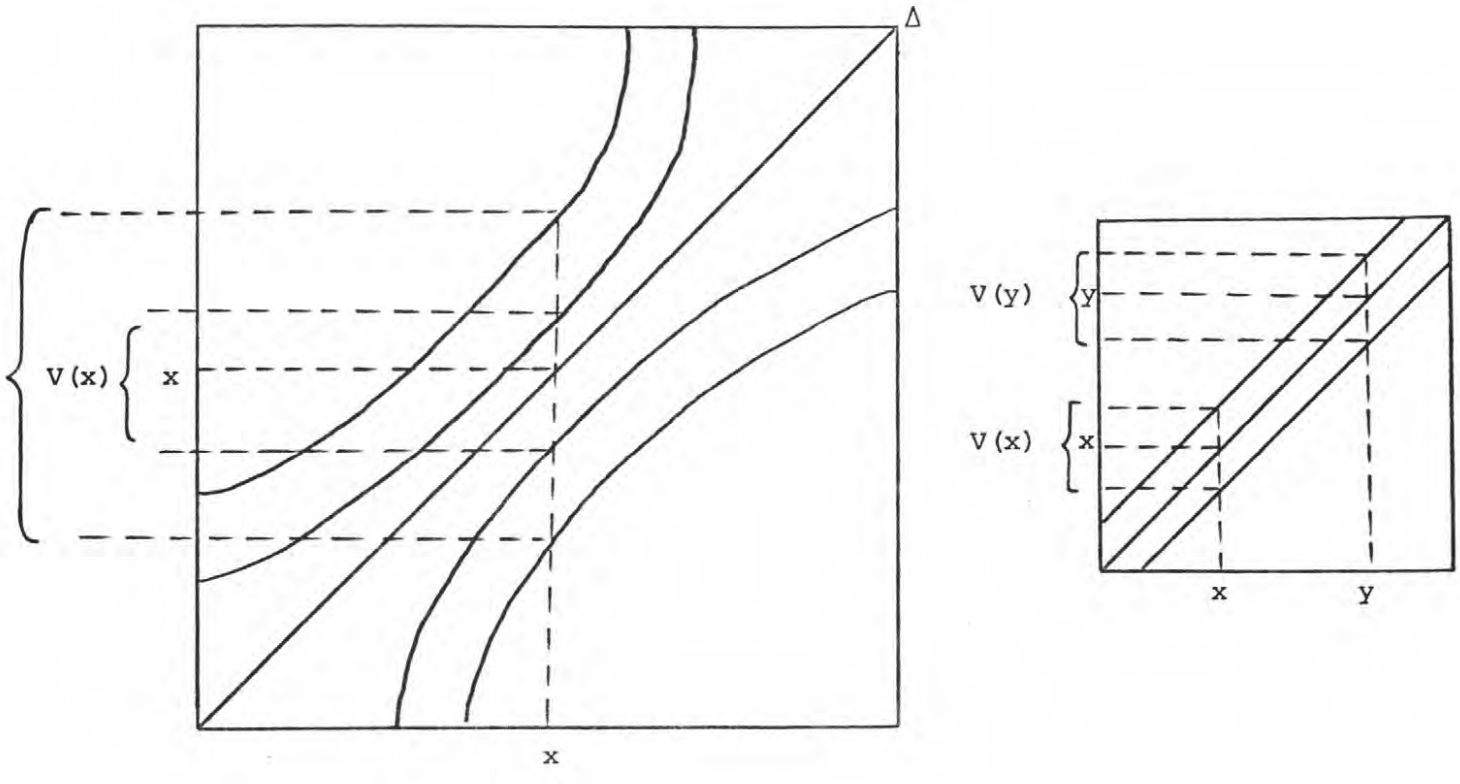
$\bigcup_{i\in I} G_i \in V$

Además $X \in V$ puesto que $\forall$ W $\in U \; \forall$ x $\in$ X $\{y \in X/ (x, y) \in W\}$ $c \; X \Longrightarrow$ X $\in V$

También $\phi \in V$, pues sino:" $\exists$ x $\in \phi$ tal que $\forall$ W $\in \beta$ $\{y \in X/ (x, y) \in W\} \not\subset \phi$" ($\Longrightarrow \Longleftarrow$)

Obs.:

V define una topología T_V sobre $X \ni \forall$ x $\in X$ la familia $W(x) = \{y \in X/ (x, y) \in W\}$ donde W recorre U es una base de vecindades de X.



Def.:

a) Un espacio topológico X es uniformizable si su topología puede ser derivada de una uniformidad sobre X.

b) La topología derivada de la uniformidad es una topología de Hausdorff si la uniformidad es Hausdorff.

Prop.:

Un espacio topológico de Hausdorff es uniformizable ssi es completamente regular (X es completamente regular si F c X cerrado y $p \in X \backslash F$, $\exists$ f: $X \longrightarrow [0, 1]$ continua t.q. f(p) = 0 y f(F) = 1)

Definición.

Sean (X, U_1) (Y, U_2) espacios uniformes. Una aplicación

f: $X \longrightarrow$ Y es uniformemente continua si $\forall$ V en U_1 $\exists$ U conector en U_1 tal que (x, y) $\in U \Longrightarrow$ (f(x), f(y)) $\in V$

Prop.:

Cada aplicación uniformemente continua es continua.

Dem.: Trivial.

Obs.:

1) Los espacios uniformes X , Y son isomorfos si $\exists$ f: X $\longrightarrow$ Y biyectiva tal que f y f^{-1} son uniformemente continuas.

   f es llamado "isomorfismo uniforme".

2) Si U_1 y U_2 son dos filtros sobre X x X que definen uniformidades sobre X y si U_1 c U_2 decimos que la uniformidad definida por U_1 menos fina que la definida por U_2.

3) Si X es un conjunto $\{X_\alpha / \alpha \in A\}$ familia de espacios uniformes y $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, entonces, existe una uniformidad menos fina sobre X para la cual f_α, $\alpha \in A$ son uniformemente continuas.

   Como caso particular la uniformidad producto sobre $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

Similarmente si X es un espacio uniforme y S c X la uniformidad inducida es la uniformidad sobre S menos fina para la cual la inyección canónica i : S $\longrightarrow$ X es uniformemente continua.

Def.:

(X, U) esp. uniforme, F un filtro sobre X es convergente a $x \in$ X, si F es más fino que $\{W(x) / W \in U\}$

Def.:

Sea X espacio uniforme. Un filtro F sobre X es un filtro de Cauchy si para cada vecindad V $\in U \exists F \in F$ t.q. F x F c V.

Si cada filtro de Cauchy converge (a un elemento de X) entonces X es llamado completo.

Obs.:

1) Si f: $(X, U_1) \longrightarrow (Y, U_2)$ es uniformemente continua y F filtro de Cauchy en $X \Longrightarrow$ f (F) filtro de Cauchy en Y.

2) Para cada espacio uniforme X podemos construir un espacio uniforme completo $\hat{X}$ tal que X es uniformemente isomorfo a un subespacio denso de $\hat{X}$ y tal que $\hat{X}$ es Hausdorff si X lo es. Si X es Hausdorff, entonces $\hat{X}$ es determinado por estas propiedades por el isomorfismo y es llamado la completación de X.

   Una base de vecindades de uniformidad de $\hat{X}$ puede ser obtenida tomando las clausuras (en la topología producto $\hat{X} \times \hat{X}$) de la base de vecindades de uniformidad de X.

3) Si cada sucesión de Cauchy en X converge, entonces X es llamado semicompleto o secuencialmente completo.

4) Si X es un espacio uniforme completo y A un subespacio cerrado entonces el espacio uniforme A es completo.

5) Si X es un espacio uniforme completo y A un subespacio completo entonces A es cerrado en X.

6) Un producto de espacios uniformes es completo ssi cada espacio factor es completo.

7) Si X es un espacio uniforme, Y un espacio completo Hausdorff, $X_o \subset X$ y f: $X_o \longrightarrow$ Y uniformemente continua, entonces f tiene una única extensión uniformemente continua: $\bar{f}$: $\overline{X_o} \longrightarrow$ Y .

EXTENSION POR CONTINUIDAD.

Teorema: Sea X espacio topológico A c X denso, f: A $\longrightarrow$ Y, Y regular (es decir F c Y cerrado, p ε Y $\setminus$ F, $\exists$ V, W abiertos disjuntos $\ni$ F c V y p ε W) entonces f se extiende continuamente a $\bar{f}$: $X \longrightarrow$ Y ssi $\forall$ x ε X,

$$\lim_{\substack{y \longrightarrow x \\ y \varepsilon A}} f(Y) = Z \varepsilon Y$$

Dem.:

$\bar{f}$ continua sobre $X \Longrightarrow \forall$ x ε X

$$\bar{f}(x) = \lim_{\substack{y \longrightarrow x \\ y \varepsilon A}} \bar{f}(y) = \lim_{\substack{y \longrightarrow x \\ y \varepsilon A}} f(y)$$

Recíprocamente: sea

$$f(x) = \lim_{\substack{y \longrightarrow x \\ x \varepsilon A}} f(y) \qquad \forall\, x \varepsilon X$$

$\bar{f}$ está definida pues Y es Hausdorff Pd. $\bar{f}$ es continua $\forall$ x ε X

Sea V' vecindad cerrada de $\bar{f}(x)$ en Y $\Longrightarrow \exists$ V vecindad abierta de x ε X $\exists \ni$ f(V $\cap$ A) c V' $\Longrightarrow \bar{f}(Z) = \lim_{\substack{y \longrightarrow Z \\ y \varepsilon A}} f(y)$ $\forall$ Z ε V

$\Longrightarrow \bar{f}(z) \varepsilon \overline{f(V \cap A)}$ c V' puesto que V' es cerrado y el resultado sigue del hecho de que vecindades cerradas de f(x) forman un sistema fundamental de vecindades de f(X) en Y.

Prop.:

Sea X espacio topológico $A \subset X$ denso y $f: A \longrightarrow X'$ donde X' es esp. unif. completo T_2, entonces f puede ser extendida a X por continuidad ssi $\forall x \in X$, la imagen bajo f de la traza sobre A del filtro de vecindades de $x \in X$, es una base de filtro de Cauchy en X'.

Dem.:

Sigue del teorema anterior porque X' es regular y porque sobre X' los filtros de Cauchy son convergentes.

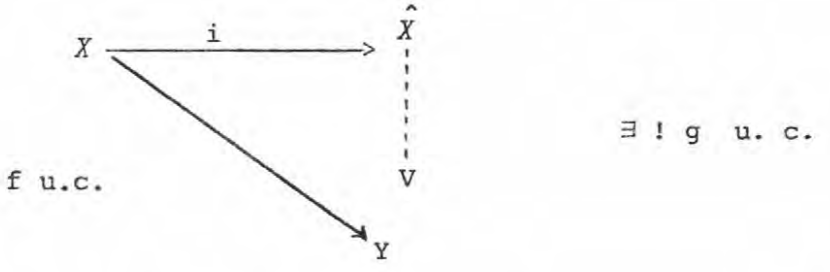
LA COMPLETACION DE UN ESPACIO UNIFORME.

Teorema:

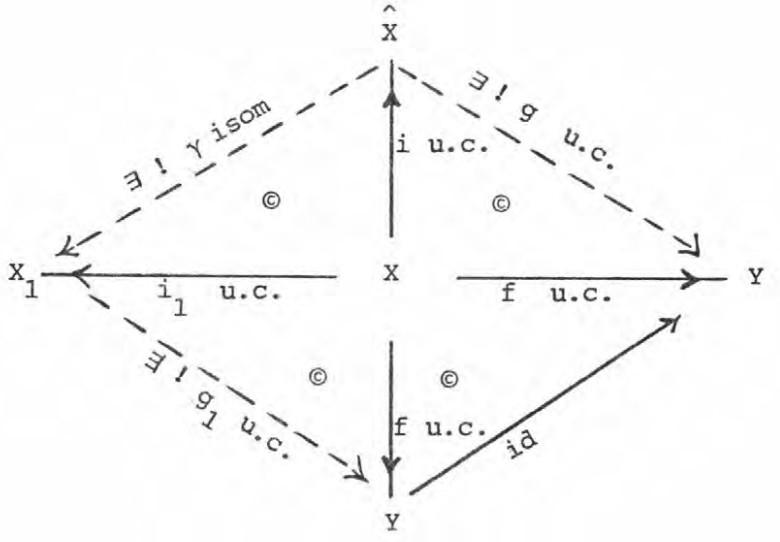
Sea X espacio uniforme. Entonces existe un espacio uniforme T_2 completo $\hat{X}$ y una aplicación uniformemente continua $i : X \longrightarrow \hat{X}$ t. q (P): Dada cualquier aplicación uniformemente continua $f : X \longrightarrow Y$, Y espacio uniforme T_2, $\exists!$ aplicación uniformemente continua.

$$g : \hat{X} \longrightarrow Y \quad t.q \qquad f = g \circ i$$

(e.d. i es una aplicación universal).



Si (i_1, X_1) es otro par donde X_1 es un e.u.c. T_2 e $i_1 : X \longrightarrow X_1$ u.c. t.q. verifica (P) entonces $\exists! \gamma : \hat{X} \longrightarrow X_1$ isomorfismo t.q $i_1 = \gamma \circ i$



Definición:

El e.u.c. T_2, $\hat{X}$ del Teorema es llamado la completación de Hausdorff de X, y la aplicación $i : X \longrightarrow \hat{X}$ es llamada la aplicación canónica de X en su completación de Hausdorff.

Propiedades:

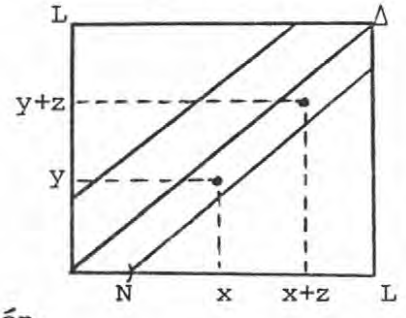
1) Si X es un e.u. T_2 entonces $i : X \longrightarrow \hat{X}$ es un isomorfismo de sobre un subespacio denso de $\hat{X}$ (esto caracteriza la completación de un espacio T_2).

2) Si X no es T_2, entonces sólo podemos asegurar que $i(X)$ es un subespacio denso de $\hat{X}$.

UNIFORMIDAD Y ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

Definición.

Una uniformidad sobre un espacio vectorial L es llamada <u>invariante bajo traslación</u> si tiene una base $\mathcal{N}$ t q $(x, y) \in N$ es equivalente con $(x + z, y + z) \in N \ \forall z \in L$ y $N \in \mathcal{N}$



$(x, y) \in N \iff (x+ z, y+ z) \in N$

Proposición.

La topología de cualquier espacio vectorial topológico puede ser derivada de una única uniformidad $\mathcal{N}$ invariante bajo traslación. Si B es cualquier base de vecindades de O, la familia $N_V = \{(x, y) / X - y \in V\}$, $V \in B$ es una base para $\mathcal{N}$.

Dem.:

Sea (L, C) e.v.t. con B base de vecindades de O.

P.d. $\tilde{\mathcal{N}} = \{N_V / v \in B\}$ forman una base de filtro sobre L x L.

i) $\tilde{\mathcal{N}} \neq \phi$ pues $\forall V \in B$, $O \in V \Longrightarrow (0, 0) \in N_V \wedge N_V \neq \phi \ \forall N_V$

ii) $N_V, N_W \in \tilde{\mathcal{N}} \Longrightarrow V \subset W$ ó $W \subset V$ sin pérdida de generalidad

$V \subset W \Longrightarrow N_V \subset N_V \cap N_W$

Luego $\tilde{\mathcal{N}}$ es una base de filtro sobre L x L que es una base para la uniformidad $\mathcal{N}$ invariante bajo traslación produciendo la topología C de L.

Si N_1 es otra uniformidad con estas propiedades existe una base M de N_1 consistente de conjuntos invariantes bajo traslación y t. q. los conjuntos

$U_m = \{x - y \,/\, (x, y) \in m\}$, $m \in M$ forman una base de vecindades de O para C, puesto que:

$$(U_m \subset V \iff m \subset N_v) \implies N_1 = N$$

Obs.:

1) A c L es completo ssi cada filtro de Cauchy en A converge a un elemento de A (A con la uniformidad inducida).

2) Un e.v.t. L es un e.v. Hausdorff ssi L es un esp. unif. T_2.

   Luego L es T_2 ssi $\cap \{U, U \in \mathcal{U}\} = \{0\}$, donde $\mathcal{U}$ es cualquier base de vecindades de O en L.

3) Si L es esp. vect. top, por un subespacio de L entendemos un subespacio M (es decir $M \neq \phi$, $M + M \subset M$, $K M \subset M$) provisto de la topología inducida por L.

   M e.v.t es T_2 si L lo es.

4) L esp. vect. top $T_2 \implies$ L es completamente regular.

Teorema. (Completación de L).

Sea L esp. vect. top T_2, entonces existe un esp. vect. top. c. T_2 $\tilde{L}$ sobre K t.q $L \subset \tilde{L}$ es denso, $\tilde{L}$ es único salvo isomorfismo. Además para cualquier base B de vecindades de O en L, la familia $\tilde{B} = \{\bar{V}, V \in B\}$ de clausuras en $\tilde{L}$ es una base de vecindades de O en $\tilde{L}$.

Dem.:

Asumamos conocido la existencia de un e.u.c. T_2 $\tilde{L}$ el cual contiene a L como subespacio denso, el cual es único salvo isomorfismo uniforme. Por proposición anterior:

$$\left.\begin{array}{lll} + : & L \times L \longrightarrow \tilde{L} \\ & (x, y) \longrightarrow x + y \\ \\ . : & K \times L \longrightarrow \tilde{L} \\ & (\lambda, x) \longrightarrow \lambda x \end{array}\right\} \text{ son uniformemente continuas}$$

En efecto:

$$\begin{array}{lccc} + : & (L, T) \times (L, T) & \xrightarrow{c} & (L, T) \\ & \updownarrow & & \updownarrow \\ & (L, U_T) \times (L, U_T) & \longrightarrow & (L, U_T) \xrightarrow{u.c} (\tilde{L}, \tilde{U}) \\ & & & + \end{array}$$

P.d. Dado $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ $U \times U \in U_T \times U_T$ t.q $U + U \subset \tilde{U}$

sea B base de vecindades de O en T, entonces

$\{N_v / v \in B\}$ es base de U_T

Por continuidad de +, dado $T \in T$ $\exists$ $S \times S \in T$ e $\mathcal{T}$ t.q $S + S \subset T$ (donde S y T son vecindades de O).

Pero asociado a S tenemos N_S y a T, N_T. Ahora, dado $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}} \exists U \in U_T$ tal que $U \subset \tilde{U}$ pero $\{N_v\}$ es base de U_T

$\Longrightarrow \exists T \in T$ t.q $N_T \subset U$.

Luego, si probamos que:

$N_S + N_S \subset N_T \subset U \subset \tilde{U}$ tendríamos que dado $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$,

$\exists\ N_S \times N_S \in U_T \times U_T$ t.q $N_S + N_S \subset \tilde{U}$, lo que probaría la continuidad uniforme.

En efecto,

$$\left.\begin{array}{l}(a, b) \in N_S \Longrightarrow a - b \in S \\ (c, d) \in N_S \Longrightarrow c - d \in S\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in N_T$, puesto que

$$a + c - (b + d) = \underbrace{(a - b)}_{\in S} + \underbrace{(c - d)}_{\in S} \in T$$

Luego + y · tiene únicas extensiones continuas

$$+ : \tilde{L} \times \tilde{L} \longrightarrow \tilde{L}$$

$$. : K \times \tilde{L} \longrightarrow \tilde{L}$$

que transforma a $\tilde{L}$ en un e. vect. sobre K.

Puesto que $\{N_v / v \in B\}$ es base de la uniformidad U de L, las clausuras $\bar{N}_v$ es base de la uniformidad $\tilde{U}$ de $\tilde{L}$ y además $\bar{N}_v = \bar{N}_{v_v}\ \forall\ v \in B$ (Se prueba usando la continuidad de $\tilde{L} \times \tilde{L} \longrightarrow \tilde{L} : (\tilde{x}, \tilde{y}) \longrightarrow (\tilde{x} - \tilde{y})$.

Luego $\tilde{B} = \{\bar{V} / V \in B\}$ es base de vecindades de O en $\tilde{L}$.

P.d la topología $\tilde{T}$ definida por $\tilde{U}$ hace a $\tilde{L}$ un esp. vect.top.

Es claro que $\tilde{T}$ es invariante bajo traslaciones pues estamos tomando los $\bar{N}_v = N_{\bar{v}}$

Además como B satisface:

a) $\forall\ v \in B$, $\exists\ U \in B$ t.q $U + U \subset V$

b) $\forall\ V \in \mathcal{B}$ es equilibrado y absorbente.

c) $\forall\ \lambda \in K,\ 0 < |\lambda| < 1$ tal que $V \in \mathcal{B} \Longrightarrow \lambda V \in \mathcal{B}$

se deduce que $\mathcal{B}$ satisface a) y c) puesto que

a) $\bar{U} + \bar{U} = \overline{U + U} \subset \bar{V}$ y

c) $V \in \mathcal{B} \Longrightarrow \lambda V \in \mathcal{B} \Longrightarrow \lambda \bar{V} \in \tilde{\mathcal{B}}$

es decir $\bar{V} \in \tilde{\mathcal{B}} \Longrightarrow \lambda \bar{V} \in \tilde{\mathcal{B}}$

P.d. (b) con lo cual probaríamos que $(\tilde{L}, \tilde{\mathcal{T}})$ es esp. vect. top.

Sea $V \in \mathcal{B}$, $\exists$ U vecindad de cero equilibrada t.q $U + U \subset V$. Luego $\overline{U + U}$ en $\tilde{L}$ es vecindad de cero equilibrada y $\overline{U + U} \subset \bar{V}$.

P.d que es absorbente.

Sea $\tilde{x} \in \tilde{L}$, $\exists\ \mathcal{F}$ filtro de Cauchy en L convergente a $\tilde{x}$ y $F \in \mathcal{F}$ t.q $F - F \subset V$.

Sea $X_o \in F$ arbitrario, puesto que U es absorbente $\exists\ \lambda \subset K$ t.q $X_o \in \lambda U$ y como U es absorbente podemos asumir que $|\lambda| \geq 1$.

Además $F - X_o \subset U \Longrightarrow F \subset X_o + U$ y $\tilde{x} \in F \subset \lambda\ (\overline{U + U})$, es decir $\lambda\ \tilde{x} \in \overline{U + U}\ \forall\ \tilde{x} \in \tilde{L}$.

La unicidad sale del hecho de que $(\tilde{L}, \tilde{\mathcal{T}})$ como e.v. es único.

APENDICE.

Se puede caracterizar un espacio uniforme usando seudométricas o cubrimientos.

1) Vía seudométricas.

Dado X conjunto no vacío

$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una seudométrica sobre X si

1. $\rho(x, X) = 0 \quad \forall\, x \in X$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, X) \quad \forall\, x, y \in X$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X$

Una familia $(\rho_i)_{i \in I}$ de seudométricas sobre X está asociada a una uniformidad sobre X si la familia

$$S = \{H(i, e) \,/\, i \in I, \varepsilon > 0\}$$

donde $H(i, e) = \{(x, y) \,/\, \rho_i (x, y) < \varepsilon\}$ es una subbase de U.

Resultado:

Dada una familia de seudométricas $(\rho_i)_{i \in I}$ sobre X, existe una uniformidad U sobre X a la cual está asociada esta familia.

Se puede definir espacio uniforme usando sólo el concepto de seudométrica de la forma siguiente:

Una estructura uniforme sobre X es una familia D de seudométricas sobre X que verifica.

1) Si $\rho_1, \rho_2 \in D$ entonces max $\{\rho_1, \rho_2\} \in D$

2) Si γ es una seudométrica en X y dado $\varepsilon > 0$, existe $\rho \in D$ y $\delta > 0$ tal que

$$\rho(x, y) \leq \delta \implies \gamma(x, y) \leq \varepsilon$$

entonces

$$\gamma \in D$$

2) Vía cubrimientos.

Sea X un conjunto no vacío, la familia $C = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de X es un cubrimiento de X si $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = X$.

Dados $C_1 = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $C_2 = \{B_\beta\}_{\beta \in I}$ dos cubrimientos de X, C_2 refina C_1 (ó C_2 es un refinamiento de C_1) si $\forall B_\beta$, $\exists A_\alpha$ t.q $B_\alpha \subseteq A_\alpha$

Por ejemplo todo subcubrimiento refina el cubrimiento.

Un cubrimiento B de X es un refinamiento baricéntrico de C si

$\{St(x, B) / x \in X\}$ donde

$$St(y, B) = \bigcup \{B_\beta / y \in B_\beta\}$$

es un refinamiento de C.

Definición.

Una familia $G = \{C_\alpha / \alpha \in I\}$ de cubrimientos de X es una familia uniformizante si

1) Cada par de cubrimientos C_α, C_β en G tiene un refinamiento común C_δ en G.

2) Cada cubrimiento C_α en G posee un refinamiento baricéntrico C_β en G.

Resultado.

Sea $G = \{C_\alpha / \alpha \in I\}$ una familia uniformizante en X, para cada $\alpha \in I$ se define

$$V_\alpha = \bigcup \{U \times U / U \in C_\alpha\}$$

entonces,

u (G) = $\{V_\alpha / \alpha \in I$ es una uniformidad en X. (X, u (G)) es un esp. uniforme.

Recíprocamente dado U una uniformidad en X, para $V \in U$ se define el cubrimiento de X

$$C(V) = \{\text{vecindades de } x / x \in X\}$$

entonces la familia

$$c(U) = \{C(V) / V \in U\}$$

es una familia uniformizante de X.

BIBLIOGRAFIA.

Bourbaki, N. General Topology. Addison-Wesley. 1966.

Dugundji, J. Topology. Allyn and Bacon. 1966.

Gillman-Jerison. Rings of continuous functions. Springen Verlag.

Kelley, J. Tpología General. Eudeba. 1962.

Schaeffer, H. Topological Vector Spaces. Springer Verlag. 1980.