DOI: 10.22199/S07160917.1985.0010.00010

REVISTA PROYECCIONES N° 10:147-151
Diciembre 1985 - ISSN 0716-0917
Jornada Matemáticas, Agosto 1985.

MEDIDAS FUZZY

HERIBERTO ROMAN*
ARTURO FLORES*

ABSTRACT.

A partir de 1978, con los trabajos de Zadeh, se empieza a desarrollar la llamada "Teoría Fuzzy".

En realidad, Zadeh crea una nueva concepción de la idea de "pertenencia a un conjunto", a partir de la cual se desarrolla toda una teoría de conjuntos y, por ende, toda una nueva matemática.

El camino recorrido desde entonces ha sido mucho y lo que nosotros deseamos en las próximas líneas es exponer en pequeño tópico dentro de esta teoría y es lo referente a medidas e integrales Fuzzy.

Es en esta década en donde matemáticos tales como Sugeno (Japón) y y Ralescu (USA), aportan toda su creatividad para consolidar básicamente la teoría de integración Fuzzy.

---

* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Tarapacá, Arica.

MEDIDAS FUZZY.

<u>Definición:</u> Sea X un conjunto y $\mathcal{G}$ una σ- álgebra de subconjuntos de X. Diremos que la aplicación μ: $\mathcal{G} \to [0,\infty]$ es una medida Fuzzy se verifica.

P_1) $\mu(\emptyset) = 0$

P_2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

P_3) Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ es una sucesión creciente en $\mathcal{G}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} An\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(An)$$

P_4) Si $A_1 \quad A_2 \quad \ldots$ es una sucesión decreciente en $\mathcal{G}$ y $\mu(A_1) < \infty$,

entonces $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} An\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

Al triple $(X,\mathcal{G},\mu)$ se le dice un Espacio de medida Fuzzy.

Algunos ejemplos:

1. En $\mathbb{R}$ la medida usual de Lebesgue es una medida Fuzzy.
2. Si $X = \{0, 1, 2,\ldots\}$ y $\mathcal{G} = P(X)$ entonces la aplicación

$$\mu(E) = \begin{cases} \sum_{i \in E} \frac{1}{2^{i+1}} & \text{Si } 0 \in E \\ \infty & \text{Si } 0 \in E \text{ y } E - \{0\} \neq \emptyset \\ 1 & \text{Si } E = \{0\}. \end{cases}$$ es una medida Fuzzy.

<u>**Nota:**</u> Observemos que una medida Fuzzy no necesita ser subaditiva ya que, en el ejemplo 2, vemos que:

Si $E_1 = \{1, 2,\ldots\}$ entonces $\mu(E_1) = \frac{1}{2}$

Si $E_2 = \{0\}$ entonces $\mu(E_2) = 1$

Así $\mu(E_1) + \mu(E_2) = \frac{3}{2}$ mientras que $\mu(E_1 \cup E_2) = \infty$.

LA INTEGRAL FUZZY.

En lo que sigue f será una función medible no-negativa definida sobre .

Sugeno en su tesis doctoral (Tokyo) propone la siguiente definición para una integral Fuzzy.

<u>Definición</u>: Sea $A \in \mathcal{G}$, entonces la integral Fuzzy de f sobre A se define por:

$$\int_A f du = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [\operatorname{Inf} \{\alpha, \mu(\{A \cap \{f \geq \alpha\}\}$$

$$= \bigvee_{\alpha \geqslant 0} [\alpha \wedge \mu(A \cap \{f \geqslant \alpha\})]$$

en donde $\{f \geqslant \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$

Posteriormente Ralescu (1980) propone:

$$\int_A f du = \bigvee_{s \leq f} Q_A(s)$$

En donde S es una función simple menor o igual que f y si $S = \Sigma a_i \chi_{A_i}$ entonces $Q_A(s) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} [a_i \wedge \mu(A \quad A_i)]$

Más aún, Ralescu y Adams (1981) proponen:

$$\int_A f\,du = \sup_{A' \in \mathcal{G} \cap A} \left[\mu(A') \wedge \inf_{x \in A'} f(x) \right]$$

Lo sorprendente de todo esto es que:

<u>Teorema</u>: Las definiciones de Sugeno, Ralescu y Ralescu-A para la integral Fuzzy son equivalentes.

<u>Definición</u>: (Función de nivel).

A la función $F_\mu(\alpha) = \mu(\{ f \geq \alpha\})$ le llamamos función de nivel correspondiente a f.

Es fácil ver que $F_\mu(\alpha)$ es monótona decreciente cualquiera sea f, y que es valor de la integral Fuzzy $\int f du$ será justamente la abscisa del punto de intersección entre las gráficas de f y .

<u>Ejemplo</u>: $\int_{[0,1]} x^2 du = \frac{1}{2}$, en donde μ es la medida de Lebesgue.

<u>OBS</u>: Notemos que la integral Usual (en el sentido de Lebesgue) $\int_{[0,1]} x^2 du = \frac{1}{3}$ lo que significa una diferencia de $\frac{1}{6}$ de una con respecto a la otra. Este hecho Sugeno lo ataca a Fondo y el demuestra que esta diferencia, en valor absoluto, es a lo sumo $\frac{1}{4}$.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL FUZZY.

F1) $\int_A f du = f \int_A du$

F2) Si a es constante, $a \in [0,\infty]$, entonces $\int_A a du = a \wedge \mu(A)$.

F3) i) $f \leqslant g$ sobre $A \Longrightarrow \int_A f du \leqslant \int_A g du$

ii) $A \subset B \Longrightarrow \int_A f du \leqslant \int_B f du$

F4) i) $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \int_A f du = 0$

ii) $\int_A f du = 0 \Longrightarrow \mu(\{f > 0\} \cap A) = 0$

F5) Si a constante no negativa

$$\int_A (f + a) du \leqslant \int_A f du + a \wedge \mu(A) = \int_A f du + \int_A a du$$

F6) $|f - g| \leqslant a$ sobre $A \Longrightarrow \left| \int_A f du - \int_A g du \right| \leqslant a$

Un estudio interesante es ahora obtener resultados análogos a los existentes en la teoría clásica de la medida, en lo que se refiere a la **Convergencia de Integrales Fuzzy** con respecto a la convergencia de sucesiones de funciones, es decir, ¿Bajo qué condiciones $\int f_n du \rightarrow \int f du$ si $f_n \rightarrow f$ sobre A?.