REVISTA PROYECCIONES N° 9: 69-73
Julio 1985 - I.S.S.N. 0716-0917

UNA FUNCION CON DERIVADA NO ACOTADA EN TORNO A UN PUNTO CRÍTICO*

VICTOR DELGADO ANDRADE **

RESUMEN.

B. Peterson [1] define, usando potencias de exponentes racionales, una función $k(x)$ con las siguientes características:

1. $k'(0) = 0$; $k'(x) > 0$ para $x \neq 0$; k' discontinua en $x = 0$
2. k' es acotada en cada intervalo $(0,d)$ con d positivo.

Creemos que estas propiedades pueden ser útiles en estudios sobre optimización, en especial en lo que se refiere al hecho de que el rango de la derivada k no contiene al origen en su interior. En teoría del control, por ejemplo, es de extrema importancia conocer si la región de llegada de

* Conferencia, III Jornada de Matemáticas, Universidad del Norte, 1984.

** Profesor del Instituto de Matemáticas, Universidad Austral de Chile.

los controles admisibles contiene o no al origen en su interior. Ello nos indujo a generalizar el resultado anterior y se logró construir, usando solo polinomios, una función $k(x)$ tal que:

1'. $k'(0) = 0$; $k'(x) > 0$ para $x \neq 0$; k' discontinua en $x = 0$

2'. k' no es acotada en $(0,d)$ para cada d positivo.

3.' mediante un cambio de grado en los polinomios se obtiene la propiedad 2, del ejemplo de Peterson.

Comenzaremos por denotar para cada número natural n :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+2}} \right) = \frac{3}{2^{2n+3}} = a_n$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+2}} \right) = \frac{5}{2^{2n+3}} = b_n$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} + a_n = A_n$$

$$\frac{1}{2^n} - a_n = B_n$$

$$f_n(x) = - \left(\frac{1}{a_n} \right)^n \left(-x + A_n \right)^{n+2} + b_n$$

$$g_n(x) = \left(\frac{1}{a_n} \right)^n \left(x - B_n \right)^{n+1} + b_n$$

Entonces es fácil verificar que:

$$A_n < B_n$$

f_n es creciente y cóncava en el intervalo $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, A_n \right]$

g_n es creciente y convexa en el intervalo $\left[B_n, \frac{1}{2^n} \right]$

$$f_n \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2^{2n+2}} \qquad f'_n \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) = n + 2$$

$$f_n(A_n) = b_n = g_n(B_n) \qquad f'_n(A_n) = 0 = g'_n(B_n)$$

$$g_n \left(\frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2^{2n}} \qquad g'_n \left(\frac{1}{2^n} \right) = n + 1$$

(ver figura 1.a).

Ahora, para $x \geq 0$, definamos:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f_n(x) & \text{si } \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq A_n \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n & \text{si } A_n < x < B_n \quad n = 1, 2, \dots \\ g_n(x) & \text{si } B_n \leq x \leq \frac{1}{2^n} \quad n = 1, 2, \dots \\ 2x - \frac{3}{4} & \text{si } \frac{1}{2} < x \end{cases}$$

Es decir, la gráfica de $h(x)$ coincide con la parábola $y = x^2$ en los extremos del intervalo $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$ y tiene pendiente:

$$n + 2 \text{ en el punto } x = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$0 \text{ en el intervalo } [A_n, B_n]$$

$$n + 1 \text{ en el punto } x = \frac{1}{2^n}$$

FIG. 1. a)

FIG. 1 b) $k'(x)$ ($k'(0) = 0$)

Además, como $\frac{1}{2^{2n}} < \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{3/2}$ para $n > 3$ resulta que $h(x) < x^{3/2}$ para x en el intervalo $[0, 1/8]$, de donde $h'(0+) = 0$

Luego, si para $x < 0$ se define $h(x) = -h(-x)$ se obtiene que $h'(0) = 0$.

Finalmente

$$k(x) = \begin{cases} -x^2 + h(x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 + h(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es una función que verifica las propiedades 1', 2', 3' deseadas. (ver figura 1.b).

En particular, si se considera:

$$f_n(x) = -\frac{1}{a_n} (-x + A_n)^2 + b_n$$

$$g_n(x) = \frac{1}{a_n} (x - B_n)^2 + b_n$$

entonces la función $k(x)$ que se origina tiene derivada acotada en cada intervalo $(0, d)$.

REFERENCIA.

1. PETERSON, B.: A function with a discontinuous derivative, The American Math Monthly Vol. 89 N° 4, 1982.