

REVISTA PROYECCIONES N° 9: 11-58
Julio 1985 - I.S.S.N. 0716-0917

ESTIMADORES DE ERROR Y OPTIMIZACIÓN DE
MALLAS EN EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

GABRIEL GATICA PEREZ*

RESUMEN.

Se considera el problema de contorno vinculado al operador lineal autoadjunto de segundo orden, y se deducen detalladamente los estimadores de error asociados a la solución de elementos finitos. Esto permite, mediante técnicas clásicas de interpolación, el diseño de nuevos algoritmos de optimización de mallas, los que en base a un análisis local sitúan casi-óptimamente un número fijo de nodos en un dominio unidimensional.

* DEPARTAMENTO DE MATEMATICA, UNIVERSIDAD DE CONCEPCION.

1. INTRODUCCION.

El método de elementos finitos es hoy día una de las principales técnicas numéricas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Una de las decisiones más importantes en la implementación del método es la selección de la malla o refinamiento asociado al dominio. En la práctica se usan varios generadores de malla; sin embargo, una elección propia de la discretización que dependa del problema a ser resuelto, sería lo más conveniente para el objetivo del cálculo. Una subdivisión efectiva del dominio no puede construirse sin algún proceso "feedback", ya sea de una forma interactiva, o a través de un procedimiento automático que utilice la máxima información disponible en cada etapa.

En los últimos años ha crecido notablemente el interés por el desarrollo de nuevas técnicas para el refinamiento adaptable de mallas de elementos finitos (ver ref. [1], [2], [3], etc.). Puesto que la calidad de la solución de elementos finitos puede mejorarse por medio de una localización óptima de los nodos, aquí se presentan nuevos métodos unidimensionales de optimización de malla, los que utilizan métodos clásicos de interpolación en conjunto con los resultados de BABUSKA Y RHEINBOLDT [4], [5], [10]. El concepto feedback que se usará es aquel dado en [6]: un método feedback se caracteriza por el hecho que produce una sucesión de soluciones de elementos finitos, en que cada una depende de la información proporcionada por las precedentes; en otras palabras, un método de elementos finitos feedback consiste de refinamientos consecutivos de la malla, dependiendo de los resultados calculados previamente. Así, el rasgo más característico de un proceso feedback es el uso y acumulación de información obtenida durante su desarrollo, para eliminar la incertidumbre debida a insuficiente conocimiento a priori.

El trabajo se restringe a un problema modelo unidimensional que involucra un operador lineal autoadjunto de segundo orden. Los elementos a considerar son polinomios por pedazo de grado arbitrario.

El artículo se presenta como sigue: en sección 2 consideramos el problema unidimensional, su solución de elementos finitos y deducimos en forma detallada (De [4], [6], y [7]) los estimadores de error sobre los cuales se basan los métodos feedback. En sección 3 se revisan los operadores de transición definidos en [2], [3] y [6], y se da un resultado de convergencia. Utilizamos en sección 4 los indicadores de error de sección 2 para desarrollar algoritmos alternativos de disposición óptima de los nodos. Finalmente, en sección 5 mostramos algunos resultados Numéricos.

2. EL PROBLEMA MODELO UNIDIMENSIONAL.

Aunque los resultados que se mostrarán pueden extenderse a una variedad más amplia de problemas en una dimensión, por claridad, este artículo se restringe al problema de valor de contorno siguiente:

$$(2.1) \quad L[u] = - \frac{d}{dt} [a(t) \frac{du}{dt}] + b(t) u(t) = f(t); t \in [0,1]$$

$$(2.2) \quad u(0) = u(1) = 0.$$

donde:

$$(2.3) \quad a \in C^1[0,1]; b, f \in C[0,1]; a(t) \geq A > 0 \text{ y } b(t) \geq 0 \forall t \in [0,1].$$

Si $\overset{\circ}{H}^1[0,1]$ denota el espacio $\{u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} / u, u' \in L_2[0,1]; u(0) = u(1) = 0\}$, entonces

la solución de (2.1) - (2.2) se entiende en la forma débil usual; es decir, se busca $u \in \overset{\circ}{H}^1[0,1]$ tal que:

$$(2.4) \quad B(u, v) = \int_0^1 f(t) v(t) dt; \forall v \in \overset{\circ}{H}^1[0,1]$$

donde B es la forma bilineal:

$$(2.5) \quad B(u, v) = \int_0^1 [a(t)u'(t)v'(t) + b(t)u(t)v(t)] dt$$

Sea $\| \cdot \|_E$ la norma de la energía inducida por el producto escalar B; esto es:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \| \cdot \|_E &: H^1[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ u &\rightarrow \| \cdot \|_E = [B(u, u)]^{1/2} \end{aligned}$$

Ahora, la solución de elementos finitos se introduce de manera usual. Se supone que al cabo de la n-ésima etapa, $M(n)$ es la malla asociada al dominio $[0,1]$. Sean:

$$(2.7) \quad T(n) = \text{número de elementos de } M(n)$$

$$(2.8) \quad \tau_{n,j} = \text{j-ésimo elemento de } M(n)$$

$$(2.9) \quad h_{n,j} = \text{diámetro de } \tau_{n,j}.$$

Si la triangulación $M(n)$ está determinada por la siguiente partición:

$$(2.10) \quad 0 = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{T(n)}^n = 1$$

entonces se escribe:

$$(2.11) \quad \tau_{n,j} = [x_{j-1}^n, x_j^n] ; j = 1, T(n)$$

$$(2.12) \quad h_{n,j} = x_j^n - x_{j-1}^n ; j = 1, T(n)$$

y se define:

$$(2.13) \quad h^n = \max_j h_{n,j}.$$

También, es importante ver que la malla $M(n)$ puede identificarse por el conjunto de puntos x_j^n , que se llaman nodos, o bien, por el conjunto de elementos $\tau_{n,j}$. Así, escribiremos $M(n) = \{x_j^n\}_{j=1, T(n)}$ y $x_j^n \in M(n)$, o bien $M(n) = \{\tau_{n,j}\}_{j=1, T(n)}$ y $\tau_{n,j} \in M(n)$, dependiendo del contexto.

Para $p \in \mathbb{N}$, $S^P(n)$ denota el subespacio lineal de $H^1[0,1]$ que consiste de funciones que son polinomios por pedazo de grado $\leq p$ sobre cada $\tau_{n,j} \in M(n)$.

Sea $P(n)$ la proyección elíptica de $H^1[0,1]$ sobre $S^P(n)$, esto es:

$$(2.14) \quad \begin{cases} P(n) : H^1[0,1] \rightarrow S^P(n) \\ \quad \quad \quad v \rightarrow P(n)v \\ \\ \|v - P(n)v\|_E = \text{Min}_{w \in S^P(n)} \|v - w\|_E. \end{cases}$$

Es bien conocido el resultado de caracterización para $P(n)v$ dado por:

$$(2.15) \quad B(v - P(n)v, w) = 0 \quad ; \quad \forall w \in S^P(n)$$

o bien:

$$(2.16) \quad B(P(n)v, w) = B(v, w) \quad ; \quad \forall w \in S^P(n).$$

Definición 2.1. Sea u la solución de (2.1)-(2.2). Entonces:

$$(2.17) \quad u(n) = P(n)u \in S^P(n)$$

se llama la solución de elementos finitos para el problema de valor de contorno. Además, la expresión:

$$(2.18) \quad e(n) = u - u(n)$$

es el error de la solución de elementos finitos.

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.

Sean $R(n)$ y $R([0,1] - I)$ las proyecciones elípticas de $H^{\circ 1}[0,1]$ sobre los espacios:

$$A(n) = \{v \in H^{\circ 1}[0,1] : v(x_j^n) = 0 ; j = \overline{0, T(n)}\}$$

y:

$$C(I) = \{v \in H^{\circ 1}[0,1] : v(x) = 0, \forall x \in [0,1] - I\}$$

respectivamente, con $I \subseteq [0,1]$. Entonces:

$$(2.19) \quad R(n)v = \sum_{j=1}^{T(n)} R([0,1] - \tau_{n,j})v ; \forall v \in H^{\circ 1}[0,1].$$

Demostración:

Sea $v \in H^{\circ 1}[0,1]$ y notemos $R_{n,j}v = R([0,1] - \tau_{n,j})v$. De acuerdo a la caracterización de una proyección puede escribirse:

$$(2.20) \quad \begin{cases} R(n)v \in A(n) \\ B(R(n)v, w) = B(v, w) ; \forall w \in A(n). \end{cases}$$

y además

$$(2.21) \quad \begin{cases} R_{n,j} v \in C(\tau_{n,j}) \\ B(R_{n,j} v, w) = B(v, w) ; \forall w \in C(\tau_{n,j}). \end{cases}$$

Se tiene:

$$\left(\sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v \right) (x_i^n) = \sum_{j=1}^{T(n)} (R_{n,j} v) (x_i^n) = (R_{n,i} v) (x_i^n) = 0.$$

$$\text{Esto prueba que } \sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v \in A(n).$$

Ahora, para $w \in A(n)$ obtenemos:

$$(2.22) \quad B\left(\sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v, w\right) = \sum_{j=1}^{T(n)} B(R_{n,j} v, w)$$

como $R_{n,j} v \in C(\tau_{n,j})$ resulta:

$$(R_{n,j} v) (x) = 0 ; \forall x \in [0,1] - \tau_{n,j}.$$

Así $B(R_{n,j} v, w) = B(R_{n,j} v, w_j)$, donde:

$$w_j = \begin{cases} w ; \text{ en } \tau_{n,j} \\ 0 ; \text{ en } [0,1] - \tau_{n,j} \end{cases}$$

Luego, volviendo a (2.22):

$$(2.23) \quad B\left(\sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v, w\right) = \sum_{j=1}^{T(n)} B(R_{n,j} v, w_j)$$

Como $w_j \in C(\tau_{n,j})$ se obtiene por (2.21):

$$(2.24) \quad B(R_{n,j} v, w_j) = B(v, w_j)$$

Reemplazando (2.24) en (2.23) nos queda:

$$B\left(\sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v, w\right) = \sum_{j=1}^{T(n)} B(v, w_j) = B\left(v, \sum_{j=1}^{T(n)} w_j\right) = B(v, w)$$

Por lo tanto:

$$(2.25) \quad B\left(\sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v, w\right) = B(v, w) ; \forall w \in A(n).$$

Comparando (2.20) con (2.25), y recordando la unicidad de $R(n)v$ se concluye:

$$(2.26) \quad R(n)v = \sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v ; \forall v \in \overset{\circ}{H}^1[0,1]$$

Como corolario a la proposición anterior puede demostrarse el siguiente resultado:

Proposición 2.2.

Bajo las definiciones anteriores resulta:

$$(2.27) \quad \left\| R(n)v \right\|_E^2 = \sum_{j=1}^{T(n)} \left\| R_{n,j} v \right\|_E^2 ; \forall v \in \overset{\circ}{H}^1[0,1].$$

Demostración:

De proposición 2.1 podemos escribir:

$$\begin{aligned} \| R(n) v \|_E^2 &= B(R(n)v, R(n)v) \\ &= B\left(\sum_{j=1}^{T(n)} R_{n,j} v, \sum_{i=1}^{T(n)} R_{n,i} v\right) \\ &= \sum_{i=1}^{T(n)} \sum_{j=1}^{T(n)} B(R_{n,j} v, R_{n,i} v) \end{aligned}$$

Puesto que la intersección del interior de los soportes de $R_{n,j} v$ y $R_{n,i} v$ es vacía, a menos que i sea igual con j , nos queda:

$$\| R(n)v \|_E^2 = \sum_{j=1}^{T(n)} B(R_{n,j} v, R_{n,j} v) = \sum_{j=1}^{T(n)} \| R_{n,j} v \|_E^2.$$

Los dos resultados anteriores inducen la siguiente definición asociada al error $e(n)$ de la solución de elementos finitos:

Definición 2.2. Se definen el indicador de error $\eta_{n,j}$ asociado al intervalo $\tau_{n,j}$, y el estimador de error global $e(n)$, como sigue:

$$(2.28) \quad \eta_{n,j} = \| R_{n,j} e(n) \|_E$$

$$(2.29) \quad e(n) = \| R(n) e(n) \|_E.$$

Debido a (2.27) se concluye claramente:

$$(2.30) \quad \varepsilon^2(n) = \sum_{j=1}^{T(n)} \eta_{n,j}^2$$

Por otro lado, respecto al indicador de error $\eta_{n,j}$, puede darse el siguiente resultado de caracterización:

Proposición 2.3.

La función $w_j(n) = R_{n,j} e(n)$ que permite definir el indicador de error $\eta_{n,j}$ en (2.28), está caracterizada por el siguiente problema local:

$$(2.31) \quad \begin{cases} L[w_j(n)] = f - L[u(n)] & ; \text{ en } \tau_{n,j} \\ w_j(n) = 0, & \text{ en } [0,1] - \tau_{n,j}. \end{cases}$$

Demostración: Sea $v \in H^1[0,1]$ tal que $v = 0$ en $[0,1] - \tau_{n,j}$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} B(w_j(n), v) &= B(R_{n,j} e(n), v) \\ &= B(e(n), v) \quad (\text{Por def. de } R_{n,j}) \\ &= B(u, v) - B(u(n), v) \\ &= \langle f, v \rangle_{L_2} - \langle L[u(n)], v \rangle_{L_2} \\ &= \langle f - L[u(n)], v \rangle_{L_2} \end{aligned}$$

Es decir:

$$B(w_j(n), v) = \langle f - L[u(n)], v \rangle_{L_2} ; \forall v \in C(\tau_{n,j}).$$

Esto completa la demostración.

De este modo, puede escribirse:

$$(2.32) \quad \eta_{n,j}^2 = \|w_j(n)\|_E^2 = \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} [a(t)[w_j(n)'(t)]^2 + b(t)[w_j(n)(t)]^2 dt$$

donde $w_j(n)$ es la solución débil de (2.31).

Por otro lado, un importante resultado probado en [4] es el siguiente:

Proposición 2.4.

Sea $v \in H^1[0,1]$ y definamos

$$S_v^P(n) = \{w \in S^P(n) / w(x_j^n) = v(x_j^n) ; j = 1, T(n)\}$$

entonces, existe cte. $C^P(n)$ tal que:

$$(2.33) \quad \inf_{w \in S_v^P(n)} \|v - w\|_E \leq C^P(n) \|v\|_E$$

Además, existe cte $\bar{C}^P \geq 1$, independiente de n tal que:

$$(2.34) \quad C^P(n) \leq \bar{C}^P (1 + o(h^n)) ; \text{ cuando } h^n \rightarrow 0.$$

Demostración: (Ref. [4]: Lema 1).

La proposición anterior nos permite demostrar el siguiente resultado, el cual da la razón precisa de por qué se llama estimador de error global a la expresión $\varepsilon(n)$.

Proposición 2.5.

Sean $e(n)$ y $\varepsilon(n)$ definidos en (2.18) y (2.29) respectivamente.

Entonces:

$$(2.35) \quad \|e(n)\|_{E^P} \leq C^P(n) \varepsilon(n), \text{ donde } C^P(n) \text{ es la cte. de Proposición 2.4.}$$

Demostración:

Consideremos nuevamente $R(n)$, la proyección elíptica de $\overset{\circ}{H}^1[0,1]$ sobre el espacio:

$$A(n) = \{w \in \overset{\circ}{H}^1[0,1] / w(x_j^1) = 0 ; \forall j = 0, T(n)\}$$

Entonces:

$$(2.36) \quad B(R(n)e(n), w) = B(e(n), w) ; \forall w \in A(n).$$

En particular para $w = R(n)e(n) \in A(n)$, se tiene:

$$B(R(n)e(n), R(n)e(n)) = B(e(n), R(n)e(n))$$

Deuda:

$$\begin{aligned} \|R(n)e(n)\|_E^2 &= B(R(n)e(n), R(n)e(n)) = B(e(n), R(n)e(n)) \\ &\leq \|e(n)\|_E \|R(n)e(n)\|_E \quad (\text{Por Desigualdad de Schwarz}) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\varepsilon(n) = \|R(n)e(n)\|_E \leq \|e(n)\|_E, \text{ lo cual prueba el lado izquierdo de (2.35)}$$

Ahora, sea $v \in S_{e(n)}^P(n)$; es decir, $v \in S^P(n)$ y $v(x_j^n) = e(n)(x_j^n)$; $\forall j \in \overline{0, T(n)}$.

Entonces $w = (e(n) - v) \in A(n)$ y además

$$B(e(n), v) = B(u, v) - B(u(n), v) = 0$$

Luego:

$$\begin{aligned} \|e(n)\|_E^2 &= |B(e(n), e(n))| = |B(e(n), e(n) - v)| \\ &= |B(e(n), w)| = |B(R(n)e(n), w)| \quad (\text{Por (2.36)}) \end{aligned}$$

Así:

$$(2.37) \quad \|e(n)\|_E^2 \leq \|R(n)e(n)\|_E \|e(n) - v\|_E; \quad \forall v \in S_{e(n)}^P(n).$$

Aplicando proposición 2.4 (relación 2.33) se concluye:

$$(2.38) \quad \inf_{v \in S_{e(n)}^P(n)} \|e(n) - v\|_E \leq C^P(n) \|e(n)\|_E$$

Finalmente, reemplazando (2.38) en (2.37), queda:

$$\| e(n) \|_E^2 \leq \| R(n) e(n) \|_E C^P(n) \| e(n) \|_E$$

de donde:

$$\| e(n) \|_E \leq C^P(n) \| R(n) e(n) \|_E$$

esto es:

$$\| e(n) \|_E \leq C^P(n) \varepsilon(n).$$

La cuestión es ahora como calcular $\varepsilon(n) = \left[\sum_{j=1}^T \eta_{n,j}^2 \right]^{1/2}$.

Sin embargo, es difícil obtener exactamente el valor de $\eta_{n,j} = \| w_j(n) \|_E$, ya que ello implicaría hallar la solución analítica de (2.31). Por lo tanto, nuestro siguiente objetivo es encontrar cotas calculables para el indicador de error local $\eta_{n,j}$. Al respecto, se dispone del siguiente resultado en [4] y también en [7]:

Proposición 2.6.

Sea $a_j^n = a \left(\frac{1}{2} (x_{j-1}^n + x_j^n) \right)$. Entonces

$$(2.39) \quad \eta_{n,j}^2 = \| w_j(n) \|_E^2 \leq (1 + O(h_{n,j})) \hat{\eta}_{n,j}^2; \text{ cuando } h_{n,j} \rightarrow 0$$

donde:

$$\hat{\eta}_{n,j}^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{h_{n,j}^2 \rho_{n,j}^2}{a_j^n}$$

$$\rho_{n,j}^2 = \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} r_n^2(t) dt, \text{ y}$$

$$r_n(t) = f(t) - L[u](t).$$

Demostración:

El problema (2.31) puede escribirse

$$(2.40) \quad \begin{cases} L[w_j(n)](t) = r_n(t) & ; \quad \forall t \in [x_{j-1}^n, x_j^n]. \\ w_j(n)(x_{j-1}^n) = w_j(n)(x_j^n) = 0 \end{cases}$$

Consideremos además el problema de valores propios:

$$(2.41) \quad \begin{cases} L v = \lambda v \\ v(x_{j-1}^n) = v(x_j^n) = 0. \end{cases}$$

y sean $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ la sucesión asociada de vp y $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$, el correspondiente conjunto ortonormal de $\vec{v}p$.

Entonces, cualquier función $v \in H^1[x_{j-1}^n, x_j^n]$ que satisfaga las condiciones de contorno, puede escribirse como:

$$v = \sum_j \alpha_j \phi_j ; \text{ con } \alpha_j = \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} v \phi_j dt.$$

$$\text{Luego, si } a_j = \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} w_j(n)(t) \phi_j(t) dt, \text{ obtenemos } w_j(n) = \sum_j a_j \phi_j.$$

Además, es fácil probar que:

$$\|w_j(n)\|_{L_2[x_{j-1}^n, x_j^n]}^2 = \sum_j a_j^2$$

y:

$$\|r_n\|_{L_2[x_{j-1}^n, x_j^n]}^2 = \|L w_j(n)\|_{L_2}^2 = \sum_j a_j^2 \lambda_j^2$$

Puesto que $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \geq 1 ; \forall j \in \mathbb{N}$, se obtiene:

$$\|w_j(n)\|_{L_2}^2 = \sum_j a_j^2 < \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_j a_j^2 \lambda_j^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \|r_n\|_{L_2[x_{j-1}^n, x_j^n]}^2$$

es decir:

$$(2.42) \quad \|w_j(n)\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \|r_n\|_{L_2}^2$$

Por lo tanto, aplicando desigualdad de Schwarz se concluye:

$$\begin{aligned} \|w_j(n)\|_E^2 &= B(w_j(n), w_j(n)) = \langle L w_j(n), w_j(n) \rangle_{L_2} \\ &= \langle r_n(t), w_j(n) \rangle_{L_2} \leq \|r_n\|_{L_2} \|w_j(n)\|_{L_2} \end{aligned}$$

Esto es:

$$(2.43) \quad \|w_j(n)\|_E^2 \leq \|r_n\|_{L_2} \|w_j(n)\|_{L_2}$$

Reemplazando (2.42) en (2.43) se obtiene:

$$\|w_j(n)\|_E^2 < \frac{1}{\lambda_1} \|r_n\|_{L_2}^2$$

Es decir:

$$(2.44) \quad \tau_{n,j}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} r_n^2(t) dt$$

Por otro lado:

$$\sup_{v \in \overset{\circ}{H}^1[x_{j-1}^n, x_j^n]} \frac{\|v\|_{L_2}^2}{\|v\|_E^2} = \sup_j \frac{\sum_j \alpha_j^2}{\sum_j \lambda_j \alpha_j^2} = \frac{1}{\lambda_1} \sup_j \frac{\sum_j \alpha_j^2}{\sum_j \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1}}$$

$$v(x_{j-1}^n) = v(x_j^n) = 0$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} \text{ (donde el máximo ocurre para } v = \phi_1)$$

Pero también:

$$\|v\|_E^2 \geq a_{\min}^j \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} [v'(t)]^2 dt, \text{ donde:}$$

$$a_{\min}^j = \text{Min}_{t \in [x_{j-1}^n, x_j^n]} \|a(t)\|$$

Luego:

$$\frac{1}{1} = \sup \frac{\|v\|_{L_2}^2}{\|v\|_E^2} \leq \sup \frac{\|v\|_{L_2}^2}{a_{\min}^j \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} [v'(t)]^2 dt} = \frac{1}{a_{\min}^j \bar{\lambda}_1}$$

donde, de manera análoga, $\bar{\lambda}_1$ es el vp más pequeño asociado al operador

$$\bar{L} v = v'' \text{ en } [x_{j-1}^n, x_j^n]. \text{ Es decir } \bar{\lambda}_1 = \frac{\pi^2}{h_{n,j}^2}.$$

De este modo, hemos obtenido

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{h_{n,j}^2}{\pi^2 a_{\min}^j}$$

y reemplazando en (2.44) se deduce:

$$(2.45) \quad \eta_{n,j}^2 \leq \frac{h_{n,j}^2}{a_{\min}^j \pi^2} \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} r_n^2(t) dt$$

Finalmente, de la serie de Taylor con resto derivada se obtiene:

$$a_{\min}^j = a\left(\frac{1}{2}(x_{j-1}^n + x_j^n)\right) (1 + O(h_{n,j})); \text{ cuando } h_{n,j} \rightarrow 0, \text{ y en}$$

consecuencia resulta:

$$\eta_{n,j}^2 \leq \frac{h_{n,j}^2}{2 a_j^n} \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} r_n^2(t) dt (1 + O(h_{n,j})).$$

La relación (2.34) y las proposiciones 2.5 y 2.6, nos permiten establecer fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 2.7.

Existe una cte. $C \geq 1$, independiente de a , b , f y $M(n)$, tal que:

$$(2.46) \quad \|e(n)\|_E = \|u - u(n)\|_E \leq C \hat{\varepsilon}(n)$$

donde:

$$(2.47) \quad \hat{\varepsilon}^2(n) = \sum_{j=1}^{T(n)} \hat{\eta}_{n,j}^2$$

Es claro que esta estimación de error $\hat{\varepsilon}(n)$ es fácilmente calculable una vez que se conoce la solución de elementos finitos $u(n)$ sobre $M(n)$. Además, la importancia de $\hat{\varepsilon}(n)$ radica en el hecho que los indicadores locales $\hat{\eta}_{n,j}$ constituyen una medida de la contribución de cada intervalo, al error total. Obviamente, esto permite la construcción de mallas casi óptimas (Ver [5]), y también nos inducirá a diseñar métodos aproximados para situar óptimamente los nodos de $M(n)$. (Ver sección 4).

3. OPERADORES DE TRANSICION Y CONVERGENCIA DE LOS METODOS FEEDBACK.

Una vez que los indicadores de error $\hat{\eta}_{n,j}$ (de proposición 2.6) asociados a cada elemento $\tau_{n,j}$ de $M(n)$ son calculados, queda por resolver el problema: "¿Qué elementos deben refinarse en la siguiente etapa para obtener $M(n+1)$?". Los esquemas o reglas que deciden finalmente qué elementos se subdividen se llaman operadores de Transición.

Más generalmente, suponga que después de la n -ésima etapa de refinamiento se tiene una triangulación $M(n)$ con:

$$(3.1) \quad T(n) = \text{número de elementos de } M(n).$$

$$(3.2) \quad \tau_{n,j} = j\text{-ésimo elemento de } M(n).$$

$$(3.3) \quad M(n) = \{\tau_{n,j}\}_{j=1, T(n)}$$

$$(3.4) \quad h_{n,j} = \text{diámetro de } \tau_{n,j}$$

entonces, un operador de transición es una aplicación A definida por:

$A : (P[0,1])^n \times [S^P(1) \times S^P(2) \times \dots \times S^P(n)] \rightarrow P[0,1]$ donde $P[0,1]$ denota el conjunto de las partes de $[0,1]$, tal que:

$$M(n+1) = A(M(1), M(2), \dots, M(n); u(1), u(2), \dots, u(n))$$

Además, decimos que A es simple si él depende sólo de $M(n)$ y $u(n)$; todos los otros operadores se llaman compuestos.

Una medida del error para la triangulación $M(n)$ está dada por $\tau(n)$, donde

$$(3.5) \quad \tau^2(n) = \sum_{j=1}^{T(n)} \hat{\eta}_{n,j}^2, \quad \text{y } \hat{\eta}_{n,j} \text{ es el indicador de error asociado a } \tau_{n,j} \text{ (Ver sección 2 o referencias [1], [2], [3]).}$$

En lo que sigue, describimos los distintos operadores de transición introducidos en [2], [3] y [6], los cuales usan bisección del elemento como técnica de refinamiento.

3.1. Operador de Transición $A^{(1)}$

Sea B una constante en $[0,1]$. Este operador refina todos aquellos elementos $\tau_{n,p}$ para los cuales

$$(3.6) \quad \hat{\eta}_{n,p} \geq B \max_{j=1, T(n)} \hat{\eta}_{n,j}$$

Si $B = 1$, entonces se subdividen sólo los elementos que tienen el mayor indicador de error. Si $B = 0$ obtenemos una malla uniforme ya que todos los elementos se refinan.

3.2. Operador de Transición $A^{(2)}$

Suponga que los elementos de $M(n)$ se han ordenado de manera que:

$$(3.7) \quad \hat{\eta}_{n,1} \geq \hat{\eta}_{n,2} \geq \dots \geq \hat{\eta}_{n,T(n)}$$

Sea γ una constante en $[0,1]$. El operador $A^{(2)}$ refina los k primeros elementos con indicadores de error más grandes; esto es, $\hat{\eta}_{n,1}$; $\hat{\eta}_{n,2}$; \dots ; $\hat{\eta}_{n,k}$; donde

$$(3.8) \quad k = [\gamma T(n)] + 1$$

y $[]$ indica parte entera.

Esto es equivalente a decir que el segundo operador bisecta aproximadamente la fracción γ de los elementos de $M(n)$ ordenados de acuerdo a (3.7).

3.3. Operador de Transición $A^{(3)}$

Este operador es una combinación de los dos anteriores. Con $B \in [0,1]$ y $\gamma \in [0,1]$, $A^{(3)}$ refina todos los elementos $\tau_{n,p}$ para los cuales:

$$(3.9) \quad \hat{\eta}_{n,p} \geq B \max_{n,j} \hat{\eta}_{n,j}, \text{ y también bisecta al menos la fracción } \gamma$$

de aquellos que tienen los mayores indicadores de error.

3.4. Operador de Transición $A^{(4)}$

Sean $M(n)$ y $M(n+1)$ dos triangulaciones consecutivas.

Definimos:

$$(3.10) \quad A_{n,j} = \{p \in \{1, \dots, T(n+1)\} / \tau_{n+1,p} \subseteq \tau_{n,j}\}$$

Además, para cada $\tau_{n,j} \in M(n)$ ponemos:

$$(3.11) \quad \eta_{n,j}^{\text{new}} = \max_{p \in A_{n,j}} \hat{\eta}_{n+1,p}$$

Ahora, si el elemento $\tau_{n,j}$ de $M(n)$ se origina de la subdivisión de $\tau_{m,k}$, para algún $m \leq n-1$, entonces se escribe:

$$(3.12) \quad \eta_{n,j}^{\text{old}} = \hat{\eta}_{m,k}.$$

Por otro lado, se supone que localmente los valores $\hat{\eta}_{n,j}$ tienen un comportamiento asintótico de la forma:

$$(3.13) \quad \hat{\eta}_{n,j} = C h_{n,j}^{\lambda}, \text{ cuando } h_{n,j} \rightarrow 0; \text{ con } C \text{ y } \lambda$$

constantes.

Así, de acuerdo a esta suposición sobre $\hat{\eta}_{n,j}$, podemos escribir:

$$\eta_{n,j}^{\text{old}} = C (2 h_{n,j})^{\lambda}$$

$$\hat{\eta}_{n,j} = C h_{n,j}^{\lambda}$$

$$\eta_{n,j}^{\text{new}} = C \left(\frac{h_{n,j}}{2} \right)^{\lambda}$$

de donde se deduce:

$$(3.14) \quad \eta_{n,j}^{\text{new}} = \hat{\eta}_{n,j}^2 / \eta_{n,j}^{\text{old}}.$$

Ahora, tomamos $\gamma \in]0,1[$ y para cualquier $\tau_{n,j} \in M(n)$, definimos:

$$(3.15) \quad \hat{\eta}_{n,j}^{\text{new}} = \text{Min} \{ \eta_{n,j}^{\text{new}} ; \gamma \hat{\eta}_{n,j} \},$$

el cual se llama predictor pues to que usa información de $M(n)$ y mallas previas para predecir el efecto de la bisección sobre el valor de los indicadores de error $M(n + 1)$.

De acuerdo a lo anterior, el operador de transición $A^{(4)}$ bisecta todos los elementos $\tau_{n,p} \in M(n)$ que satisfacen:

$$(3.16) \quad \hat{\eta}_{n,p} \geq B \text{ Max}_{j=1, T(n)} \hat{\eta}_{n,j}^{\text{new}} ; \text{ con } B \in [0,1].$$

Podemos ver claramente que $A^{(4)}$ es compuesto. Además, es importante notar que un caso particular de este operador, con $\hat{\eta}_{n,j}^{\text{new}} = \eta_{n,j}^{\text{new}}$ y $B = 1$, fue introducido en [3].

Nota 3.1. Al comienzo del proceso de refinamiento se considera $\eta_{1,j}^{\text{old}} = \hat{\eta}_{1,j}$, lo cual conduce a usar en la primera etapa el operador $A^{(4)}$ con constante $B \gamma$.

3.5. Operador de Transición $A^{(5)}$.

Este operador es una extensión directa del anterior. Cada vez que el crecimiento en el número de elementos es menor que un porcentaje prefijado de $T(n)$, la solución de elementos finitos no se calcula sobre $M(n + 1)$ se construyen directamente de los $\hat{\eta}_{n,j}^{\text{new}}$; es decir, ponemos:

$$\hat{\eta}_{n+1,p} = \hat{\eta}_{n,j}^{\text{new}} ; \forall p \in A_{n,j}.$$

Enseguida, el operador de transición $A^{(4)}$ se usa sobre la malla $M(n+1)$ con estos indicadores de error aproximados. El proceso continúa hasta la etapa $n+k$ donde el crecimiento en el número de elementos desde $M(n)$ a $M(n+k)$ es mayor que el porcentaje prefijado de $T(n)$. En este momento, la solución de elementos finitos se calcula sobre $M(n+k)$ y el proceso se sigue.

Nota 3.2. Los cinco operadores de transición descritos tienen la propiedad de bisectar siempre el elemento con el indicador de error más grande. Debido a esta característica, ellos se llaman 1-regulares. Más, generalmente, puede darse la siguiente definición:

Definición 3.1. Un operador de transición y el correspondiente método de elementos finitos feedback se llama δ -regular, con $\delta \in]0,1[$, si él bisecta al menos un elemento $\tau_{n,p}$ para el cual:

$$(3.17) \quad \hat{\eta}_{n,p} > \delta \max_j \hat{\eta}_{n,j}$$

Nota 3.3. Es interesante hacer notar que una generalización, en cierto sentido, de estos operadores de transición, fue introducida por GATICA en [9].

3.6. Convergencia de los métodos feedback.

Una vez que se construye la sucesión de soluciones aproximadas $\{u(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, interesa saber si ella converge en alguna norma a la solución exacta u del problema modelo descrito en (2.1) - (2.3). Por lo menos hasta aquí se ha logrado probar (Ref. [6]) que el error $e(n) = u - u(n)$ tiende a cero en la norma de la energía, cada vez que se utiliza un método feedback δ -regular. El objeto de esta parte es justamente mostrar ese resultado. Para ello se utilizan dos lemas y una proposición.

Son conocidos del Análisis Funcional los siguientes lemas:

Lema 3.1

Sea H un Hilbert y sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de H tal que $S_i \subset S_{i+1}$, $\forall i$. Si P_i denota la proyección ortogonal sobre S_i y P denota la proyección ortogonal sobre $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, entonces para cada $U \in H$, $P_i u \rightarrow P u$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Lema 3.2.

Sea H un Hilbert y sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de H tal que $S_{i+1} \subset S_i$, $\forall i$. Si P_i y P denotan las proyecciones ortogonales sobre S_i y $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$, respectivamente, entonces para cada $u \in H$, $P_i u \rightarrow P u$, cuando $i \rightarrow \infty$.

Por otro lado, de [8] obtenemos la siguiente proposición

Proposición 3.1.

Bajo los supuestos dados en (2.3), se obtiene:

$$\|v\|_{\infty; \tau_{n,j}} \leq C h_{n,j}^{1/2} \|v\|_E; \forall v \in H^1[x_{j-1}^n, x_j^n]$$

donde:
$$\|v\|_{\infty; \tau_{n,j}} = \max_{x \in \tau_{n,j}} |v(x)|$$

y $C = 1/A^{1/2}$; en que $A > 0$ es la cota inferior de la función $a(t)$ dada en (2.3).

Demostación:

Sea $v \in H^1 [x_{j-1}^n, x_j^n]$. Debido a que $v(x_{j-1}^n) = 0$ se tiene:

$$v(x) = \int_{x_{j-1}^n}^x v'(\xi) d\xi ; \quad \forall x \in \tau_{n,j}$$

La desigualdad de Schwarz nos da:

$$|v(x)|^2 \leq \int_{x_{j-1}^n}^x 1^2 d\xi \int_{x_{j-1}^n}^x |v'(\xi)|^2 d\xi = (x - x_{j-1}^n) \int_{x_{j-1}^n}^x |v'(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq h_{n,j} \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} |v'(\xi)|^2 d\xi ; \quad \forall x \in \tau_{n,j}$$

Así:

$$(3.18) \quad \|v\|_{\infty}^2 ; \tau_{n,j} \leq h_{n,j} \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} |v'(\xi)|^2 d\xi$$

Ahora, de (2.3) se tiene:

$a(x) \geq A > 0$; $b(x) \geq 0$, $\forall x \in \tau_{n,j}$. Luego, de (2.5) y (3.18) se sigue:

$$\|v\|_E^2 = \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} [a(x)[v'(x)]^2 + b(x)[v(x)]^2] dx$$

$$\geq A \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} [v'(x)]^2 dx \geq \frac{A}{h_{n,j}} \|v\|_\infty^2 ; \tau_{n,j}$$

esto es:

$\|v\|_\infty ; \tau_{n,j} \leq \frac{1}{A^{1/2}} h_{n,j}^{1/2} \|v\|_E$, lo que completa la demostración.

Los resultados anteriores permiten demostrar fácilmente la siguiente proposición acerca de la convergencia de un método feedback.

Proposición 3.2.

Sea $\{u(n)\}_n \in \mathbb{N}$ una sucesión de soluciones de elementos finitos calculados con un método feedback δ -regular, $\delta \in]0,1]$. Entonces, bajo el supuesto (2.3) se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e(n)\|_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u(n)\|_E = 0.$$

Demostración:

Es claro que la sucesión de subespacios cerrados $\{S^P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$(3.19) \quad S^P(n) \subseteq S^P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sean $P(n)$, definida en (2.14), la proyección elíptica de $H^1[0,1]$ sobre $S^P(n)$. Del lema 3.1 y del hecho que $u(n) = P(n)u$ se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n)u = P(u)$$

donde P es la proyección elíptica sobre $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S^P(n)}$

Es decir:

$$(3.20) \quad e(n) = u - u(n) = u - P(u) + \xi(n)$$

donde $\xi(n) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$

Al igual que en proposición 2.1, sea $R(n)$ la proyección elíptica de $H^1[0,1]$ sobre el espacio:

$$A(n) = \{v \in H^1[0,1] : v(x_j^n) = 0 ; j = \overline{0, T(n)}\}$$

De (3.20) se tiene:

$$(3.21) \quad R(n) e(n) = R(n) [(Id - P) u + \xi(n)]$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(n) = 0$, resulta:

$$(3.22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(n) [(Id - P)u + e(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} R(n) [(Id - P)u]$$

Como la sucesión de subespacios cerrados $\{A(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica $A(n+1) \subseteq A(n)$, $\forall n$; podemos aplicar lema 3.2 para concluir que:

$$(3.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(n) [(Id - P)u] = R [(Id - P)u]$$

donde R es la proyección elíptica sobre

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A(n) = \{v \in H^1[0,1] ; v(x) = 0, \forall x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M(n)\}$$

Así, de (3.21), (3.22) y (3.23) se deduce:

$$(3.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(n) e(n) = R[(Id - P)u], \text{ en la norma de } H^1[0,1].$$

Por otro lado, para cada $n \geq 1$, sea $\tau_{n,k} \in M(n)$ un elemento que se bisecta en la transición de $M(n)$ a $M(n+1)$.

Puesto que $\bigcup_{n=1}^{\infty} M(n)$ sólo contiene un número finito de elementos con diámetro superior a un tamaño positivo dado, y debido a que no existen repeticiones en la sucesión $\{\tau_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$, se sigue que $h_{n,k} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, de este hecho y de (3.24), se concluye que:

$$(3.25) \quad \eta_{n,k} = \left[\int_{\tau_{n,k}} \left[a(x) \left[\frac{d}{dx} R(n)e(n) \right]^2 + b(x) \left[R(n)e(n) \right]^2 \right] dx \right]^{1/2}$$

converge a cero a medida que n tiende a ∞ .

Como el método feedback aplicado es δ -regular, se obtiene:

$$(3.26) \quad \eta_{n,k} \geq \delta \max_{j=1, T(n)} \eta_{n,j}$$

Así, de (3.25) y (3.26) se deduce:

$$(3.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{j=1, T(n)} \eta_{n,j} \right\} = 0$$

Por otro lado, a continuación se prueba que $R[(Id - P)u] = 0$ en $[0, 1]$. En efecto, supongamos por el contrario que existe un punto x^* tal que $R[(Id - P)u](x^*) \neq 0$.

Entonces, debido a la convergencia (3.24), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|R(n)e(n)(x^*)| \geq \gamma > 0; \quad \forall n \geq N_0.$$

Sea ahora $\tau_{n,p}$ el elemento de $M(n)$ que contiene a x^* ; entonces, usando proposición 3.1 con $v = R(n)e(n) / \tau_{n,p}$, se concluye:

$$\gamma \leq |R(n)e(n)(x^*)| \leq C h_{n,p}^{1/2} \eta_{n,p}$$

y puesto que $h_{n,p} \leq 1$, puede escribirse:

$$0 < \gamma/C \leq \eta_{n,p} \leq \max_{j=1, T(n)} \eta_{n,j}; \quad \forall n \geq N_0$$

lo cual contradice claramente (3.27).

Esto prueba que:

$$(3.28) \quad R[(Id - P)u] = 0, \text{ en } [0,1]$$

La identidad (3.28) en combinación con (3.24) y (2.29) conducen a:

$$(3.29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| R(n) e(n) \right\|_E = 0$$

Finalmente, una aplicación directa de proposición 2.5 proporciona el resultado requerido.

4. OPTIMIZACION DE LA MALLA.

Se aplican ahora los resultados de las secciones previas para una optimización de malla basada en los indicadores de error del problema modelo (2.1)-(2.2). Suponga que aplicamos algunos de los operadores de transición descritos en sección 3 para determinar qué elementos deben ser refinados. Entonces, podemos pensar que quizás la bisección sobre cada intervalo no es lo mejor, y por lo tanto, se hace necesario intentar otra localización para el nuevo nodo.

Definamos:

$$(4.1) \quad y_j^n = u(x_j^n) ; j = \overline{0, T(n)}$$

En lo que sigue desarrollamos algunas técnicas nuevas para optimizar la ubicación de los nuevos nodos, los que agregados a $M(n)$, configurarían la malla $M(n+1)$.

4.1. Un algoritmo de Carácter local.

Sea $\tau_{n,j} =]x_{j-1}^n, x_j^n[\in M(n)$, un elemento a renar. Sugerimos situar el nuevo nodo sobre $\tau_{n,j}$ usando un criterio local, es decir, restringiendo el problema de optimalidad al intervalo $[x_{j-1}^n, x_j^n]$. Para esto consideramos el problema diferencial:

$$(4.2) \quad \begin{cases} -\frac{d}{dt} \left[a(t) \frac{dv}{dt} \right] + b(t)v = f(t) ; t \in]x_{j-1}^n, x_j^n[\\ v(x_{j-1}^n) = y_{j-1}^n ; v(x_j^n) = y_j^n \end{cases}$$

Debido al hecho que y_{j-1}^n y y_j^n aproximan los valores exactos $u(x_{j-1}^n)$ y $u(x_j^n)$, respectivamente, el problema (4.2) constituye una aproximación a la restricción sobre $\tau_{n,j}$ del problema modelo (2.1)-(2.2).

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.1.

Sea $u_{n,j}$ la solución de (4.2) y denotemos por $U_{n,j}$ la solución del problema:

$$(4.3) \quad -\frac{d}{dt} \left[a(t) \frac{dv}{dt} \right] + b(t)v = r_n(t) ; t \in \tau_{n,j} \quad v(x_{j-1}^n) = v(x_j^n) = 0.$$

con

$$(4.4) \quad r_n(t) = f(t) - L[u(n)](t) = f(t) - b(t)u(n)(t) + u(n)'(t)a'(t),$$

y

$$(4.5) \quad u^{(n)}(t) = \frac{y_{j-1}^n (x_j^n - t) + y_j^n (t - x_{j-1}^n)}{x_j^n - x_{j-1}^n}; \quad \forall t \in \tau_{n,j}.$$

$$(4.6) \quad u^{(n)'}(t) = \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{h_{n,j}}; \quad \forall t \in \tau_{n,j}.$$

Entonces:

$$(4.7) \quad u_{n,j} = U_{n,j} + u^{(n)}.$$

Demostración: Se sigue fácilmente reemplazando (4.7) en (4.2) y considerando las ecuaciones (4.3)-(4.6)

Nota 4.1. Es importante observar aquí que $U_{n,j}$ corresponde a la función $w_j(n)$ definida en (2.31) (Proposición 2.3).

La proposición 4.1 muestra que, indistintamente, podemos trabajar con el problema (4.2) o bien con (4.3).

Ahora, sea x un punto en $]x_{j-1}^n, x_j^n[$, y sea $U_{n,j}(x, \cdot)$ la solución elementos finitos de (4.3) sobre la malla $x_{j-1}^n < x < x_j^n$. Entonces, de acuerdo a los resultados proporcionados en sección 2, los indicadores de error para los intervalos $]x_{j-1}^n, x]$ y $[x, x_j^n]$ están dados, respectivamente, por:

$$(4.8) \quad F_{n,j}^-(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{(x - x_{j-1}^n)^2}{a\left(\frac{1}{2}(x + x_{j-1}^n)\right)} \int_{x_{j-1}^n}^x R_{n,j}^2(x,t) dt, \quad y:$$

$$(4.9) \quad F_{n,j}^+(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{(x - x_j^n)^2}{a(\frac{1}{2}(x + x_j^n))} \int_x^{x_j^n} R_{n,j}^2(x,t) dt$$

donde:

$$(4.10) \quad R_{n,j}(x,t) = r_n(t) - L[U_{n,j}(x,t)]$$

Si definimos:

$$(4.11) \quad F_{n,j}(x) = F_{n,j}^-(x) + F_{n,j}^+(x) ; \forall x \in \tau_{n,j}$$

entonces, esta función es una estimación del error de la solución de elementos finitos $U_{n,j}$ sobre la malla x_{j-1}^n, x, x_j^n . Por lo tanto, un criterio natural es elegir $\bar{x} \in \tau_{n,j}$ tal que:

$$(4.12) \quad F_{n,j}(\bar{x}) = \text{Min}_{x \in \tau_{n,j}} F_{n,j}(x).$$

Esto es, olvidamos por un momento que la solución de elementos finitos $u(n)$ sobre $\tau_{n,j}$ depende también de su comportamiento en el resto del intervalo $[0,1]$; es decir, suponemos de este modo que las aproximaciones y_{j-1}^n y y_j^n son relativamente buenas. Luego, con el objeto de obtener estimaciones casi-óptimas de los nuevos nodos, es suficiente considerar sólo los problemas locales (4.3) para $j = \overline{1, T(n)}$, y tomar a cada uno de ellos independiente de los restantes.

Ahora, es obvio que se requieren técnicas numéricas para resolver (4.12). Además, existe una clara dificultad para ello, cual es, el cálculo de las funciones $F_{n,j}^-$ y $F_{n,j}^+$. Por ejemplo, si resolvemos (4.3)

por medio del método de elementos finitos sobre la malla x_{j-1}^n, x, x_j^n , con elementos lineales, los que requieren un menor número de cálculos, entonces obtenemos:

$$(4.13) \quad \begin{cases} U_{n,j}(x,t) = \gamma_{n,j}(x) e_{n,j}(x,t) \\ R_{n,j}(x,t) = r_n(t) - \gamma_{n,j}(x) [b(t)e_{n,j}(x,t) - a'(t)e'_{n,j}(x,t)] \end{cases}$$

donde:

$$(4.14) \quad e_{n,j}(x,t) = \begin{cases} \frac{t - x_{j-1}^n}{x - x_{j-1}^n} & ; t \in [x_{j-1}^n, x] \\ \frac{x_j^n - t}{x_j^n - x} & ; t \in [x, x_j^n] \end{cases}$$

$$(4.15) \quad e'_{n,j}(x,t) = \begin{cases} 1/(x - x_{j-1}^n) & ; t \in [x_{j-1}^n, x] \\ -1/(x_j^n - x) & ; t \in [x, x_j^n] \end{cases}$$

$$(4.16) \quad \gamma_{n,j}(x) = \frac{C_{n,j}(x) + D_{n,j}(x)}{A_{n,j}(x) + B_{n,j}(x)}$$

y las constantes A, B, C, D se calculan mediante una técnica de integración numérica de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$(4.17) \quad A_{n,j}(x) = \frac{1}{(x - x_{j-1}^n)^2} \left\{ \int_{x_{j-1}^n}^x [a(t) + t^2 b(t)] dt - \right. \\ \left. 2x_{j-1}^n \int_{x_{j-1}^n}^x t b(t) dt + (x_{j-1}^n)^2 \int_{x_{j-1}^n}^x b(t) dt \right\}$$

$$(4.18) \quad B_{n,j}(x) = \frac{1}{(x - x_j^n)^2} \left\{ \int_x^{x_j^n} [a(t) + t^2 b(t)] dt - \right. \\ \left. 2x_j^n \int_x^{x_j^n} t b(t) dt + (x_j^n)^2 \int_x^{x_j^n} b(t) dt \right\}$$

$$(4.19) \quad C_{n,j}(x) = \frac{1}{(x - x_{j-1}^n)} \left\{ \int_{x_{j-1}^n}^x t r_n(t) dt - x_{j-1}^n \int_{x_{j-1}^n}^x r_n(t) dt \right\}$$

$$(4.20) \quad u_{n,j}(x) = \frac{1}{(x_j^n - x)} \left\{ x_j^n \int_x^{x_j^n} r_n(t) dt - \int_x^{x_j^n} t r_n(t) dt \right\}$$

Una vez que la constante $\gamma_{n,j}(x)$ se obtiene de (4.16), definimos la función $R_{n,j}(x,t)$ de (4.13) y luego integramos $R_{n,j}^2$ sobre $[x_{j-1}^n, x]$ y $[x, x_j^n]$ para calcular finalmente $F_{n,j}(x)$ de (4.8), (4.9) y (4.11). Es obvio de aquí que el cálculo de la constante $\gamma_{n,j}(x)$ es la etapa más cara en el proceso que proporciona $F_{n,j}(x)$. Sin embargo, a modo de consuelo, con el objeto de resolver (4.12) es satisfactorio calcular $F_{n,j}^-$ y $F_{n,j}^+$ en sólo un número finito de puntos de $\tau_{n,j}$. No obstante, basado en (4.7) y en el hecho que $\gamma_{n,j}(x) = U_{n,j}(x,x)$, se sugieren algoritmos alternativos que no consideran exactamente el esquema anterior. En otras palabras, desarrollamos un método que no necesita calcular $\gamma_{n,j}$ mediante (4.16), y mostramos también uno que no requiere muchas operaciones para obtener una buena aproximación de $\gamma_{n,j}$. Este es el objetivo de la siguiente sección.

4.2. Un criterio de interpolación para aproximar $\gamma_{n,j}$.

Si consideramos el hecho que el problema (4.12) debe resolverse para cada intervalo $]x_{j-1}^n, x_j^n[$ indicado por el operador de transición, entonces se hace necesario desarrollar un esquema más simple para obtener una aproximación de $F_{n,j}(x)$.

Si $u_{n,j}(x, \cdot)$ es la solución elementos finitos de (4.2) sobre la malla $x_{j-1}^n < x < x_j^n$, entonces basado en (4.7) puede probarse fácilmente que:

$$(4.21) \quad u_{n,j}(x,t) = U_{n,j}(x,t) + u(n)(t); \quad \forall t \in \tau_{n,j}.$$

Obviamente, no es razonable realizar demasiadas operaciones, como las que exige (4.16), para calcular $\gamma_{n,j}$ exactamente, y por lo tanto estamos interesados en algún estimador más simple de esa constante. Para ello, consideramos nuevamente las ecuaciones (4.7)-(4.13).

De (4.13) tenemos:

$U_{n,j}(x,t) = \gamma_{n,j}(x) e_{n,j}(x,t)$; $\forall t \in \tau_{n,j}$, y entonces obtenemos:

$$\gamma_{n,j}(x) = U_{n,j}(x,x)$$

Además, de (4.21) podemos poner:

$U_{n,j}(x,t) = u_{n,j}(x,t) - u(n)(t)$; $\forall t \in \tau_{n,j}$ y aquí, con $t = x$ resulta:

$$(4.22) \quad \gamma_{n,j}(x) = u_{n,j}(x,x) - u(n)(x).$$

Esta igualdad sugiere la idea de estimar $\gamma_{n,j}(x)$ por la diferencia entre una aproximación para $u_{n,j}(x,x)$ y el valor $u(n)(x)$.

Puesto que $u_{n,j}(x, x_{j-1}^n) = \hat{y}_{j-1}^n$ y $u_{n,j}(x, x_j^n) = y_j^n$ son conocidos, podemos considerar un interpolante $\hat{u}_{n,j}(x, \cdot)$ para $u_{n,j}(x, \cdot)$.

La situación más simple es cuando $\hat{u}_{n,j}(x, \cdot)$ se define usando interpolación lineal; esto es:

$$(4.23) \quad \hat{u}_{n,j}(x,t) = \frac{y_{j-1}^n (x_j^n - t) + y_j^n (t - x_{j-1}^n)}{x_j^n - x_{j-1}^n} = u(n)(t)$$

De acuerdo a (4.22) y (4.23) obtenemos $\gamma_{n,j}(x) \approx 0$. Este resultado conduce, junto a (4.13), a la expresión $R_{n,j}(x,t) \approx r_n(t)$, la que al ser sustituida en (4.8), (4.9) y (4.11), nos da:

$$(4.24) \quad F_{n,j}(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{(x - x_{j-1}^n)^2}{a(\frac{1}{2}(x + x_{j-1}^n))} \int_{x_{j-1}^n}^x r_n^2(t) dt + \frac{1}{\pi^2} \frac{(x - x_j^n)^2}{a(\frac{1}{2}(x + x_j^n))} \int_x^{x_j^n} r_n^2(t) dt$$

la cual constituye una aproximación para $F_{n,j}(x)$. Finalmente, aunque la estimación dada por (4.24) es un poco ligera, se aplica el mismo criterio para elegir el nuevo punto; es decir, $\bar{x} \in \tau_{n,j}$ se toma como aquel que minimiza la función $\hat{F}_{n,j}(x)$.

Por otro lado, el valor de $u(n)$ en los restantes nodos, nos permite calcular estimaciones para $\frac{d}{dt}(u_{n,j}(x, x_{j-1}^n))$ y $\frac{d}{dt}(u_{n,j}(x, x_j^n))$. Este hecho nos induce a considerar $\hat{u}_{n,j}(x, \cdot)$ como el polinomio de Hermite que interpola $u_{n,j}(x, \cdot)$ y $\frac{d}{dt}(u_{n,j}(x, \cdot))$ en los nodos x_{j-1}^n y x_j^n .

Así, podemos poner:

$$(4.25) \quad \hat{u}_{n,j}(x,t) = y_{j-1}^n + z_{j-1}^n(t - x_{j-1}^n) + \frac{(m_j^n - z_{j-1}^n)}{h_{n,j}} (t - x_j^n)^2 \\ + \frac{(z_{j-1}^n - 2m_j^n + z_j^n)}{h_{n,j}} (t - x_{j-1}^n)^2(t - x_j^n); \forall t \in [x_{j-1}^n, x_j^n]$$

donde:

$$m_j^n = \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{h_{n,j}}; j = \overline{1, T(n)}; y :$$

$$z_j^n = \frac{d}{dt}(u_{n,j}(x, x_j^n)) \approx \begin{cases} y_{j+1}^n / h_{n,j+1} & ; \text{ si } j = 0 \\ -y_{j-1}^n / h_{n,j} & ; \text{ si } j = T(n) \\ \frac{m_j^n + m_{j+1}^n}{2} & ; \text{ si } 1 \leq j < T(n). \end{cases}$$

De acuerdo a lo anterior, calculamos:

$$(4.26) \quad \hat{\gamma}_{n,j}(x) = \hat{u}_{n,j}(x,x) - u(n)(x), \text{ y definimos:}$$

$$(4.27) \quad \hat{R}_{n,j}(x,t) = r_n(t) - \hat{\gamma}_{n,j}(x)[b(t)e_{n,j}(x,t) - a'(t)e'_{n,j}(x,t)]$$

De este modo, nuestra función objetivo se obtiene ahora poniendo $\hat{R}_{n,j}$ de (4.27), en vez de $R_{n,j}$, en (4.8), (4.9) y (4.11). Así, el nuevo problema es hallar $\bar{x} \in]x_{j-1}^n, x_j^n[$ tal que:

$$(4.28) \quad \hat{F}_{n,j}(\bar{x}) = \text{Min}_{x \in \tau_{n,j}} \hat{F}_{n,j}(x)$$

donde

$$(4.29) \quad \hat{F}_{n,j}(x) = \hat{F}_{n,j}^-(x) + \hat{F}_{n,j}^+(x)$$

y

$$(4.30) \quad \hat{F}_{n,j}^-(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{(x - x_{j-1}^n)^2}{a(\frac{1}{2}(x + x_{j-1}^n))} \int_{x_{j-1}^n}^x \hat{R}_{n,j}^2(x,t) dt$$

$$(4.31) \quad \hat{F}_{n,j}^+(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{(x - x_j^n)^2}{a(\frac{1}{2}(x + x_j^n))} \int_x^{x_j^n} \hat{R}_{n,j}^2(x,t) dt$$

Nota 4.2. Con respecto a la solución de los problemas (4.12) y (4.28), lo ideal es aplicar sobre ellos un método del tipo Fibonacci o Sección Dorada. Sin embargo, para efectos prácticos también es útil considerar un mínimo discreto, es decir, optimizar sobre un número finito de puntos del intervalo. Otra alternativa válida es construir un interpolante polinomial para $\hat{F}_{n,j}$ (o $\hat{F}_{n,j}^-$) y luego obtener el mínimo de dicho polinomio.

5. ENSAYOS NUMERICOS.

Ilustramos los algoritmos alternativos de optimización de mallas con los resultados computacionales obtenidos en un problema muestral. Por simplicidad se usa el método de elementos finitos con aproximación lineal.

Se considera la siguiente notación:

$N = T(n) - 1 =$ número de nodos interiores en la partición.

$$\varepsilon(n) = \left[\sum_{j=1}^{N+1} \hat{\eta}_{n,j}^2 \right]^{1/2} = \text{Estimador de error global.}$$

$$\| e(n) \|_E = \| u - u(n) \|_E = \text{Error global en norma de la energía.}$$

$$\Theta(n) = \| e(n) \|_E / \varepsilon(n) = \text{Cuociente de efectividad.}$$

$$E(n) = 100 \| e(n) \|_E / \| u \|_E = \text{Error relativo en norma de la energía.}$$

M1 = Algoritmo tradicional de refinamiento, el que utiliza alguno de los operadores de transición definidos en sección 3, y realiza bisección sobre los elementos.

b = Parámetro asociado con $A^{(1)}$ o $A^{(5)}$ de acuerdo a (3.6) y (3.16) respectivamente.

M2 = Algoritmo de refinamiento que usa la optimización de malla dada por el esquema de interpolación lineal (4.23)-(4.24), en conjunto con algún operador de transición.

M3 = Algoritmo de refinamiento que usa la optimización de malla dada por el esquema de interpolación Hermite (4.25)-(4.31), en conjunto con algún operador de transición.

m = Número de puntos que se introducen sobre cada intervalo para Hallar el óptimo discreto de la función objetivo $F_{n,j}$.

Los resultados numéricos que se mostraran corresponden al siguiente problema extraído de [5]:

$$-\frac{d}{dx} \left[(x + \alpha)^p \frac{du}{dx} \right] + (x + \alpha)^q u = f(x) ; x \in [0,1] \quad u(0) = u(1) = 0$$

donde f se elige de modo que la solución exacta sea:

$$u(x) = (x + \alpha)^r - [\alpha^r(1 - x) + (1 + \alpha)^r x]$$

Aquí se toma $p = 0$, $q = 1$, $r = -0,25$ y $\alpha = 0.01$.

De acuerdo a esto se obtiene $\|u\|_E = 6.09811$.

La tabla 5.1 muestra los resultados obtenidos por M1 con $A^{(5)}$ y $B = 1.0$.

TABLA 5.1 (M1/A⁽⁵⁾)/B = 1.0

N	$\varepsilon(n)$	$\Theta(n)$	E(n)
1	76.2433	0.076219	95.2933%
2	38.1213	0.141165	88.2453
4	9.5327	0.409400	63.9975
7	1.3452	0.915766	20.2010
14	0.5138	0.963652	8.1194
26	0.2784	0.981279	4.4808
45	0.1601	0.994778	2.6124
83	0.0873	1.000876	1.4334
157	0.0463	1.009842	0.7672
307	0.0238	1.040069	0.4051
607	0.0120	1.150686	0.2271

Se observa aquí que para exactitudes relativas mejores que 20%, la estimación $\varepsilon(n)$ nunca sobrepasa el error verdadero $e(n)$ en más de un 10%; es decir, una vez que $E(n) < 20\%$, se obtiene siempre $\Theta(n) \geq 0.9$. Además, la convergencia a cero de $\varepsilon(n)$ y $E(n)$ es bastante rápida.

Por otra parte, un resumen del comportamiento de los algoritmos de optimización de malla M2 y M3 se aprecia en tabla 5.2 y tabla 5.3, respectivamente.

Comparando las diferentes tablas puede observarse que con la introducción de los primeros nodos el decrecimiento de $\epsilon(n)$ y $E(n)$ en M2 y M3 es mucho más rápido que en M1. Además la velocidad con que (n) converge a 1 es también mayor en M2 y M3. Sin embargo, después de esta primera etapa existe una situación intermedia ($15 \leq N \leq 150$) en la cual el desarrollo de los tres algoritmos es bastante similar.

TABLA 5.2 ($M2/A^{(1)}/B = 0.75/m = 7$)

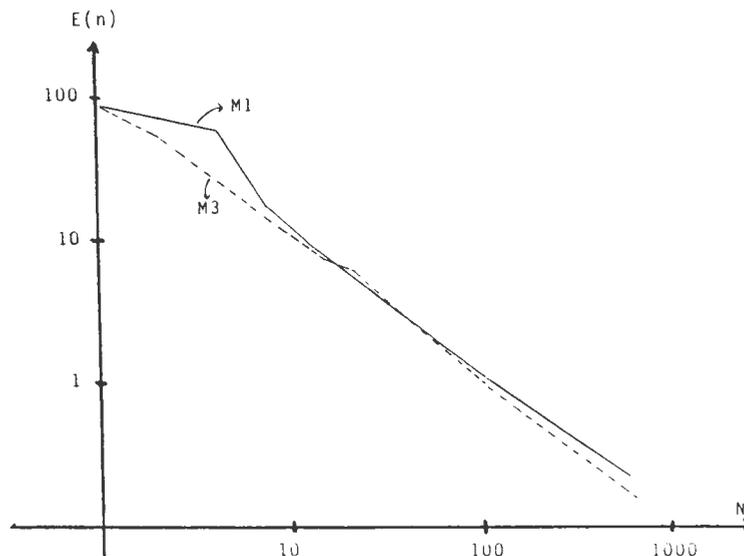
N	$\epsilon(n)$	$O(n)$	$E(n)$
1	76.2433	0.076219	95.2933 %
2	9.7509	0.408756	65.3593
3	3.4140	0.667041	37.3434
6	1.2973	0.905966	19.2738
14	0.5142	0.970622	8.1842
78	0.0925	0.998858	1.5143
178	0.0407	1.003285	0.6705
270	0.0270	1.008501	0.4467
326	0.0223	1.012662	0.3703
388	0.0188	1.017905	0.3142
484	0.0151	1.027904	0.2551

TABLA 5.3 $(M3/A^{(1)})/B = 0.75/m = 13$

N	$\varepsilon(n)$	$\Theta(n)$	E(n)
1	76.2433	0.076219	95.2933
2	7.3526	0.461587	55.6534
5	1.7140	0.789720	22.1963
24	0.2915	0.978995	4.6803
86	0.0839	0.999601	1.3756
153	0.0483	1.002560	0.7934
269	0.0276	1.009501	0.4573
395	0.0181	1.022837	0.3040
584	0.0125	1.040934	0.2131
601	0.0123	1.048956	0.2125
733	0.0098	1.076676	0.1739

Allí no se aprecia clara superioridad de ninguno de ellos. No obstante, a medida que N sigue aumentando se empieza a distinguir una leve mejoría en el comportamiento de los métodos alternativos M2 y M3. Esto último puede notarse por ejemplo para N = 584, en que M3 proporciona E(n) = 0.2131, mientras que M1, con N = 607 aún entrega E(n) = 0.2271.

El comentario anterior puede visualizarse en el siguiente gráfico logarítmico en el cual se ha confrontado N vs. E(n) para M1 y M3.



REFERENCIAS

- [1] BABUSKA, I.; MILLER, A.: "A-posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method". University of Maryland, Institute for Physical Science and Technology, Technical Note BN-968, June 1981.
- [2] BABUSKA, I.; MILLER, A.; VOGELIUS, M.: "Adaptive methods and error estimation for elliptic problems of structural mechanics". University of Maryland, Inst. for Phys. Science and Techn., Technical Note BN-1009, June 1983.
- [3] BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W.: "Error estimates for adaptive finite element computation". SIAM Journ. Num. Anal., Vol. 15, N° 4, 1978, pp. 736-754.
- [4] BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W.: "A-posteriori error estimates for the finite element method". Int. Jour. for Numer. Methods in Engineering, 12, 1597-1615, (1978).
- [5] BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W.: "Analysis of optimal finite element meshes in \mathbb{R}^1 ". Math. of Comput. 33, pp. 435-463, 1979.
- [6] BABUSKA, I.; VOGELIUS, M.: "Feedback and adaptive finite element solution of one dimensional boundary value problems". University of Maryland, Inst. for Phys. Sc. and Tech., Technical Note BN-1006, June 1983.
Numer. Mathem, 44, pp. 75-102, 1984.
- [7] BABUSKA, I.; GAGO, S.; KELLY, D.; ZIENKIEWICZ, O.: "A-posteriori error analysis and adaptive process in the finite element method: Part I - Error Analysis". Inter. Journ. Numer. Methods in Engineering, Vol 19, pp. 1593-1619, 1983.

- [8] BULIRSCH, R.; STOER, J.: "Introduction to Numerical Analysis".
Springer Verlag, New York, 1980.

- [9] GATICA, G.: "A new feedback finite element method and alternative
algorithms for grid optimization", In preparation.

- [10] RHEINBOLDT, W: "Adaptive mesh refinement process for finite ele-
ment solutions".
Inter. Journal for Numer. Methods in Engineering, 17, pp.
649-662, 1981.