DOI: 10.22199/S07160917.1984.0008.00002

REVISTA PROYECCIONES N° 8: 3-13
Diciembre 1984 - ISSN 0716-0917
JORNADA MATEMATICAS, Agosto 1984.

SOBRE EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE EKELAND*
(CONFERENCIA INAUGURAL)

Dr. RAFAEL CORREA F.**

El objeto de esta conferencia es presentar uno de los resultados de mayor trascendencia en matemáticas aplicadas, en los últimos años.

Dado un problema de minimización, surgen naturalmente dos preguntas: el problema de la existencia de un mínimo y el de las propiedades de éstos, llamadas usualmente condiciones de optimalidad.

El principio variacional clásico establece que si F es una función Gateaux diferenciable en un espacio de Banach V, es decir si existe un elemento que se denota F'(v) en V* (dual topológico de V) tal que

* Conferencia inaugural del Encuentro de Matemática de la Zona Norte, Universidad del Norte 1984.

** Profesor Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} [F(v+tu)-F(v)] = < F'(v),u >$$

para todo $u \in V$, entonces todo mínimo $\bar{v}$ de F en V verifica la propiedad,

$$F'(\bar{v}) = 0$$

Nota: Quienes no tengan costumbre de trabajar en espacios funcionales pueden suponer que $V = \mathbb{R}^n$,

$V^* = \mathbb{R}^n$, $F'(v) = \nabla F(v)$, $< F'(v), u > = \nabla F(v) \cdot u$.

El problema que motivó a Ivar Ekeland a establecer en 1972 [E1] el principio variacional que hoy lleva su nombre, es el de estudiar las propiedades de un ε - mínimo, es decir de un elemento $v_\varepsilon \in V$ que verifica:

$$F(v_\varepsilon) \leq \inf_V F + \varepsilon \tag{1}$$

En teoría de optimización y control, los ε -mínimos de un funcional juegan un rol fundamental, tanto desde un punto de vista teórico, como numérico. En efecto, la existencia de un ε -mínimo requiere de menos condiciones que la de un mínimo y desde el punto de vista de la resolución numérica de un problema de optimización, usualmente los algoritmos dan sólo una aproximación de la solución, es decir un ε -mínimo.

PRINCIPIO VARIACIONAL DE EKELAND.

Si V es un espacio de Banach y si $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función s.c.i., diferente de la función $+\infty$ y acotada inferiormente, entonces dado cualquier ε -mínimo v_ε de F en V, existe otro ε -mínimo v'_ε que verifica las propiedades:

$$||v'_\varepsilon - v_\varepsilon|| \leq 1 \tag{2}$$

$$F(v'_{\varepsilon}) \leq F(v) + \varepsilon||v - v'_{\varepsilon}|| \quad \text{para todo } v \in V \tag{3}$$

Desde la demostración original de Ekeland este resultado ha sido utilizado con gran éxito en diferentes campos de las matemáticas aplicadas y ha sido también demostrado de diferentes maneras. Posiblemente la demostración más concisa es la dada por M. Crandall [E1]. Entregaremos aquí una demostración muy simple, para el caso de dimensión finita ($V = \mathbb{R}^n$), dada recientemente por J. B. Hiriart-Urruty [H].

Demostración: Dado el ε-mínimo v_{ε}, definimos (mediante una perturbación de F) la función

$$G(v) = F(v) + \varepsilon||v - v_{\varepsilon}||$$

esta función será también s.c.i. y como F es acotada inferiormente, G será además coersiva, es decir

$$\lim_{||v||\to\infty} G(v) = \infty$$

lo que implica, puesto que V es de dimensión finita, la existencia de un mínimo $\bar{v}$ de G en V, es decir

$$F(\bar{v}) + \varepsilon||\bar{v} - v_{\varepsilon}|| \leqslant F(v) + \varepsilon||v - v_{\varepsilon}|| \qquad \forall v \in V \tag{*}$$

y considerando $v = v_{\varepsilon}$ obtenemos

$$F(\bar{v}) + \varepsilon||\bar{v} - v_{\varepsilon}|| \leqslant F(v_{\varepsilon}) \tag{**}$$

lo que muestra de $\bar{v}$ es un ε-mínimo de F en V.

En lo que sigue denotaremos $\bar{v} = v'_{\varepsilon}$ y mostraremos que este punto verifica las propiedades (2) y (3). Puesto que v_{ε} es por hipótesis un ε-m ínimo, se tiene que $F(v_{\varepsilon}) - F(v'_{\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$ lo que junto con la desigualdad (**) implica (2).

Finalmente de (*) vemos que

$$F(v'_\varepsilon) \leqslant F(v) + \varepsilon[\,||\, v - v_\varepsilon|| - ||\, v'_\varepsilon - v_\varepsilon||\,]$$

$$\leqslant F(v) \ + \varepsilon||v - v'_\varepsilon|| \quad \text{para todo } v \in V$$

lo que concluye la demostración.

Un corolario del principio variacional, llamado usualmente forma débil, es el siguiente:

FORMA DEBIL DEL PRINCIPIO VARIACIONAL DE EKELAND.

Si V es un espacio de Banach y si $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función s.c.i., diferente de la función $+\infty$ y acotada inferiormente para todo $\varepsilon > 0$ existe un ε-mínimo v_ε de F en V que verifica la propiedad

$$F(v_\varepsilon) \leqslant F(v) + \varepsilon\ ||v - v_\varepsilon|| \tag{4}$$

para todo $v \in V$.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA FORMA DEBIL DEL PRINCIPIO VARIACIONAL DE EKELAND.

Una primera consecuencia, que generaliza más directamente el principio variacional clásico que mencionábamos en la primera parte, y que está en la motivación original que llevó a este importante resultado, es la siguiente:

Teorema: Sea V un espacio de Banach y F una función Gateaux derivable en V y acotada inferiormente. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un ε-mínimo v_ε de F en V que verifica la propiedad

$$||\ F'(v_\varepsilon)||\ ^* \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

Demostración: De la forma débil del P.V.E. sabemos que existe un ε -mínimo v_ε de F en V tal que

$$F(v_\varepsilon) \leqslant F(v) + \varepsilon||v - v_\varepsilon||$$

y haciendo $v = v_\varepsilon + tu$ para cualquier $u \in V$, obtenemos

$$-\varepsilon||u|| \leqslant \frac{1}{t} [F(v_\varepsilon + tu) - F(v_\varepsilon)]$$

y haciendo límite cuando $t \to 0^+$ se obtiene

$$<F'(v_\varepsilon), - u> \leqslant \varepsilon||u|| \qquad \text{para todo } u \in V$$

y tomando ínfimo a ambos lados con $||u|| = 1$ se obtiene

$$||F'(v_\varepsilon)||^* \leqslant \varepsilon$$

Aplicaciones de la forma débil del P.V.E. al cálculo de variaciones y al control óptimo pueden verse en [E1] y [E2].

Otra aplicación importante de la forma débil del P.V.E. es un resultado sobre existencia de solución de un punto mínimo de una función que verifica la condición de Palais-Smale.

Teorema: Sea V un espacio de Banach y F una función Gateaux derivable en V y acotada inferiormente, que verifica la condición:

"para toda sucesión $F'(u_n) \to 0$ en V^* con $F(u_n)$ acotada, se tiene que $F'(u_n) = 0$ para algún n, o bien la sucesión u_n tiene un punto de acumulación en V".

Entonces la función F alcanza su mínimo en V, es decir

$$\exists \bar{v} \in V : F(\bar{v}) = \inf_V F \text{ y } F'(\bar{v}) = 0$$

Demostración: Aplicando el teorema anterior a la función F con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ vemos que existe una sucesión u_n en V tal que $F'(u_n) \to 0$ y $F(u_n) \to \inf_V F$. Entonces, o bien existe una subsucesión u_{n_k} tal que $F'(u_{n_k}) \neq 0$ para todo k, o bien $F'(u_n) = 0$ para todo n, salvo un número finito.

En el primer caso, por hipótesis la sucesión u_{n_k} tiene un punto de acumulación $u \in V$ y por continuidad de F se tiene que $F(u) = \inf_V F$. En el segundo caso si definimos el conjunto

$$S = \{ v \in V \;/\; F(v) = 0\}$$

vemos que para cada n existe un camino C^1 que une u_n a algún punto v_n en la frontera de S, y claramente, del teorema del valor medio, concluimos que

$$F(v_n) = F(u_n)$$

y como v_n está en la frontera de S, debe existir un $w_n \notin S$ tal que $\|v_n - w_n\| \leq \frac{1}{n}$, lo que implica que $F'(w_n) \neq 0$ y $F(w_n) \to \inf_V F$, es decir, estamos en el primer caso.

Para terminar esta sección daremos dos aplicaciones de la forma débil del P.V.E. a la existencia de punto fijo. La primera corresponde al caso de una función no necesariamente contínua [C1] :

Teorema: Sea V un espacio de Banach y $f : V \to V$ una función que satisface la propiedad

$$\|u - f(u)\| \leq \phi(u) - \phi(f(u)) \qquad \forall u \in V \tag{6}$$

donde $\phi : V \to \mathbb{R}$ es una función s.c.i. y acotada inferiormente. Entonces f tiene un punto fijo:

$$v \in V \quad : \quad f(v) = v$$

Demostración: Si aplicamos la forma débil del P.V.E. a la función ϕ con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, vemos que existe un ε -mínimo v_ε tal que

$$\phi(v_\varepsilon) \leqslant \phi(v) + \frac{1}{2} ||v - v_\varepsilon||$$

y haciendo $v = f(v_\varepsilon)$ obtenemos

$$\phi(v_\varepsilon) - \phi(f(v_\varepsilon)) \leqslant \frac{1}{2} ||f(v_\varepsilon) - v_\varepsilon||$$

y haciendo $u = v_\varepsilon$ en la desigualdad de la hipótesis

$$||v_\varepsilon - f(v_\varepsilon)|| \leqslant \phi(v_\varepsilon) - \phi(f(v_\varepsilon))$$

y de las dos últimas desigualdades obtenemos

$$||v_\varepsilon - f(v_\varepsilon)|| \leqslant \frac{1}{2} ||v_\varepsilon - f(v_\varepsilon)||$$

lo que implica que $v_\varepsilon - f(v_\varepsilon) = 0$

Este resultado se entiende mejor en el contexto de los sistemas dinámicos donde ϕ es la entropía del sistema que evoluciona del estado x_n en el instante n al estado $x_{n+1} = f(x_n)$ en el instante n+1. La desigualdad (6) del teorema implica que $\phi(x_n) > \phi(x_{n+1})$ si $x_n \neq x_{n+1}$, es decir, la entropía decrece a medida de que el sistema alcanza un estado estacionario. Mayores detalles en este tema pueden verse en [C1].

Otro teorema de punto fijo que corresponde a una extensión del principio de contracción de Banach es el siguiente [C2]:

Teorema: Sea V una parte convexa cerrada de un espacio de Banach y $f : V \to V$ una aplicación contínua que verifica:

$$\exists\, \sigma<1 : \forall u \in V, \exists\, t \in\,]0,1] : ||f(u_t) - f(u)|| \leqslant \sigma ||u_t - u|| \tag{7}$$

donde $u_t = tf(n) + (1 - t)u$

Entonces f tiene un punto fijo en V.

Es fácil notar que si t = 1 en (7) la sucesión $f^n(u)$ es de Cauchy y convergerá a algún punto fijo, tal como ocurre en la demostración clásica de existencia de punto fijo.

Notemos también que las hipótesis en los dos teoremas anteriores no garantizan unicidad del punto fijo.

Aplicaciones de la forma débil del P.V.E. al cálculo de variaciones y al Control Optimo pueden verse en [E2] y [E3]. Aplicaciones en teoría de semigrupos pueden verse en

ALGUNAS APLICACIONES DE LA FORMA FUERTE DEL PRINCIPIO VARIACIONAL DE EKELAND.

Si aplicamos el P.V.E. al espacio de Banach V dotado de la norma $1/\lambda|| \quad ||$ (con $\lambda > 0$) las relaciones (2) y (3) tomarán la forma

$$||v'_\varepsilon - v_\varepsilon|| \leqslant \lambda \tag{8}$$

$$F(v'_\varepsilon) \leqslant F(v) + \varepsilon/\lambda \; ||v - v'_\varepsilon|| \tag{9}$$

Vemos entonces que un buen compromiso entre la distancia del punto v'_ε a v_ε y la cercanía de $F'(v'_\varepsilon)$ a cero se obtiene tomando $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$. Se obtiene así el siguiente Corolario del P.V.E.

<u>Corolario</u>: Si V es un espacio de Banach y $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. distinta de la función $+\infty$ y acotada inferiormente, entonces dado un ε-mínimo v_ε de F en V, existe otro ε-mínimo v'_ε de F en V tal que

$$||v'_\varepsilon - v_\varepsilon|| \leqslant \sqrt{\varepsilon} \tag{10}$$

$$F(v'_\varepsilon) \leqslant F(v) + \sqrt{\varepsilon}\ ||v'_\varepsilon - v|| \qquad \forall v \in V \tag{11}$$

Daremos a continuación un terorema que establece una condición necesaria de optimalidad para funciones no diferenciables. El desarrollo de la teoría de la optimización no diferenciable se debe en sus orígenes a la noción de subdiferencial generalizado introduciendo por F.H. Clarke [C3] en 1973. Un completo desarrollo de esta importante área de análisis no diferenciable (no convexo) se encuentran en el excelente texto de F.H. Clarke [C4].

<u>Teorema</u>: Sea V un espacio de Banach y $F : V \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $F_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ Gateaux derivable tal que

$$F_\varepsilon \leqslant F \text{ y } \inf F_\varepsilon \geqslant \inf F - \varepsilon \tag{12}$$

$$F'_\varepsilon(v) \to \phi(u) \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0 \text{ y } v \to u \tag{13}$$

entonces todo mínimo u de F en V verifica

$$\phi\ (u) = 0 \text{ en } V^* \tag{14}$$

<u>Demostración</u>: Si u es un mínimo de F en V, de (12) vemos que

$$F_\varepsilon(u) \leqslant F(u) \leqslant \inf_V F_\varepsilon + \varepsilon$$

Del corolario, concluimos que debe existir v'_ε que verifica $||u - v'_\varepsilon|| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ y es un mínimo de la función $G(v) = F_\varepsilon(v) + \sqrt{\varepsilon}||v'_\varepsilon - v||$ en V.

Entonces, como F_ε es diferenciable en v_ε y como la función $v \to ||v'_\varepsilon - \sigma||$ tiene derivada direccional +1 en v'_ε en cualquier di rección $d \in V(||d||= 1)$, vemos que v_ε verifica la relación

$$F'_\varepsilon(v'_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\ B^* \ni 0 \tag{*}$$

donde B^* es la bola unitaria en V^*. Finalmente haciendo $\varepsilon \to 0$, de (10) se tiene que $v_\varepsilon \to u$ y el lado izquierdo de (*) tiende a $\phi(u)$ lo que concluye la demostración.

Es importante notar que en este teorema no se supone la diferenciabilidad de F. La propiedad $F'(u) = 0$ se reemplaza por $\phi(u) = 0$.

Más detalles sobre esta y otras aplicaciones (geométrica de espacio de Banach, análisis global, etc.) del principio variacional en cuestión se encuentran en [E2].

BIBLIOGRAFIA.

[B] BREZIS, BROWDER, "A general ordering principle in nonlinear functional analysis" Advances in Math. 21, 1976, 355 - 364.

[C1] CARISTI, "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions" Trans. A.M.S. 215, 1976, 241 - 251.

[C2] CLARKE, "Pointwise contraction criteria for the existence of fixed points" M.R.C. Tech. Rep. # 1658, 1976, University of Wisconsin, Madison.

[C3] CLARKE, "Generalized gradients and applications" Trans. A.M.S. 205, 1975, 247 - 262.

[C4] CLARKE, "Optimization and Nonsmooth Analysis" J. Wiley 1983.

[E1] EKELAND, "On variational principle" J. Math. Anal. Appl. 47, 1974, 1057 - 1059.

[E2] EKELAND, "Nonconvex Minimization problems" Bull. A.M.S. 1, 1979, 443 - 474.

[E3] EKELAND, TEMAN, "Convex Analysis and Variational Problems" North-Holland, 1976.

[H] HIRIART-URRUTY, "A short proof of the variational principle for approximate solutions of a minimization problem", Université Paul Sabatier (Toulouse III), 1983.