

REVISTA PROYECCIONES N° 7: 121-137
JUNIO 1984 - I.S.S.N. 0716-0917

$$\text{EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL } I(\alpha) = \int_0^{\infty} (e^{-\theta} / \sqrt{1+\alpha\theta}) d\theta, \alpha > 0.$$

UNA APLICACIÓN EN INGENIERÍA QUÍMICA

OSCAR ROJO J. (*)

JOSE O. VALDERRAMA (§)

RESUMEN.

Se estudia una integral de una función impropia $f(\theta, \alpha)$ donde θ es la variable independiente y α es un parámetro. Dicha integral encuentra aplicación en algunos problemas de Reactores Químicos y, por lo tanto, θ y α tienen un significado físico claro.

Un cambio de variable permite obtener una relación de la integral $I(\alpha)$ con la función error complementaria. Se analiza esta solución y se discute sobre algunas desventajas prácticas de ella, haciéndose necesario un estudio más detallado de la integral. Dicho estudio es separado por conveniencia en dos partes: una para casos $\alpha \geq 1$ en que se hace uso de la cuadratura extendida de Gauss-Legendre y otra para casos $\alpha < 1$ en que se usan desarrollos en fracción continuada. Los resultados son sorprendentemente buenos en ambas situaciones. Se dispone así de un procedimiento adecuado y exacto, y de fácil manejo para usos de programación por computador.

(*) Departamento Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Norte.

(§) Departamento Ingeniería Química y Metalúrgica, Facultad de Ingeniería, Universidad del Norte.

1. INTRODUCCION.

Problemas de tipo numérico son comunes en aplicaciones de Ingeniería Química, especialmente en el estudio de modelos o en la solución de balances de materia y energía para situaciones físicamente complejas. Aunque desde el punto matemático la situación puede estar resuelta, es sólo en la aplicación a casos reales en que emergen problemas que requieren el complemento de las matemáticas y de la ingeniería.

El caso que se trata en este trabajo es un ejemplo claro de un problema de aplicación en Ingeniería Química en que una integral aparentemente simple, requiere de un estudio particular más detallado para no llegar a resultados y conclusiones erróneas. Sobre dicho problema de aplicación, es conveniente dar algunos antecedentes para no perder el objetivo último del tratamiento matemático y conocer la situación física en que dicho tratamiento toma importancia.

En el estudio de Reactores Químicos, esto es recipientes en los que se efectúan reacciones químicas, existen dos conceptos fundamentales que han sido utilizados desde hace años para estudiar el comportamiento de dichos reactores: la Distribución de Tiempos de Residencia (DTR) y el Grado de Segregación (GS).

Consideremos un caso muy simple de nuestros cursos de química. Si tenemos un compuesto A y un compuesto B, estos pueden reaccionar y transformarse químicamente para producir un compuesto C que denominaremos producto de la reacción. Ahora bien, para que A y B den el producto C, deben ser puestos en contacto por algún tiempo en un reactor químico.

En un reactor continuo, es decir aquél en que entran y salen productos en forma continua en el tiempo, la DTR describe CUANTO TIEMPO permanecieron las moléculas A y B dentro del reactor. Sin embargo, la DTR no especifica nada respecto al COMO permanecieron las moléculas du-

rante su paso por el reactor. Es obvio que si los reactivos A y B no se pusieron en contacto en forma adecuada durante su estadía en el reactor, el tiempo que permanecieron en él no tendría ninguna incidencia en el resultado del proceso, ya que no se formaría el producto deseado C. Este último aspecto, el COMO, es cubierto por el Grado de Segregación. Existen otros factores, pero desde el punto de vista práctico son de menos importancia [1].

Una situación de interés para analizar es aquella de un reactor continuo perfectamente agitado con segregación completa. Esto corresponde a un reactor en que la concentración es constante y uniforme en cualquier punto de él y en la que los reactivos y productos se encuentran formando pequeños aglomerados o paquetes imaginarios de paredes rígidas a través de las cuales no entran ni salen moléculas de ningún tipo.

Se considerará que en dicho reactor ocurre una reacción química a temperatura constante de la forma



con una velocidad de reacción de la forma

$$r_A = - \frac{dC_A}{dt} = k C_A C_B^2 \quad (2)$$

donde r_A (moles/lit/seg) representa los moles de reactivo A que reaccionan por unidad de tiempo y por unidad de volumen de reactor, k es una constante con unidades ($\text{lt}^2/\text{mol}^2/\text{seg}$), y C_A y C_B son las concentraciones de A y B en (mol/lit). Se considerará también que las concentraciones iniciales C_{A0} y C_{B0} están en proporción estequiométrica, lo que significa que $C_{B0} = 2C_{A0}$ y que $C_B = 2C_A$ en cualquier instante.

El modelo de Segregación Total o de Flujo Completamente Segregado establece que la concentración de A a la salida de un reactor continuo perfectamente agitado, $\bar{C}_A$, está dada por [ver, por ejemplo, 2].

$$\bar{C}_A = \int_0^{\infty} C_A(t) \frac{e^{-(q/V)t}}{(V/q)} dt \quad (3)$$

Aquí, V es el volumen del reactor en (lts) y q es el caudal volumétrico en (lt/seg). La concentración $C_A(t)$ está dada por la solución de la ecuación (2), que para este caso particular es:

$$C_A(t) = \frac{C_{A0}}{\sqrt{1 + kC_{A0}^2 t}} \quad (4)$$

Introduciendo la ec. (4) en la (3), resulta:

$$\bar{C}_A = \left(\frac{qC_{A0}}{V} \right) \int_0^{\infty} \frac{e^{-(q/V)t}}{\sqrt{1 + kC_{A0}^2 t}} dt \quad (5)$$

la cual constituye la integral de interés en este trabajo, y para la que no se dispone de solución analítica.

Aunque la función integrada es aparentemente "buena" desde el punto de vista numérico, no puede ser resuelta para cualquier valor de (q/V) y (kC_{A0}^2) por métodos numéricos convencionales tales como la regla trapezoidal, la regla de Simpson, o las fórmulas de Newton-Cotes. Otras técnicas de integración un poco más elaboradas como las de tipo gaussiano (Gauss, Radau, Lobato) también fallan en algunas situaciones. Se requirió entonces de un análisis detallado de la integral en cuestión para valores arbitrarios de (q/V) y (kC_{A0}^2) .

2. RELACION ENTRE $I(\alpha)$ Y LA FUNCION ERROR COMPLEMENTARIA.

Por conveniencia, se definen

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= \frac{\bar{C}_A}{C_{A_0}} \\
 \tau &= v/q \\
 \alpha &= k\tau C_{A_0}^2 \\
 \theta &= t/\tau
 \end{aligned} \tag{6}$$

definiciones que transforman la integral en estudio (ec. 5) en:

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{1 + \alpha\theta}} d\theta \tag{7}$$

Claramente, la función integranda cumple con

$$0 < \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{1 + \alpha\theta}} \leq e^{-\theta} \quad \forall \theta \geq 0 \tag{8}$$

de donde se puede concluir sobre la convergencia de la integral impropia $I(\alpha)$. Por otro lado, de la ecuación (8) se puede obtener, después de integrar el lado derecho de la desigualdad que

$$0 < I(\alpha) \leq 1$$

con lo cual se obtiene una cota superior para el valor de la integral en estudio. Se debe observar que estas cotas están de acuerdo al concepto físico de $I(\alpha) = \bar{C}_A / C_{A_0}$ (ec. 6), ya que $\bar{C}_A$ varía entre C_{A_0} al comienzo de la reacción y cero, si la reacción procediera en forma completa hasta que se agoten los reactivos.

El tratamiento convencional en aplicaciones de Ingeniería de una integral como la de interés aquí considera la transformación de la integral, a través de sustituciones adecuadas, para obtener alguna expresión cuyo tratamiento matemático sea conocido. (Integral Exponencial, de Dawson, de Fresnel, Elípticas, de Euler, etc.).

En el caso que se estudia aquí la transformación adecuada es

$$u = \sqrt{1/\alpha + \theta}$$

lo que transforma la integral (7) en

$$I(\alpha) = \frac{2e^{1/\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \int_{1/\sqrt{\alpha}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (9)$$

o en otra forma

$$I(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{1/\alpha} \operatorname{erfc}(1/\sqrt{\alpha}) \quad (10)$$

donde la función error complementaria $\operatorname{erfc}(x)$ está dada por

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (11)$$

Esta función o su complemento, la función error ($\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x)$), se encuentra tabulada en la literatura [3], de modo que la integral $I(\alpha)$ es calculable. Sin embargo hay dos factores importantes que considerar antes de dar por resuelto el problema. Uno es que, si bien las tablas cubren todo el rango de x , no están todos los valores requeridos para una situación particular. Es necesario recurrir por lo tanto a técnicas de interpolación. El segundo, y quizás más importante, es que en la mayoría de las situaciones la integral forma parte de un complejo programa de computación donde los valores tabulados no son de utilidad. Para estos casos se debe disponer de ecuaciones o procedimientos numéricos adecuados.

Existen también en la literatura [3] expansiones asintóticas y expansiones racionales válidas para la función error, que son, en principio atractivas. Sin embargo, dichas expansiones son válidas en rangos limitados (expansiones asintóticas), y conducen a errores numéricos de importancia para ciertos valores de x . La Tabla I muestra algunos valores de $I(\alpha)$ para un amplio rango de $x = 1/\sqrt{\alpha}$.

Con estos antecedentes es claro que se hace necesario buscar un procedimiento adecuado para ser programado en un computador y cuya aplicabilidad no dependa del valor de la variable $(1/\sqrt{\alpha})$. Se debe notar que dicha variable puede tomar cualquier valor, dependiendo de los valores reales de k , τ , y C_{A_0} de acuerdo a la definición de dada por la ec. (6), $\alpha = k\tau C_{A_0}^2$.

En las secciones siguientes se presentan y discuten algunos procedimientos y se propone el más adecuado para el problema de interés en este trabajo.

Tabla I.: VALOR DE INTEGRAL $I(\alpha)$ CALCULADA MEDIANTE TABLAS Y EXPANSIONES RACIONALES [3]. (*Valores interpolados).

α	$1/\sqrt{\alpha}$	TABLAS	EXPANSION 1 n=3	EXPANSION 2 n=5
0.001	$1/\sqrt{0.001}$	0.999503742*	1.21772691	1.183593837
0.01	10	0.995073139	1.100492763	1.038901635
0.1	$1/\sqrt{0.1}$	0.956086599	0.969526418	0.956956574
0.25	2	0.905354184	0.907971251	0.905399980
0.5	$1/\sqrt{0.5}$	0.869242087*	0.843055290	0.842758007
0.75	$1/\sqrt{0.75}$	0.794988891*	0.795592770	0.795635030
1	1	0.757872156	0.757794910	0.757893585
2	$1/\sqrt{2}$	0.651938674*	0.655649770	0.655698120
10	$1/\sqrt{10}$	0.405713930*	0.405577063	0.405576636

$$\operatorname{erfc}(x) = e^{-x^2} * \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{1 + bx} \right)^i$$

a_i y b son constantes para cada expansión.

3. EVALUACION NUMERICA DE LA INTEGRAL.

Se distinguen los siguientes casos en el tratamiento numérico de la integral en estudio.

3.1. Evaluación de $I(\alpha)$ para $\alpha \geq 1$.

Usando la ecuación (10) y (11) resulta

$$I(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} e^{1/\alpha} \int_{1/\sqrt{\alpha}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (12)$$

Pero, como se sabe,

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Con lo cual, la integral $I(\alpha)$ puede escribirse como

$$I(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} e^{1/\alpha} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{1/\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} du \right]$$

Entonces,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{1/\alpha} \left[\sqrt{\pi} - R(\alpha) \right] \quad (13)$$

donde

$$R(\alpha) = \int_{-1/\sqrt{\alpha}}^{1/\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} du \quad (14)$$

En particular, para $\alpha = 1$ se tiene,

$$I(1) = e \left[\sqrt{\pi} - R(1) \right].$$

En el caso que se considera aquí se tiene,

$$-1 \leq -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \leq 1.$$

Esto implica que el intervalo de integración de $R(\alpha)$ tiene una longitud menor o igual a 2 para todo $\alpha \geq 1$. Entonces, una fórmula de cuadratura numérica puede ser empleada para evaluar $R(\alpha)$ con buena exactitud. Teniendo en cuenta además que la función integrando es una función par, en número de evaluaciones de la función puede ser reducido a la mitad en la aplicación de la fórmula de cuadratura. En especial, el método de la cuadratura extendida de Gauss-Legendre ha mostrado ser eficiente. Empleando la fórmula de esta cuadratura correspondiente a $n=7$, [4], $R(\alpha)$ queda aproximado por

$$R(\alpha) \approx \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^3 A_i e^{-x_i^2/\alpha} + \sum_{j=1}^4 B_j e^{-y_j^2/\alpha} \right] + \frac{A_4}{\sqrt{\alpha}} \quad (15)$$

donde

$x_1 = 0.4058451514$	$A_1 = 0.1903505787$
$x_2 = 0.7415311856$	$A_2 = 0.1406532598$
$x_3 = 0.9491079123$	$A_3 = 0.0630920934$
	$A_4 = 0.1094821406$
$y_1 = 0.2077849547$	$B_1 = 0.2044329401$
$y_2 = 0.5860872357$	$B_2 = 0.1690047262$
$y_3 = 0.8648644231$	$B_3 = 0.1047900099$
$y_4 = 0.9914553714$	$B_4 = 0.0229353216$

Una vez obtenido $R(\alpha)$, el valor aproximado de $I(\alpha)$ es calculado usando la ecuación (13). Algunos resultados numéricos obtenidos mediante este procedimiento se dan en la Tabla II.

Tabla II.: VALORES DE LA INTEGRAL $I(\alpha)$ PARA DIVERSOS VALORES DE α , CALCULADOS CON LA FORMULA DE CUADRATURA EXTENDIDA DE GAUSS-LEGENDRE.

α	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$I(\alpha)$
1.0	1.0	0.7578721560
1.234567901	0.9	0.7282631550
1.5625	0.8	0.6935265782
2.040816327	0.7	0.6525310762
2.777777778	0.6	0.6038445947
4.0	0.5	0.5456413608
6.25	0.4	0.4755761573
11.111111111	0.3	0.3906130258
25.0	0.2	0.2867899527
100.0	0.1	0.1588928626

Es conveniente hacer notar que el uso de la ecuación (13) no es adecuado para el caso $\alpha < 1$, dado que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R(\alpha) = \sqrt{\pi},$$

lo que podría inducir errores de redondeo grandes que impliquen una aproximación deficiente de $I(\alpha)$, especialmente cuando α es muy pequeño. Además, el intervalo de integración de $R(\alpha)$ sería mayor que 2, lo cual influiría negativamente en el cómputo de $R(\alpha)$. Sin embargo, la fórmula de cuadratura da buenos resultados aún para valores de α algo menores que 1.0. Por ejemplo,

$$I(0.5) = 0.8427384576$$

$$I(0.75) = 0.795613903,$$

pero debe aplicarse con reserva para valores menores y en ningún caso para α muy pequeño ($\alpha \rightarrow 0$), situación que es también de interés en problemas de aplicación. Se hace necesario entonces estudiar un camino apropiado para este último caso, estudio que se presenta en la sección siguiente.

3.2. EVALUACION DE $I(\alpha)$ PARA $\alpha < 1$.

De la ecuación (10) se puede escribir

$$I(\alpha) = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{1/\alpha} \operatorname{erfc}(1/\sqrt{\alpha})$$

La siguiente expansión en fracción continuada

$$\sqrt{\pi} x e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{1} - \frac{\frac{1}{2x^2}}{1} + \frac{\frac{2}{x^2}}{1} - \frac{\frac{3}{2x^2}}{1} + \dots \quad (16)$$

es debida de Perron y es presentada en [5].

Haciendo $x = 1/\sqrt{\alpha}$, $a = \alpha/2$, y usando la fórmula (16)

se obtiene

$$I(\alpha) = \frac{1}{1} + \frac{a}{1} + \frac{2a}{1} + \frac{3a}{1} \dots \quad (17)$$

Se debe notar que la expansión (17) puede ser también obtenida directamente aplicando el procedimiento de V. Viskovatoff [6] y [7] a la expansión asintótica de $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) \sim 1 - \frac{1}{b} + \frac{1 \cdot 3}{b^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{b^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{b^4} - \dots \quad (18)$$

donde $b = \frac{1}{a}$. Esta expansión asintótica resulta de aplicar repetidamente integración por partes en $I(\alpha)$.

Las convergentes

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{1} + \frac{a}{1} + \frac{2a}{1} + \frac{3a}{1} + \dots + \frac{(n-1)a}{1}$$

de la fracción continuada dada en la ecuación (17) satisfacen las relaciones:

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} + (n-1)a P_{n-2} \\ Q_n = Q_{n-1} + (n-1)a Q_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (19)$$

donde $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = 1$ y $Q_1 = 1$

Estas relaciones permiten calcular recursivamente la sucesión de convergentes $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$, cuya rapidez de convergencia crece a medida que α de-

crece, siendo particularmente rápida cuando $\alpha \leq 0.1$. Esto se observa claramente en los ejemplos dados en la Tabla III, en la cual aparecen las sucesiones de convergentes para $\alpha = 0.1$, 0.01 y 0.001 .

Tabla III.: CONVERGENCIA DE LA SUCESSION DE CONVERGENTES (P_n/Q_n) PARA TRES VALORES DE α .

	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.001$
	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
	0.9523809524	0.9950248756	0.9995002499
	0.9565217391	0.9950738916	0.9995007489
	0.9560229446	0.9950731743	0.9995007481
	0.9560975610	0.9950731881	0.9995007481
	0.9560844787	0.9950731878	
	0.9560870734	0.9950731878	
	0.9560865049		
	0.9560866402		
	0.9560866056		
	0.9560866150		
	0.9560866123		
	0.9560866131		
	0.9560866129		
	0.9560866130		
	0.9560866129		
	0.9560866129		
$I(\alpha)$	0.9560866129	0.9950731878	0.9995007481

Sin embargo para valores de α mayores que 0.1 la convergencia no es tan rápida como en los ejemplos de la tabla anterior. La convergencia puede ser acelerada transformando la fracción continuada (17) a una equivalente como se expone a continuación.

La fracción continuada siguiente [7]:

$$\frac{a_1}{1+a_2} - \frac{a_2 a_3}{1+a_3+a_4} - \frac{a_4 a_5}{1+a_5+a_6} - \frac{a_6 a_7}{1+a_7+a_8} - \dots \quad (20)$$

tiene por convergentes los valores $F_{2n} = \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, donde $F_n = \frac{P_n}{Q_n}$ corresponde a la suceción de convergentes de la fracción continuada

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{1} + \frac{a_4}{1} + \dots$$

En el caso en estudio aquí, $a_1 = 1$, $a_n = (n-1)a$.

Así, entonces, la fracción continuada

$$I(\alpha) = \frac{1}{1+a} + \frac{1.2a^2}{1+5a} - \frac{3.4a^2}{1+9a} + \frac{5.6a^2}{1+13a} - \dots \quad (21)$$

acelera la convergencia de (17). Las convergentes $\{\frac{R_n}{S_n}\}$ de esta última expansión satisfacen las relaciones

$$\begin{cases} R_n = [1+(4n-3)a] R_{n-1} - (2n-3)(2n-2)a^2 R_{n-2} \\ S_n = [1+(4n-3)a] S_{n-1} - (2n-3)(2n-2)a^2 S_{n-2}, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

donde $R_0 = 0$, $S_0 = 1$, $R_1 = 1$ y $S_1 = 1+a$.

Estas relaciones pueden ser usadas también para calcular aproximaciones de $I(\alpha)$ en forma iterativa. En la Tabla IV se muestran estas aproximaciones, y se observa además la aceleración lograda para el caso $\alpha = 0.1$ (última columna).

Tabla IV.: APROXIMACIONES A $I(\alpha)$ PARA $\alpha < 1$ CON ACELERACION DE LA CONVERGENCIA.

	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.1$
0.7272727273	0.8000000000	0.8888888888	0.9523809524	
0.7829787234	0.8372093023	0.9048478261	0.9560229446	
0.7923831178	0.8416833667	0.9052517596	0.9560844787	
0.7946155659	0.8424857500	0.9053400119	0.9560865049	
0.7952633158	0.8426678797	0.9053517147	0.9560866056	
0.7954786207	0.8427163933	0.9053536298	0.9560866128	
0.7955576908	0.8427309307	0.9053539953	0.9560866129	
0.7955890579	0.8427357036	0.9053540743	0.9560866129	
0.7956022964	0.8427373901	0.9053540932		
0.7956081768	0.8427380234	0.9053540980		
0.7956109041	0.8427382737	0.9053540994		
0.7956122166	0.8427383771	0.9053540998		
0.7956128690	0.8427384215	0.9053540999		
0.7956132025	0.8427384412	0.9053540999		
0.7956133774	0.8427384502	0.9053541000		
0.7956134712	0.8427384545	0.9053541000		
0.7956135226	0.8427384565			
0.7956135512	0.8427384575			
0.7956135675	0.8427384580			
0.7956135769	0.8427384583			
0.7956135823	0.8427384584			
0.7956135856	0.8427384585			
0.7956135875	0.8425384585			
0.7956135887				
0.7956135894				
0.7956135899				
0.7956135902				
0.7956135903				
0.7956135904				
0.7956135905				
0.7956135906				
0.7956135906				
0.7956135906				
$I(\alpha)$	0.7956135906	0.8427384585	0.9053541000	0.9560866129

Como conclusión de este trabajo podemos decir que los métodos expuestos muestran ser eficientes y cubren todo el rango de valores de α . Conviene mencionar que todos los cálculos fueron efectuados usando una calculadora programable TI-S9. Obviamente, el empleo de una máquina más sofisticada permitirá obtener una mayor exactitud en los resultados a la vez que un consumo de tiempo de computación considerablemente menor. El problema de aplicación planteado aquí queda resuelto para todos los valores de las variables de operación con resultados exactos.

REFERENCIAS.

- [1] Danchwerts, P.V., "The Effect of Incomplete Mixing on Homogeneous Reactions". Chem. Eng. Sci., 9, 93-102 (1958).
- [2] Levenspiel, O., "Chemical Reaction Engineering". 1era. edición. John Wiley. New York. 1967.
- [3] Abramowitz, M. y Stegun, I. (editores). "Handbook of Mathematical Functions". Dover Publications, Inc., New York, U.S.A. (1970).
- [4] Rojo, O., "Cuadratura Extendida de Gauss-Legendre". Revista "Proyecciones", Departamento de Matemáticas, U. del Norte, Año 2; N° 4, Julio 1983.
- [5] Shepherd, M.M., Laframboise, J.G., "Chebyshev Approximation of $(1+2x) \exp(x^2) \operatorname{erfc} x$ in $0 \leq x < \infty$ ". Mathematics of Computation, Volume 36, Number 153, Pages 249-253, January 1981.
- [6] Khovanskii, A.N., "The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory". Groningen, Tge Netherlands: P. Noordhoff, N.V., 1963.
- [7] Snyder, M.A., "Chebyshev Methods in Numerical Approximation", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966.