DOI: 10.22199/S07160917.1983.0006.00003

REVISTA PROYECCIONES Nº 6: 51-65.
DICIEMBRE 1983.

COMENTARIOS SOBRE UNA DEFINICIÓN PARA "VALOR DE INFORMACIÓN EN JUEGOS"

ARNOLDO PRADO C.*

INTRODUCCION.

MODELO BIPERSONAL.

La estructura más simple de un juego bipersonal de suma cero es $\{X, Y, \pi\}$, donde X e Y son conjuntos finitos de cardinalidad n y m cuyos elementos se denominan estrategias puras de los jugadores I y II, respectivamente y π una función definida sobre X x Y con valores en $\mathbb{R}$. El juego se desarrolla así: I escoge un elemento x en X y II escoge un elemento y en Y, independientemente de I. Como resultado de estas acciones a I se le asigna el valor $\pi(x, y)$ y a II el valor $-\pi(x,y)$. Estos valores se denominan pagos a los jugadores respectivos y π se de-

----

* Profesor Depto. Matemáticas, Facultad de Ciencias. Universidad del Norte.

nomina función de pago.

Se interpreta $\pi(x, y)$ como el monto o "ganancia" que recibe I de parte de II. Así, $-\pi(x, y)$ es la "pérdida" de II.

Para un juego de esta naturaleza, el criterio minimax recomienda como comportamiento racional de cada jugador el siguiente:

El jugador I conociendo los conjuntos X e Y escoge en X el elemento x^* tal que

$$(\forall\, y \in Y)\ (\pi(x^*, y) \geqslant \max_{x \in x} \min_{y \in Y} \pi(x, y) = v)$$

El jugador II independientemente de la elección de I y en conocimiento de los conjuntos X e Y escoge la estrategia $y^* \in Y$ tal que

$$(\forall\, x \in x)\ (\pi(x, y^*) \leqslant \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \pi(x, y) = w)$$

En el caso que $v = w$ se tendrá obviamente,

$$\pi(x^*, y^*) = \max_{x} \min_{y} \pi(x, y) = \min_{y} \max_{x} \pi(x, y).$$

El par (x^*, y^*) se denomina punto de equilibrio en estrategias puras.

Como es sabido los puntos de equilibrios en estrategias no siempre existen. En tales casos se introduce el concepto de estrategias mixtas, las cuales son distribuciones de probabilidades sobre los conjuntos X e Y respectivamente. Esto es, p es una estrategia mixta del jugador I si p es una n-upla de números p_x, tales que:

$$(\forall\, x \in X)\ (p_x \geq 0) \quad y \quad \sum_x p_x = 1$$

Análogamente para el jugador II. El criterio de racionalidad minimax se expresa ahora en términos inf - sup de la siguiente forma: p* es una estrategia mixta óptima para el lugador I si

$$(\forall\, q)\,(\sum_{x,y} \pi(x, y)\, p^*_x\, q_y \geq \sup_p \inf_q \sum \pi(x, y)\, p_x q_y = v')$$

Análogamente para el jugador II q* es óptima en estrategias mixtas si

$$(\forall\, p)\ (\sum_{x,y} \pi(x, y)\, p_x q^*_y \leq \inf_q \sup_p \sum \pi(x, y)\, p_x q_y = w')$$

Se demuestra (Nash, 1950) que siempre existe al menos un par (p*, q*) tal que

$$v' = \inf_p \sup_q \sum \pi(x, y)\, p^*_x\, q^*_y = \inf_q \sup_p \sum \pi\,(x, y)\, p^*_x\, q^*_y = w'$$

Este par se denomina punto de equilibrio en estrategias mixtas.

Claramente v' es lo mínimo que puede esperar I y - w' es lo máximo que puede esperar II.

Bartoszynsky (1963) propuso introducir en el juego anterior como nuevo elemento el conocimiento parcial de ambos jugadores sobre el uso que hará su contrincante del espacio de estrategias mixtas que dispone. Específicamente si Q es el simplex euclidiano de dimensión m-1, T un subconjunto de Q y C(T) el espacio de las combinaciones lineales convexas de los elementos de T, entonces el jugador I es informado que II escogerá sus estrategias mixtas en T. Análogamente II es informado que I escogerá sus estrategias mixtas en S subconjunto de P que es el simplex de dimensión n-1 y C(S) es el casco convexo de S.

Esta nueva característica permite a los jugadores mejorar sus espectativas en el juego de modo que I puede esperar una ganancia v" no inferior a:

$$v'' = \sup_{p} \inf_{q \in C(T)} \Sigma\, \pi(x, y)\, p^*_x\, q_y \geq v'$$

y II puede esperar una pérdida no superior a:

$$w'' = \inf_{q} \sup_{p \in C(S)} \Sigma\, \pi(x, y)\, p_x\, q^*_y \leq w'$$

En estas condiciones Bartoszynsky define las cantidades H_1 (T) y H_2(S) como las diferencias:

$$H_1(T) = v'' - v' \geq 0$$

$$H_2(S) = w' - w'' \geq 0$$

y a las cuales denomina genéricamente "valor de información". Es claro que H_1 y H_2 permiten un análisis de las estrategias mixtas en términos de los óptimos minimax.

En las hipótesis de Bartoszynsky la información que reciben ambos jugadores es plenamente confiable, esto es I está seguro que II escogerá sus estrategias mixtas en C(T) y II a su vez está seguro que I escogerá sus estrategias en C(S). Naturalmente esta hipótesis de la plena seguridad puede ser generalizada de modo que la información recibida es efectiva sólo con una cierta probabilidad. Además, puede ampliarse el número de jugadores y aún combinar ambas generalizaciones , esto es considerar un modelo de juego n-personal con "valor de información" no plenamente confiable.

2.- MODELO GENERALIZADO.

Puede argumentarse que introducir el concepto de información previa invalida el criterio de racionalidad minimax para uso de los jugadores. Sin embargo, puede haber situaciones reales en que el criterio minimax adquiere el sentido de una caracterización de los jugadores; esto es, puede haber casos en que sólo algunos jugadores sean típicamente "jugadores minimax" o "conservadores", mientras que otros pueden ser abiertamente agresivos y, por lo tanto, optan por estrategias mixtas que consideran estrategias puras que les aportan mayores ventajas. Obviamente, un comportamiento de esta naturaleza lleva implícito el carácter reservado de la información; esto es, cada jugador ignora que sus contrincantes saben que él escogerá sus estrategias mixtas, optimizando sobre el supuesto que todos ellos actuarán con el criterio minimax. Así, por ejemplo, el juego definido en el cuadro adjunto, el criterio minimax aconseja a I escoger p* y a II q* tales que:

I \ II	Y_1	Y_2
X_1	1	0
X_2	-1	2

$p^* = (3/4, 1/4)$ y $q^* = (1/2, 1/2)$ forman un punto de equilibrio.

En este ejemplo el jugador II parte del supuesto de que I usará la estrategia del óptimo y por lo tanto, acepta que I realizará la lotería:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & , & 1/4 \\ x_1 & , & x_2 \end{pmatrix}$$

Bajo este supuesto, II en lugar de realizar la lotería

$$\begin{pmatrix} 1/2 & , & 1/2 \\ y_1 & , & y_2 \end{pmatrix}$$

escoge y_1, pues con probabilidad 1/4 puede "ganar" 1 $(1 = -(-1))$ y con probabilidad 3/4 pagar 1. Incluso aceptar la realización de las loterías se tendría la siguiente lotería conjunta:

$$\begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Obviamente, si II opta por y_2 arriesga con probabilidad 1/8 pagar 2 unidades que comparada con la probabilidad 1/8 de ganar 1 empleando la estrategia 1, se refuerza la justificación de II de optar "racionalmente" por y_1.

El ejemplo pone, pues, de manifiesto los verdaderos alcances de la información adicional. Es evidente que cada jugador sólo conoce la información sobre lo que harán sus contrincantes pero no sabe que éstos saben lo que él sabe. En estas condiciones, conviene introducir la siguiente definición general:

Sea $(S_1, S_2, \ldots. S_n; U_1, U_2, \ldots.. U_n; P_1, P_2, \ldots.P_n)$ un juego n-personal en una etapa.

El significado de cada símbolo es el siguiente. Para cada $i=1,\ldots,n$, S_i es un conjunto finito denominado conjunto de las estrategias puras del jugador i; U_i es una función definida sobre $S_1 \times S_2 \times \ldots\ldots \times S_n$ y con valores reales, se denomina función de pago del jugador i, se interpreta como el valor que percibe i cuando cada jugador realiza una elección de estrategias puras; P_i es un espacio de probabilidades definidas sobre el respectivo espacio medible (S_i,F_i) con F_i σ-álgebra definida sobre S_i. Se supone además, que cada U_i es F_i - medible.

En este contexto el concepto de equilibrio en estrategias puras se expresa así: $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots\ldots s_n^*)$ con $s_i^* \in S_i$ es un punto de equilibrio en estrategias puras si:

$$(\forall i)\ (\forall r_i \in S_i)\ (U_i(s_1^*,\ldots\ldots,s_i^*,\ldots\ldots s_n^*) \geq U_i(s_1^*,\ldots\ r_i,\ldots s_n^*))$$

Análogamente $p^* = (p_1^*,\ldots\ldots p_i^*,\ldots\ldots p_n^*)$, $p_i^* \in P_i$ es un punto de equilibrio en estrategias mixtas si

$$(\forall_i)(\forall p_i)\ \{E[U_i(s_1,\ldots\ldots s_i,\ldots\ldots s_n) \mid (p_1^*,\ldots\ldots p_i^*,\ldots\ p_n^*)] = E[U_i(s) \mid p^*]$$

$$= \int_{S_1 x\ldots x S_n} U_i(s_1,\ldots s_i\ldots s_n)\ p^*\ (ds) \geq E]U(s) \mid p_1^*,\ldots p_i,\ldots p_n^*]$$

Esto es, p* es punto de equilibrio en estrategias mixtas si para cada jugador, p* maximiza la función de pago respectiva.

De acuerdo al teorema de Nash, p* siempre existe. A partir de este hecho, el concepto de "valor de información" se formula en los siguientes términos:

Sean $P_i \subset P_i$ subconjuntos de los espacios de probabilidades P_i y C (P_i) los casos convexos de los correspondientes P_i. Sean:

$$P' = P'_1 \times \ldots\ldots \times P'_n$$

$$\tilde{P}_i = P'_1 \times \ldots\ldots \times P'_{i-1} \times P_i \times P_i \times P'_{i+1} \times \ldots\ldots \times P'_n$$

Entonces se llama "valor de información" para el jugador i, cuando es informado que sus n-1 contrincantes escogerán sus estrategias mixtas sobre sus respectivos casos C (P_i), al valor:

$$I_i(\tilde{P}_i) = \max_{p \in C(\tilde{P}_i)} E\,[U_i(s) \mid p] - E\,[U_i(s) \mid p^*]$$

donde,

$$C(\tilde{P}_i) = C\,(P'_1) \times \ldots\ldots \times C\,(P_i) \times \ldots\ldots \times C\,(P'_n)$$

En realidad, la operación para maximizar el segundo término, considera únicamente el espacio P_i, pues los espacios $C(P'_j)$, $j \neq 1$, según se verá a continuación, se reducen a puntos conocidos en cada uno de ellos.

Obviamente, se supone que los n jugadores tienen un comportamiento racional, esto es, el supuesto básico subyacente en todo el proceso, es que los n jugadores procuran optimizar sus respectivos pagos. Ciertamente los valores $U_i(s)$, $i = 1, \ldots\ldots, n$, $s \in S$, representan un verdadero resumen de una serie de operaciones, las cuales para los efectos del análisis del juego, se reducen a lo que cada jugador cancela a sus contrincantes, y lo que él recibe como resultado de la decisión adoptada por cada uno de los jugadores en cuanto a elección de estrategias.

La definición de $I_i(\tilde{P}_i)$ puede significar para el jugador una ventaja adicional, pues es claro que si cada uno de sus contrincantes o al menos algunos de ellos, opta por escoger sus estrategias mixtas solo en un subconjunto de su espacio de estrategias mixtas, es porque sus correspondientes funciones de pago pueden asumir en ellos valores al menos iguales a los que aportan las componentes $(p_1^*, \ldots.\ p_i^*, \ldots.\ p_n^*)$ correspondientes al punto de equilibrio p*. Hay, también, otras explicaciones para este abandono de la hipótesis de racionalidad, por ejemplo, aceptar la posibilidad en algunos jugadores de algún grado de afición al riesgo, es decir, aceptar que sobre la distribución de probabilidad que determina la estrategia mixta que elige el jugador aficionado al riesgo, existe otra distribución que aumenta el "peso" relativo de las estrategias puras, que en su criterio le son más favorables o gozan de su preferencia.

Además, $E\,[U_i(s)\,|\,p^*]$, en cada conjunto P_i, manteniéndose fijas las restantes componentes $p_1^*, \ldots.\ p_{i-1}^*,\ p_{i+1}^*, \ldots.\ p_n^*$, asume su máximo en p_i^*.

Así, para cada valor particular de i = (i = 1,....., n) se debería cumplir que:

$$\max_{p^{(i)} \in P} E\,[U_i(s)\,|\,p^{(i)}] \geqslant E\,[U_i(s)\,|\,p^*]$$

(Ciertamente, cada $p^{(i)}$ depende de U_i).

Así, pues, lo óptimo para el jugador i sería que la información recibida sea precisamente la correspondiente a los conjuntos $P_j' \subset P_j$ en los cuales $E\,[U_i(s)|p]$ asume su máximo valor, es decir:

$$E[U_i(s)\ p \in C(P_1')xC(P_2')x\ldots xC(P_{i-1}')x\ P_i x\ C(P_{i+1}')x\ C(P_{i+2}')x\ldots xC(P_n'] =$$

$$= \max_{p \in P} E\,[U_i(s)|p]$$

Racionalmente i no puede esperar que sus informadores suministren tal información en forma consistente. Es decir, siendo posible que i reciba tal información, no es esperable que ello ocurra inexorablemente. Sin embargo, el jugador i puede esperar que los distintos informadores le indiquen el criterio que usará su contrincante sobre el cual le informan. Tal criterio que tendrá para el jugador i el valor de una certeza, consiste en aceptar que el contrincante j, sobre el cual recibe la información, usará el conjunto $\overset{j}{\hat{P}}_j$ definido por la componente j de la n-upla de estrategias mixtas, en la cual $E\,[U_j(s)|p \in P]$ asume su máximo valor, esto es

$$E\,[U_j(s)|\overset{j}{\hat{p}}_1, \overset{j}{\hat{p}}_2, \ldots, \overset{j}{\hat{p}}_i, \ldots \overset{j}{\hat{p}}_n)] = \max_{p \in P} E\,[U_j(s)|p]\ ,\quad j \neq i$$

Así, aceptando el hecho que los contrincantes de i, o recurren al criterio de racionalidad conservadora empleando sus estrategias de modo de alcanzar el estado de equilibrio dado por la n-upla p*, o emplean los conjuntos $\overset{j}{\hat{P}}_i$ (j = 1,....., n; j $\neq$ i) donde maximizan sus respectivos pagos esperados.

En el contexto del análisis anterior, sean

$$Q_1 = \overset{1}{\hat{P}}_1 \times \overset{1}{\hat{P}}_2 \times \ldots \times \overset{1}{\hat{P}}_i \times \ldots \times \overset{1}{\hat{P}}_n$$

$$Q_2 = \overset{2}{\hat{P}}_1 \times \overset{2}{\hat{P}}_2 \times \ldots \times \overset{2}{\hat{P}}_i \times \ldots \times \overset{2}{\hat{P}}_n$$

$$Q_j = \hat{P}_1^j \times \hat{P}_2^j \times \dots \times \hat{P}_i^j \times \dots \times \hat{P}_n^j$$
$$\vdots$$
$$Q_n = \hat{P}_1^n \times \hat{P}_2^n \times \dots \times \hat{P}_i^n \times \dots \times \hat{P}_n^n$$

los conjuntos que maximizan $E\,[U_j(s) \mid p \in Q_j]$, $j = 1,\dots, n$. Sean $n(i) \leqslant n$ los contrincantes de i que deciden emplear los conjuntos $\hat{P}_j^j$.

En estas condiciones, i decide usar la estrategia mixta p_i^0 tal que p_i^0 maximiza:

$$E\,[U_i(s) \mid p \in \prod_{k=1}^{n(i)} P_k^k \times \prod_{h=1}^{n-n(i)-1} P_h^* \times P_i\,]$$

Es claro que la regla de decisión anterior introduce como nueva condición en la definición del juego n-personal, la obligación para los contrincantes de i, de escoger sus estrategias mixtas en sus conjuntos que conducen al punto (o a los puntos) de equilibrio, o bien escoger sus estrategias de modo de maximizar sus propias funciones de pago, es decir, en símbolos, cada contrincante de i emplea P_j^* o emplea $\hat{P}_j^j$.

Es evidente que la consistencia del modelo así planteado, exige que el caso anterior en la forma resuelta por Bartoszynski, sea un caso particular. Esto es, el modelo de Bartoszynski debe resultar si en el modelo se particulariza para $n = 2$ con $U_1(s) = -\,U_2(s)$.

Esto es, ciertamente, equivalente a probar que el valor de información definido por Bartoszynski coincide con la nueva definición particularizada en el nuevo contexto. Conviene recordar que la función de pago para un juego de suma cero tiene el significado del pago que el jugador 2 hace al jugador 1, después que ambos han decidido sus estrategias. Este significado implica que el comportamiento racional del juga dor 1, sea procurar la maximización del pago esperado, mientras que el jugador procurará minimizar este pago.

Sean S_1 y S_2 los conjuntos de estrategias correspondientes a cada uno de los jugadores. Se supone que S_1 y S_2 tienen las caracte - rísticas que garantizan la existencia de los máximos y mínimos que se indican. (Esto significa, entre otras cosas, que ambos conjuntos sean compactos).

Así pues, se tendrá:

$$s = (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2; \; U_1((s_1, s_2)) = - U_2((s_1, s_2)) = M(s_1, s_2) ,$$

y también

$$\max_{(p_1,p_2)\in P_1 x P_2} E[U_1(s) | (p_1, p_2)] = \max_{(p_1,p_2)\in P_1 x P_2} E[M(s_1, s_2) | (p_1, p_2)]$$

$$\max_{(p_1,p_2)\in P_1 x P_2} E[U_2(s) | (p_1, p_2)] = \max_{(p_1,p_2)\in P_1 x P_2} E[-M(s_1, s_2) | (p_1, p_2)]$$

$$= - \min_{(p_1,p_2)\in P_1 x P_2} E[M(s_1, s_2) | (p_1, p_2)]$$

con lo que los criterios de los puntos de equilibrio para ambos jugado res quedarán reducidos a:

Para el jugador 1, consistirá en maximizar el pago esperado con respecto a las estrategias mixtas en el espacio P_1, condicionada la elección, al hecho cierto que 2 elegirá su respectiva estrategia en el espa cio P_2 para minimizar el pago esperado. En símbolos se tendrá, entonces, que el comportamiento racional de 1, será usar la estrategia p_1^* tal que maximice,

$$\min_{p_2 \in P_2} E\,[M(s_1, s_2) \mid (p_1, p_2)]$$

Análogamente, para 2, el comportamiento racional consistirá en emplear la estrategia mixta p_2^* que minimice la expresión

$$\max_{p_1 \in P_1} E\,[M(s_1, s_2) \mid (p_1, p_2)]$$

Obviamente, el par (p_1^*, p_2^*) existirá si y solo si

$$\max_{P_1} \min_{P_2} E\,[M(s_1, s_2) \mid (p_1, p_2)] = \min_{P_2} \max_{P_1} E\,[M(s_1, s_2) \mid (p_1, p_2)]$$

Esto según el teorema del minimax, ocurre cuando los espacios S_1 y S_2 son finitos, o infinitos para ciertas funciones de pago.

Sea ahora $\hat{P}_2$ el conjunto donde 2 escogerá su estrategia y de este hecho es informado el jugador 1. Entonces, de acuerdo al principio de racionalidad, 1 escogerá su estrategia mixta p_1^* para maximizar la expresión:

$$\min_{p_2 \in C(\hat{P}_2)} E\,[M(s_1, s_2) \mid (p_1, p_2)]$$

Al proceder así, obtiene el valor de información:

$$I_I\,(\tilde{P}_1) = I_I\,(\hat{P}_2) = \max_{p_1 \in P_1}\ \min_{P_2 \in C(P_2)} E\,[M(s_1, s_2) \mid (p_1, p_2)] - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots \quad - \max_{p_1 \in P_1} \; \min_{p_2 \in P_2} \; E\,[M(s_1, s_2) \,|\, (p_1, p_2)]$$

Pero este proceder significa también que 1 maximiza con respecto a la variable p_1 la expresión del óptimo para el jugador 2. En definitiva, la regla de decisión del jugador 1, definida para un juego n-personal, coincide para $n = 2$ con la regla de decisión definida, para el juego bipersonal de suma cero, por Bartoszynski. Análogamente para el jugador 2.

En todo el desarrollo anterior está presente la independencia con que los jugadores deciden sus reglas. Esta es de tal modo, que subyacente a todo el proceso está la "lealtad" del informador con respecto a quien informa, pues ningún jugador sabe lo que saben sus contrincantes de la decisión que él asumirá. Es claro que tal restricción puede modificarse de varios modos, y cada nuevo caso conducirá o deberá conducir a un modelo más general.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BARTOSZYNSKY, R.: "On a Certain Concept of Value of Information in Games". Transactions of Third Prague Conference on Information Theory. Praga, 1963.

[2] PRADO, A.: "Enfoque bayesiano para el valor de información en juegos". Tesis doctoral. Universidad de Madrid. 1982.

[3] SELTEN, R.: "Reexamination of the Perfectuess Concept for Equilibrium Points in Extensive Games". International Journal of Game Theory. Vol. 4, Issue 1. Physica Verlag. Viena, 1974.