DOI: 10.22199/S07160917.1983.0006.00001

REVISTA PROYECCIONES Nº 6: 3-10.
DICIEMBRE 1983.

TOPOLOGÍA COMPACTO-ABIERTA EN C(X,E)[§]

SAMUEL NAVARRO H.*

PRELIMINARES.

En nuestro trabajo $(F, \|)$ representa un cuerpo con un valor absoluto. En cada oportunidad indicaremos si F es real, complejo u otro. X representa un espacio topológico completamente regular Hausdorff.

E representa un espacio vectorial topológico sobre F localmente convexo. C(X,E) representa el espacio de funciones contínuas de X en E. Si $E = \mathbb{F}$ se anota C(X) en lugar de C(X,F).

Definición.

La topología en C(X;E), donde una base de vecindades del origen está dada por los conjuntos M(K,U)

---

§ Charla dictada en las 2° JORNADAS DE MATEMATICAS, UNIVERSIDAD DEL NORTE. Agosto 1983.

* Profesor Depto. Matemática y Ciencia de la Computación. Facultad de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile.

$$M(K;\ U) = \{f \in C(X;\ E)\ /\ f(K) \subseteq U\}$$

con $K \subseteq X$ compacto, y $U \subseteq E$ vecindad de 0, se llama topología Compacto-Abierta o topología de la convergencia compacta (τ_c).

Otra forma de describir la topología compacto-abierta es a través de las seminormas.

$$\|f\|_{K,P} = \sup_K p\ (f(x))$$

donde $K \subseteq X$ es compacto y p es una seminorma contínua sobre E.

I. CASO NORMADO Y METRIZABLE.

Si X es compacto entonces se observa por la caracterización vía seminormas que la topología τ_c proviene de una única seminorma

$$\|f\|_{X,||} = \sup_X |f(x)|$$

que llega a ser una norma. Luego $(C(X),\ \tau_c)$ es normado si X es compacto. Esto también se puede observar en la primera caracterización de la τ_c, al analizar la vecindad $M(X,\ B_1)$, (B_1 , bola unitaria de F) que resulta acotada. Arens [1] en 1946 probó el siguiente

<u>Teorema</u>:

$C_c(X)$ es metrizable ssi X es hemicompacto.

Recordemos que un espacio topológico es hemicompacto si existe en X una familia fundamental enumerable de compactos.

II. ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

En 1946, Mackey [5] definió los espacios localmente convexos bornológicos como una extensión de los espacios normados, y en 1951, Bourbaki [2] definió los espacios tonelados (especie de extensión de los espacios de Banach).

El problema que existía planteado por Dieudonné en 1953, era si todo tonelado era bornológico y si todo bornológico completo era tonelado. La respuesta a esto último es afirmativa, y es una consecuencia del teorema de Banach- Steinhauss; en cambio, el primer problema tiene respuesta negativa. La respuesta fue dada por Nachbin en 1954 [8] donde no sólo dio un gran aporte a la teoría de espacios vectoriales topológicos sino al estudio de los espacios de funciones contínuas, Nachbin probó:

Teorema:

$C(X)$ es tonelado si y solamente si para cada $S \subseteq X$ cerrado no compacto existe $f \in C(X)$ tal que $f(S)$ no es acotado.

Para el caso bornológico Nachbin probó:

Teorema:

$C_c(X)$ es bornológico ssi X es uniformemente completo respecto a la uniformidad más débil sobre X que hace cada $f \in C(X)$ una función uniformemente contínua.

Esta característica de espacios topológicos dio origen a los posteriormente llamados espacios de Hewitt- Nachbin, ver Weir [12], también conocidos como Q-espacios, saturados y otros.

Con un no trivial ejemplo, obtenido del trabajo de Gillman y

Henriksen [3], publicado en 1954, Nachbin mostró que existen espacios tonelados no bornológicos.

Las demostraciones de los teoremas fueron un verdadero aporte para el desarrollo de la teoría de la Dualidad y del estudio de estructuras.

Inspirado en los trabajos de Nachbin, Warner [11] en 1958 mostró que:

Teorema:

C(X) es completo si y solamente si C(X) es casi completo si y solamente si X es un k_r-espacio.

El resultado de Warner y el de Arens permiten mostrar que:

Proposición:

C(X) es Frechet si y solamente si X es hemicompacto y es un k-espacio.

Resultados sobre infratonelados, DF-espacio, espacio de Montel, espacio de Schwartz, etc., fueron obtenidos hasta 1960 donde el problema en el caso escalar real o complejo estaba resuelto.

Posteriores investigaciones se centraron en el espacio de funciones con valores en un espacio vectorial topológico, espacio de Hilbert, de Banach o más generalmente, espacios localmente convexos.

El problema en el caso C(X,E) es obtener condiciones sobre X y sobre E para clasificar el espacio $C_c(X; E)$. Como ilustraciones de los estudios que se realizan, presentamos el caso tonelado.

Conjetura: $C_c(X,E)$ es tonelado si, solamente si $C_c(X)$ y E son tonelados.

Schmets [9] mostró que la condición es necesaria: La demostración de Schmets es específica para el caso tonelado, sin embargo, Hollstein [4] en 1981 dio una demostración general, válida para cualquier tipo de espacio localmente convexo que sea invariante bajo formación de cuocientes separados.

Para el recíproco se tiene que:

Proposición:

Si X es compacto y E es Banach, entonces

C(X,E) es Banach, luego tonelado.

Un resultado un poco más general es

Proposición:

C(X) es Banach y E es Frechet, entonces

C(X; E) es tonelado.

El trabajo de Schmets tendió a debilitar las hipótesis sobre X (era compacto en los dos casos anteriores) y consiguió el siguiente resultado:

Teorema:

Si C(X) es tonelado y E es Frechet, entonces

C(X; E) es tonelado.

En 1978, Susan Dierolf dio un contraejemplo mostrando que la

conjetura era falsa. El ejemplo usaba C(X) Banach y E un l.c., naturalmente no Frechet. Después del ejemplo de Dierolf el interés se centró en las condiciones para E. Mujica [7] en 1978 mostró que:

Teorema:

Si $C_c(X)$ es Banach y E es el límite inductivo estricto, compactamente regular de una sucesión $\{E_n\}_n$ creciente de espacios de Banach, entonces

$C_c(X,E)$ es el límite inductivo de $\{C_c(X,E_n)\}_n$

Como $C(X, E_n)$ es tonelado y el límite inductivo de tonelados es tonelado entonces C(X,E) es tonelado.

El mismo Mujica mejoró este resultado y obtuvo:

Teorema:

Si C(X) es Banach y E es el límite inductivo compactamente regular de una sucesión creciente de localmente convexos, entonces

$$C(X;E) = \lim_{\rightarrow} C(X,E_n)$$

Por una sugerencia de Schmets al resultado de Mujica se puede obtener una generalización.

Teorema:

Si X es W-compacto y $E = \lim E_n$ donde (E_n) es una sucesión creciente de Frechet, entonces

$C_c(X;E)$ es tonelado.

En 1982 un resultado de Mendoza [6] cambió el tipo de investigación. Él probó :

Teorema:

Si $C_c(X)$ y $C_c(\beta X,E)$ son tonelados entonces

$C(X;E)$ es tonelado.

La investigación en este momento es conseguir resultados debilitando las condiciones sobre E manteniendo para X la condición de ser un espacio compacto.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Arens, R. A topology for spaces of transformations. Ann of Math,47 (1946), 480- 495.

[2] Bourbaki N., Ann. Inst. Fourier, 2 (1951) 5- 16.

[3] Gillman, L.- Henriksen, Trans. Am. Math. Soc., 77 (1954) 340- 362.

[4] Hollstein, R. Permanence properties of C(X,E) (to appear).

[5] Mackey, G. Trans. Am. Math. Soc., 60, (1946), 519- 537.

[6] Mendoza, J., Algunas propiedades de $C_c(X,E)$ (por aparecer).

[7] Mujica, J., Spaces of continuous functions with values in an inductive limit, Functional Analysis, Holomorphy and Approx. theory (G. Zapata Ed.) Marcel Dekker N.Y. (to appear).

[8] Nachbin, L., Topological vector spaces of continuous functions, Proc. Mat. A. Sci. U.S.A., 40, 1954, 471- 474.

[9] Schmets, J., Bornological and ultrabornological C(X,E) spaces, Manuscripta Math., 21, (1977), 117 - 133.

[10] Schmets, J., An example of the barrelled spaces associated to C(X;E) (to appear).

[11] Warner, S., The topology of compact convergence on continuous function spaces, Duke Math. J. 25 (1958), 265 - 282.

[12] Weir, M., Hewwitt-Nachbin Spaces. Math. Studies N° 17. North Holland. 1975.