ESPACIOS DE PROBABILIDADES INDUCIDOS POR FUNCIONES

ENRIQUE RAMOS MEZA. (*)

RESUMEN.

Se estudia el traslado de un espacio de probabilidades, en el sentido de Kolmogorof, a un conjunto cualquiera a través de una función f . El conjunto puede ser el espacio de partida o llegada de dicha función generando así los espacios de probabilidad "Inicial" y "Final" respectivamente, inducidos por f . Generar el espacio de probabilidad final no constituye problema alguno, no ocurriendo igual cosa con la situación dual, en donde para trasladar la función de probabilidad hasta el conjunto (espacio de partida de f) se requiere del concepto de función "casi epiyectiva", con lo cual se soluciona el problema.

ESPACIOS DE PROBABILIDADES DE KOLMOGOROF.

Se entiende por un espacio de probabilidades de Kolmogorof, un trío de la forma $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; en donde Ω es un conjunto no vacío llamado "Espacio Muestral", $\mathcal{F}$ una σ -álgebra de conjuntos para Ω . O sea, se cumple :

(*) Master en Estadística Matemática.

Profesor Depto. Matemáticas U. del Norte

$$(a) \quad \phi \in \mathcal{F}$$

$$(b) \quad \text{Si } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \in \mathcal{F},$$

$$(c) \quad \text{para } \{A_n / n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}, \text{ se tiene:} \quad (1)$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$

Los elementos de $\mathcal{F}$ son interpretados como "sucesos". Finalmente $\mathbb{P}$ es una función real valorada sobre $\mathcal{F}$, llamada "función de probabilidad" que satisface las tres condiciones siguientes:

$$(a) \quad \mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$$

$$(b) \quad \text{para toda familia disjunta}$$

$$\{A_n / n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F} \quad (2)$$

se tiene:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

$$(c) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

O sea, se trata de una medida finita y normalizada sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

ESPACIO DE PROBABILIDAD FINAL.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un Espacio de probabilidades en el sentido de Kolmogorof. Si $\mathbb{E}$ es cualquier conjunto y $f = \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ una función cualesquiera, la estructu-

ra $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede ser trasladada hacia $\mathbb{E}$ mediante f . Para esto basta considerar una σ -álgebra sobre $\mathbb{E}$, que haga de f una función medible, y una medida de probabilidad definida sobre el espacio medible formado. La σ -álgebra se llama " σ -álgebra final" y la probabilidad "Probabilidad Final"; inducida por f respectivamente.

CONSTRUCCIÓN DE LA σ -ALGEBRA FINAL.

Se define la siguiente colección de conjuntos:

$$\mathcal{F}^f = \{ \mathcal{E} \subseteq \mathbb{E} / f^{-1}(\mathcal{E}) \in \mathcal{F} \} \quad (3)$$

que cumple (a), (b), y (c) de (1); o sea, $\mathcal{F}^f$ es, una σ -álgebra de conjuntos para $\mathbb{E}$. $\mathcal{F}$ es llamada " σ -álgebra Final" inducida por f ; y es la mayor σ -álgebra que hace de f una función medible.

Se demuestra a continuación que $\mathcal{F}^f$, es, efectivamente una σ -álgebra para $\mathbb{E}$.

- (a) Como $f^{-1}(\mathbb{E}) = \Omega$, y $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$ se tiene que:

$$[f^{-1}(\mathbb{E})]^c = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{F}. \text{ Es decir}$$

$$\emptyset \in \mathcal{F}^f.$$

- (b) Si $\mathcal{E} \in \mathcal{F}^f$, $f^{-1}(\mathcal{E}) \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es σ -álgebra, se tiene: $[f^{-1}(\mathcal{E})]^c \in \mathcal{F}$.

$$\text{O sea, } \mathcal{E}^c \in \mathcal{F}^f.$$

- (c) Sea $\{A_n / n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}^f$, es decir

$$f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}^f, \forall n \in \mathbb{N}$$

Nuevamente, como $\mathcal{F}$ es σ -álgebra resulta:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}, \text{ de donde:}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}^f.$$

La maximilidad de $\mathcal{F}^f$ es clara. Basta considerar la función medible $f = (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega^*, \mathcal{F}^*)$. Entonces para todo conjunto en $\mathcal{F}^*$, digamos A , se tiene que $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, luego, $A \in \mathcal{F}^f$. O sea, $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}^f$.

CONSTRUCCION DE LA FUNCION DE PROBABILIDAD FINAL.

Defínase la siguiente medida sobre $(\mathbb{E}, \mathcal{F}^f)$.

$$\mathbb{P}^f(\mathcal{E}) = \mathbb{P}[f^{-1}(\mathcal{E})], \forall \mathcal{E} \in \mathcal{F}^f \quad (4)$$

que cumple (a), (b) y (c) de (2). O sea, es una medida de probabilidad finita y normalizada sobre el espacio medible $(\mathbb{E}, \mathcal{F}^f)$ llamada "Función de probabilidad Final" inducida por f .

Se demuestra ahora que efectivamente $\mathbb{P}^f$ es una medida de probabilidad.

$$(a) \text{ Como } \mathbb{P}[f^{-1}(\mathcal{E})] \geq 0, \forall f^{-1}(\mathcal{E}) \in \mathcal{F},$$

$$\text{es inmediato que } \mathbb{P}^f(\mathcal{E}) \geq 0, \forall \mathcal{E} \in \mathcal{F}^f.$$

(b) Sea la colección disjunta $\{A_n/n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}^f$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^f \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \mathbb{P} \left[f^{-1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1} (A_n) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left[f^{-1} (A_n) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^f (A_n) \end{aligned}$$

(c) Puesto que $f^{-1} (\mathbb{E}) = \Omega$, es claro

$$\text{que } \mathbb{P}^f (\mathbb{E}) = 1$$

CONCLUSION.

Para $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{E} ; (\mathbb{E}, \mathcal{F}^f, \mathbb{P}^f)$ se llama "Espacio de probabilidad final" inducido por la función f . Dicho nombre se debe a que la estructura se forma en el espacio de llegada de f . De importancia resulta el caso $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F}^f = \beta$ donde β denota la σ -álgebra de conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$; pues f , en este caso, es llamada "Variable estocástica" y permite aplicar el cálculo matemático a la teoría de la Probabilidad. De igual interés resultan los casos $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{E} = \mathbb{C}$.

ESPACIO DE PROBABILIDAD INICIAL.

Se considera ahora la función $f : \mathbb{E} \rightarrow \Omega$. El objetivo será trasladar la estructura $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ median

te f hasta $\mathbb{E}$. O sea, se trata del caso dual al presentado anteriormente.

Resulta aquí, que la estructura $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sólo puede ser trasladada parcialmente hasta $\mathbb{E}$. Obtener una σ -álgebra para $\mathbb{E}$ inducida por f no presenta problemas, sin embargo, la medida $\mathbb{P}$ no puede ser llevada a $\mathbb{E}$, a menos que se introduzca una condición adicional a f . Tal condición consiste en imponer que f sea "casi-epiyectiva"; tal como se indica en el comienzo de estas notas.

CONSTRUCCION DE LA σ -ALGEBRA INICIAL.

Se define la siguiente colección de conjuntos:

$$\mathcal{F}_f = \{ f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{E} / \mathcal{E} \in \mathcal{F} \} \quad (5)$$

que cumple (a), (b) y (c) de (1). O sea, $\mathcal{F}_f$, es una σ -álgebra de conjuntos para $\mathbb{E}$. $\mathcal{F}_f$ es llamada " σ -álgebra inicial" inducida por f y es la menor σ -álgebra que hace de f una función medible.

Se demuestra a continuación que $\mathcal{F}_f$ es una σ -álgebra para $\mathbb{E}$.

(a) Ya que $\Omega \in \mathcal{F}$, entonces $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{F}_f$.

Pero como $f^{-1}(\Omega) = \mathbb{E}$, resulta

$$f^{-1}(\Omega) = \mathbb{E} \quad \text{O sea, } \mathbb{E} \in \mathcal{F}_f.$$

(b) Si $A \in \mathcal{F}_f$; existe $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$, tal que

$$f^{-1}(\mathcal{E}) = A. \quad \text{Como } \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra,}$$

$\mathcal{E}^c \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $f^{-1}(\mathcal{E}^c) \in \mathcal{F}_f$,

de donde $[f^{-1}(\mathcal{E})]^c \in \mathcal{F}_f$. O sea

$A^c \in \mathcal{F}_f$.

(c) Sea $\{A_n / n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}_f$. O sea, existen

$\mathcal{E}_n \in \mathcal{F}$ tal que $A_n = f^{-1}(\mathcal{E}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra, resulta

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n \in \mathcal{F}$. O sea,

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_f$

La minimalidad de $\mathcal{F}_f$ es clara. Basta considerar la función medible $f : (\Omega^*, \mathcal{F}^*) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$, entonces para todo A , conjunto en $\mathcal{F}$, se tiene $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}^*$. De donde $\mathcal{F}_f \subseteq \mathcal{F}^*$.

Veamos ahora el problema de dotar al espacio medible $(\mathbb{E}, \mathcal{F}_f)$ de una medida de probabilidad apropiada, inducida por la función f . Para tal efecto tomamos f epiyectiva, excepto en un conjunto de medida cero (o sea, que exista $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = 0$, tal que $f^{-1}(\mathbb{E})^c \subseteq \mathcal{E}$). Tales funciones son llamadas "funciones casi-epiyectivas".

Un resultado importante y de mucha utilidad en el logro de este objetivo es el siguiente: Si $\mathcal{E}$ es un conjunto en $\mathcal{F}$ de medida cero, entonces para $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ en $\mathcal{F}$ que cumplan $f^{-1}(\mathcal{E}_1) = f^{-1}(\mathcal{E}_2)$, se tiene $\mathcal{E}_1 \Delta \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}$

donde Δ denota "diferencia simétrica". Esto conduce a que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1 \Delta \mathcal{E}_2) = 0$. O sea, $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2)$ obteniendo finalmente $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_2)$. (*).

CONSTRUCCION DE LA FUNCION DE PROBABILIDAD INICIAL.

Se define la siguiente medida de probabilidad sobre $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{P}_f [f^{-1}(\mathcal{E})] = \mathbb{P}(\mathcal{E}), \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{F} \quad (6)$$

que gracias al resultado anterior cumple con (a), (b) y (c) de (2). O sea, es una medida de probabilidad finita y normalizada sobre el espacio medible $(\mathbb{E}, \mathcal{F}_f)$ llamada "Función de probabilidad inicial" inducida por f .

Se demuestra a continuación que $\mathbb{P}_f$ efectivamente es una función de probabilidad:

(a) Para cualquier $A \in \mathcal{F}_f$, existe $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ tal

que $A = f^{-1}(\mathcal{E})$. Luego $\mathbb{P}_f(A) = \mathbb{P}(\mathcal{E})$

y como $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \geq 0$ resulta $\mathbb{P}_f(A) \geq 0$.

(b) Sea $\{A_n / n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}_f$ disjunta. O

sea, existen $\mathcal{E}_n \in \mathcal{F}$ tal que :

$A_n = f^{-1}(\mathcal{E}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que

$\mathcal{E}_n \cap \mathcal{E}_m \subseteq [f(\mathbb{E})]^c$. Construyen

do conjuntos $\mathcal{E}'_n$, mediante:

$$\mathcal{E}'_k = \begin{cases} \mathcal{E}_1 & , \text{ Si } k = 1 \\ \mathcal{E}_k - \bigcup_{n=1}^{k-1} \mathcal{E}_n & , \text{ Si } k \geq 2 , \end{cases}$$

Se tiene $\{ \mathcal{E}'_n / n \in \mathbb{N} \}$ disjuntos y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}'_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$.

Usando (*) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_f \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \mathbb{P}_f \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1} (\mathcal{E}'_n) \right] \\ &= \mathbb{P}_f \left[f^{-1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}'_n \right) \right] \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}'_n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P} (\mathcal{E}'_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_f (A_n) \end{aligned}$$

$$(c) \quad \mathbb{P}_f (E) = \mathbb{P}_f \left[f^{-1} (\Omega) \right] = \mathbb{P} (\Omega) = 1$$

CONCLUSION.

Para $f : E \rightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la estructura $(E, \mathcal{F}_f, \mathbb{P}_f)$ se llama "Espacio de probabilidad inicial" inducido por f , pues su formación se logra en el espacio de partida de f . Adjuntando a este resultado el anterior, podemos decir que se ha cumplido el objetivo trazado.

BIBLIOGRAFIA.

- J. GONZALEZ.: "Teoría de Probabilidades". U.T.E. Facultad de Ciencias Santiago. (1976).
- J. GONZALEZ.: "Seminario de Procesos Estocásticos", U.T.E. Facultad de Ciencias, Santiago, (1977).
- J. MICHELOW.: "Topología". U.T.E. Facultad de Ciencias Santiago.
- E. MARTINEZ.: "Seminario teoría de la medida". U. de Chile Sede Antofagasta, Departamento Matemáticas. (1980).