Proyecciones
Vol. 19, N° 1, pp. 95-104, May 2000
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile
DOI: 10.4067/S0716-09172000000100007

LES VARIETES BIRIEMANNIENNES

HASSIMIOU DIALLO
Ecole Normale Supérieure, Francia

Abstract

Let be a complete manifold with a "parallel" foliation . We show that if this foliation and its orthogonal foliation admit eache one an "unisection", then the manifold is riemannian product of transverses leaves.

1. Introduction

En se plaçant dans le cadre d'une variété riemannienne $(M, \mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp}, g)$ munie de deux feuilletages transversalement orthogonaux, Blumenthal-Hebda a établi que si $\mathcal{F}$ est riemannien et la variété complète connexe alors son revêtement universel $\tilde{M} = \tilde{F} \times \tilde{G}$ où $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ sont des feuilles des feuilletages relevés de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\perp}$ dans $\tilde{M}$.

En termes de cohomologie Codja a établi dans [6], dans le cas compact que la cohomologie de M est le produit tensoriel des cohomologies basiques de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\perp}$.

Aussi $\mathcal{F}$ si est parallèle et la variété complète et 1_ connexe, le théorème de décomposition de Rham [4] affirme que M est un produit riemannien de deux feuilles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\perp}$.

En restant dans ce même cadre, on montre pour l'essentiel que si la variété est connexe complète, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\perp}$ riemanniens et si chaque feuilletage contient une unisection (i. e. une section rencontrant chaque feuille du feuilletage transverse en un seul point) alors M est un produit de deux feuilles transverses.

Dans tout ce qui suivra les objets considérés sont supposés C^{∞} et la variété M connexe.

2. Généralités sur les variétés biriemanniennes

2.1. Définitions et notations :

Une *variété presque produit* (v. p. p) est une variété dont le fibré tangent est somme directe de deux sous-fibrés intégrables non triviaux. Une v. p. p M est canoniquement bifeuilletée et ses feuilletages $\mathcal{F}_i$ sont transverses.

Une section de $\mathcal{F}_i$ est une feuille du feuilletage transverse qui est une sous variété fermée et une section qui coupe chaque feuille en un seul point est appelée *unisection*.

Un *morphisme de v. p. p* et un *isomorphisme de v. p. p* sont respectivement un morphisme et un isomorphisme de variétés qui conservent les feuilletages.

Une variété presque produit $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ munie d'une métrique riemannienne g sera appelée variété biriemannienne (V. B. R) si les $\mathcal{F}_i$ sont relativement à la métrique g riemanniens et orthogonaux.

Une *variété biriemannienne régulière* (V. B. R. R) est une V. B. R admettant deux unisections transverses.

On remarquera que dans une V. B. R les feuilletages sont parallèles et totalement géodésiques.

Avec la formule de Stokes, il est facile de voir que pour une V.B.R compacte sans bord M, la classe de cohomologie de la forme volume de M est le cup-produit des classes de cohomologies basiques de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Ainsi une obstruction à l'existence d'une structure de variété biriemannienne est donnée par le fait qu'une variété biriemannienne compacte(sans bord) dont l'un des feuilletages est de codimension p, a son $p^{ième}$ nombre de Betti non nul.

Pour la suite, si (M, g) est une variété riemannienne et $x \in T_aM, c_x$ désignera la géodésique passant par a avec $\dot{c}_x(0) = x$, et $P_{c_x}(r,t)$ le transport parallèle de $T_{c_x(r)}M$ sur $T_{c_x(t)}M$ le long de c_x , et x_i le projeté de x sur $T\mathcal{F}i$. ξ_i désignera la composante dans $T\mathcal{F}_i$ d'un champ de vecteurs ξ.

2.2. Dans une variété biriemannienne un champ de Jacobi ayant ses conditions initiales dans $T\mathcal{F}_i$ reste dans $T\mathcal{F}_i$. En particulier si $x \in T_aM$, $\forall\ i = 1, 2, T_x exp_a(T_a\mathcal{F}_i) \subset T_a\mathcal{F}_i$

Preuve : Soit Y un champ de Jacobi le long d'une géodésique c tel que $Y(0)$ et $Y\prime(0)$

sont dans $T\mathcal{F}_1$ on a $0 = \bigtriangledown_{\dot{c}} \bigtriangledown_{\dot{c}} Y + R(\dot{c}, Y)\ \dot{c} = \sum_{i=1}^{2} (\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} Y_i + R(\dot{c}, Y_i)\ \dot{c})$

Comme les feuilletages sont parallèles $\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} Y_i + R(\dot{c}, Y_i)\ \dot{c}$ est dans $T\mathcal{F}_i$ et on a alors $\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} Y_i + R(\dot{c}, Y_i)\ \dot{c} = 0\ \ \forall\ i = 1, 2$. Il suit donc $Y_2 = 0$ est un champ de Jacobi le long de c tel que $Y_2(0) = Y_2\prime\ (0) = 0$; alors par le théorème d'existence et d'unicité on a nécessairement $Y_2 = 0$. Y est donc a valeurs dans $T\mathcal{F}_1$. Ensuite si $x \in T_aM(x = ru, r \in \mathbf{R}_+, u$ unitaire) et y $T\mathcal{F}_i$, on sait que $(T_{ru} \exp_a)\,(y) = Z\,(r)$ où Z est le champ de Jacobi le long de la géodésique c_u à conditions initiales $Z\,(0) = 0$ et $Z'\,(0) = \dfrac{y}{r}$. Ces conditions étant dans $T\mathcal{F}$i, d'après ce qui précède on a bien $\forall i = 1, 2$ et xT_aM

$(T_x \exp_a)\ (Ta\mathcal{F}i) \subset T_a\mathcal{F}_i$.

2.3. Soit M une variété biriemannienne (ici non nécessairement complète), $a \in M$. Alors expa est un morphisme de v. p. p d'un voisinage ouvert de l'origine de

$T_aM = T_a\mathcal{F}_1 \times T_a\mathcal{F}_2$ dans M. De façon précise si $u \in T_a\mathcal{F}_1$ et $v \in T_a\mathcal{F}_2$ sont tels que $\exp_a(u)$, $\exp a(v)$, $\exp_a(u+v)$ sont définis alors on a $\exp_a(u+v) = \exp_{c_u(1)}(P_{c_u}(0,1)(v)) = \exp_{c_v(1)}(P_{c_v}(0,1)(u))$

Preuve : Soient u $T_a\mathcal{F}_1$, $v \in T_a\mathcal{F}_2$ tels que $\exp_a(u)$, $\exp_a(v)$, $\exp_a(u+tv)$ soient définis pour tout $t[0,1]$ et $k(t) = expa(u+tv)$, on a d'après [1] (page 90) $k'(t) = T_{u+tv}\exp_a(v) = Y(r)$ où Y est le champ de Jacobi le long de c_{x_t} définie par $Y(0) = 0 \quad Y'(0) = \dfrac{v}{r}$, $u + tv = rx_t$ et x_t unitaire. Comme les conditions initiales sont dans $T_a\mathcal{F}_2$ alors d'après 2.1 $k'(t) = Y(r) \in T_a\mathcal{F}_2$. Par le lemme de Gauss [1] (page 50) on sait aussi que $\exp_a$ est radialement une isométrie. Plus précisément on a $T_{u+tv}\exp_a(u+tv) = P_{c_{u+tv}}(0,1)(u+tv) = P_{c_{u+tv}}(0,1)(u) + tP_{c_{u+tv}}(0,1)(v)$. Il vient alors
$T_{u+tv}\exp_a(u) + tT_{u+tv}\exp_a(v) = P_{c_{u+tv}}(0,1)(u) + t\ P_{c_{u+tv}}(0,1)(v)$. Comme le transport parallèle conserve chacune des distributions et compte tenu de 2.1 il vient par identification que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $T_{u+tv}\exp(v) = P_{c_{u+tv}}(0,1)(v)$. Donc $T_{u+tv}\exp_a$ est une isométrie linéaire *ie* exp $_{a|u+IRv}$ est une isomérie. Puisque $t \to u+tv$ est une géodésique dans $u+\mathbf{R}v$ alors k est une géodésique dans M. On a $k(t) = \exp_{k(0)}(tk'(0)) = \exp_{k(0)}\ (tT_u\exp(v)) = \exp_{k(0)}\ (tP_{cu}(0,1)(v))$. Ensuite les feuilletages étant totalement géodésiques, alors cette géodésique est entièrement contenue dans $F_{2,c_u(1)}$. Finalemente
$\exp_a(u + T_a\mathcal{F}_2 \cong u \times T_a\mathcal{F}_2) \subset F_{2,\exp_a u}$ et $\exp_a(u+v) = k(1) = \exp_{c_u(1)}(P_{cu}(0,1)(v))$. C. Q. F. D.

Il résulte de 2.3

2.4.

Si $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, g)$ une variété biriemannienne connexe complète, alors pour tout $a \in M$ $\exp_a$ est un morphisme de v. p. p de $T_aM = T_a\mathcal{F}_1 \times T_a\mathcal{F}_2$ sur M. En plus si $u \in T_a\mathcal{F}_1$ et $v \in T_a\mathcal{F}_2$ on a (*)

$\exp_a(u+v) = exp_{c_u(1)}(P_{c_u}(0,1)(v)) = exp_{c_v(1)}(P_{c_v}(0,1)(u))$.

2.1 Corollaire :

En tout point d'une V.B.R complète, il existe un voisinage normal convexe pour lequel l'écart entre deux plaques d'un même feuilletage est constant.

Preuve : Soit a M : il existe U un voisinage normal bidistingué de a, $\varepsilon > 0$, tels que, pour tout $m' \in U$, la boule $B(m', \varepsilon)$de centre m' et de rayon ε soit un voisinage normal convexe de m' ([8], lemme 10.3, p. 59). Considérons alors $B(a, \varepsilon)$ et soit m un point quelconque de $B(a, \varepsilon), b$ (resp. m_1) le point d'intersection de la plaque dans $F_{1,m}$ (resp. $F_{2,m}$) et de la plaque P_2 en a dans $F_{2,a}$(resp. P_1 dans $F_{1,a}$) ; Remarquons que l'application θ définie par $\theta(m) = (m_1, b)$ est un isomorphisme de v.p.p de U sur $P_1 \times P_2$ car
$\theta = (\exp_a \mathrm{o} \mathrm{pr}_1 \mathrm{o} \exp_a^{-1}, \exp_a \mathrm{o} \mathrm{pr}_2 \mathrm{o} \exp_a^{-1})$ et $\theta^{-1} = \exp_a \mathrm{o} \Lambda \mathrm{o} (\exp_a^{-1} \times exp_a^{-1})$
où Λ est l'isomorphisme canonique de $T_a\mathcal{F}_1 \times T_a\mathcal{F}_2$ sur $T_a\mathcal{F}_1 \oplus T_a\mathcal{F}_2$ définie par $\Lambda(u, v) = u+v$; il s'agit de montrer que $d(m, m_1) = d(a, b)$. On procédera par l'absurde .

1) Si $d(m, m_1) > d(a, b)$, comme $B(a, \varepsilon)$ est un voisinage normal convexe, il existe un arc géodésique minimisant unique joignant a et b (resp. a et m_1), donc il existe u et v tels que $d(a, b) = ||v||$, $d(a, m_1) = ||u||$, $b = \exp_a(v)$ et $\exp a(u) = m_1$. Puisque d'après 2.3 $\exp_a$ est un isomorphisme de v.p.p (en fait de variétés produit), alors $u \in T_a\mathcal{F}_1$ et $v \in T_a\mathcal{F}_2$ et on a $m = \theta^{-1}(m_1, b) = \exp_a(exp_a^{-1}(m_1) + \exp_a^{-1}(b)) = \exp_a(u+v) = \exp_{m_1}(P_{c_u}(0,1)(v))$. Donc $t \longrightarrow \exp_a(t(P_{c_u}(0,1)(v))$ étant une géodésique joignant m_1 à m alors
$d(a, b) = ||v|| = ||P_{c_{v_1}}(0,1)(v))||d(m, m_1)$; ce qui serait absurde.

2) Si $d(m, m_1) < d(a, b)$, $B(m_1, \varepsilon)$ est un voisinage normal convexe de m_1 qui contient a et b. soit $v_{m_1} \in T_{m_1}M$ tel que $d(m, m_1) = ||v_{m_1}||$ et $\exp_{m_1}(v_{m_1}) = m$; comme $\exp_{m_1}$ est un isomorphisme de v.p.p, $v_{m_1} \in T_{m_1}\mathcal{F}_2$ et on a d'après (*)
$m = \exp_{m_1}(v_{m_1}) = \exp_{m_1}(P_{c_u}(0,1)((P_{c_u}^{-1}(0,1)(v_{m_1}))) =$
$\exp_a(u + P_{c_u}^{-1}(0,1)(v_{m_1}))$. Comme $b = \exp_a \mathrm{o} \mathrm{pr}_2 \mathrm{o} \exp_a^{-1}(m)$, alors
$b = (\exp_a \mathrm{o} \mathrm{pr}_2)(u + P_{c_u}^{-1}(0,1)(v_{m_1})) = \exp_a P_{c_u}^{-1}(0,1)(v_{m_1})$. On déduit comme précédemment que $d(a, b) \leq ||v_{m_1}|| = d(m, m_1)$. Ce qui est

encore absurde .

Au total on a bien $d(m, m_1) = d(a, b)$ et la boule $B(a, \varepsilon)$ répond à la question .

2.5. Pour une variété biriemannienne régulière complète, l'écart entre deux unisections d'un même feuilletage est constant.

Preuve : Si les F_i sont les deux unisections transverses et a leur point commun, si b est un point de F_2 tel que $F_{1,b}$ soit une unisection, montrons que pour tout point m de $F_{1,b}$ on a
$d(m, m_1) = d(a, b)$ où m_1 est le projeté de m sur F_1. Comme (M, g) est une v. r. complète alors il existe $v \in T_aM$ tel que $b = \exp_a(v)$ et $d(a, b) = ||v||$.

Je dis que v reste nécessairement dans $T_a\mathcal{F}_2$. En effet si $v = v_1 + v_2$, on a, à partir de la formule (*),

$b = \exp_a(v) = \exp_a(v_1 + v_2) = exp_{c_{v_1}(1)}(P_{c_{v_1}}(0, 1)(v_2))$.

Il vient, puisque F_1 est une unisection que $c_{v_2}(1) \in F_{2,b} \cap F_1 = \{a\}$; donc $a = \exp_a(v_1)$ et $b = \exp_a(P_{c_{v_1}}(0, 1)(v_2))$.

Ainsi donc $t \longrightarrow \exp_a(t(P_{c_{v_1}}(0, 1)(v_2))$ étant une géodésique joignant a à b alors

$||v_2|| = ||P_{c_{v_1}}(0, 1)(v_2))||d(a, b) = ||v|| = (||v_1||^2 + ||v_2||^2)^{\frac{1}{2}} \geq ||v_2||$
et ce qui implique que $v_1 = 0$.

Comme F_1 est une sous variété riemannienne complète il existe $u \in T_a\mathcal{F}1$ tel que
$m_1 = \exp_a(u)$. Egalement $t \longrightarrow \exp(tP_{c_u}(0, 1)(v))$ est une géodésique joignant m_1 et m, alors $d(m, m_1) \leq ||P_{c_u}(0, 1)(v)|| = ||v|| = d(a, b)$. De même il existe $v_{m_1} \in T_{m_1}\mathcal{F}_2$ tel que $m = \exp_{m_1}(v_{m_1})$ et $d(m, m_1) = ||v_{m_1}||$.

Par ailleurs $m = \exp_{m_1}(v_{m_1}) = \exp_a(u + (P_{c_u}(0, 1))^{-1}(v_{m_1})) = \exp_c(P_{c_{w_1}}(0, 1)(u))$ où $c = c_w(1)$, et $w = P_{c_u}(0, 1))^{-1}(v_{m_1})$ montrent que $c \in F_2 \cap F_{1,m} = \{b\}$ i. e. $b = \exp_a(w)$ et

$t \longrightarrow \exp_a(t(P_{c_u}(0, 1))^{-1}(v_{m_1}))$ est une géodésique joignant a à b.

Il suit alors $d(a, b)||(P_{c_u}(0, 1))^{-1}(v_{m_1})|| = ||v_{m_1}|| = d(m, m_1)$.

Ensuite pour tout point m de F_1, b, soit $v \in T_aM$ tel que $||v|| = d(a, m)$, comme précédemment on a $d(a, b) \leq ||v2|| \leq ||v|| = d(a, m)$ et donc $d(a, b) = d(a, F_{1,b}) = d(b, F_1) = d(F_1, F_1, b)$.

3. Variété biriemannienne et variété produit.

3.1. Une variété biriemannienne régulière complète est le produit riemannien de ses unisections.

Preuve : Soient $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ une telle v. p. p., F_1 l'unisection de $\mathcal{F}_1$, π_1 l'application canonique de M sur F_1 qui à tout x associe y l'unique point d'intersection de F_1 et de $F_{2,x}$ (on dira que π_1 est la projection sur F_1 suivant $\mathcal{F}_2$).

Soit b un point de M, en considérant un chemin γ dans $F_{2,b}$ joignant b à $\pi_1(b)$,on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $(V_k)_{1\leq k\leq m}$ tels que : chaque V_k est le voisinage ouvert normal convexe de $c_k \in \gamma$ définis par 2.5, $(V_k)_{1\leq k\leq m}$ est une chaîne joignant b et $\pi_1(b)$, $b = c_1 \in V_1$, $c_m \in V_m \cap F_1$ et pour tout k, $1 \leq k \leq m-2$, $c_{k+1} \in V_k \cap V_{k+1}$.$exp_{c_k}$ étant un isomorphisme de v.p.p d'un voisinage de l'origine de $T_{c_i}\mathcal{F}_1 \oplus T_{c_1}\mathcal{F}_2 \cong T_{c_1}\mathcal{F}_1 \times \mathcal{T}_{c_1}\mathcal{F}_2$ sur V_k alors $\varphi_k = (pr_1 \mathrm{o} \exp_{c_k}^{-1}, pr_2 \mathrm{o} \exp_{c_k}^{-1})$ où pr_1 et pr_2 sont respectivement la première et la deuxième projection de $T_{c_i}M = T_{c_i}\mathcal{F}_1 \oplus T_{c_i}\mathcal{F}_2$, est une carte bidistinguée et $T_k^i = (V_k \cap F_{i,c_k})$ est la plaque contenant c_k. L'application θ_k de V_k sur $T_k^1 \times T_k^2$ qui à x associe (x_1, x_2) (où x_1 est le point d'intersection de la plaque en x_1 de $(V_k \cap F_{2,x})$ et de T_k^1, et x_2 celui de la plaque en x de $(V_k \cap F_{1,x})$ et T_k^2) est un isomorphisme de v. p. p puisqu'on vérifie facilement que $\theta_k = (exp_{c_k} \times exp_{c_k}) \circ \varphi_k$.

Si on note par p_1 la première projection de produit de plaques de $F_1, \bullet$ et $F_2, \bullet$, il est clair que $\theta = (p_1 \circ \theta_{m-1}) \circ (p_1 \circ \theta_{m-2}) \circ - \circ (p_1 \circ \theta_1)$ est une submersion de V_1 dans F_1. Pour tout voisinage ouvert U_1 de $\pi_1(b)$ dans $F_1, U = \theta^{-1}(U_1)$ est un voisinage ouvert de b contenu dans V_1 où π_1 applique U sur U_1. π_1 et θ coïncidant sur U, alors π_1 est une submersion en b.

Par ailleurs puisque d'après 2.5 l'écart entre deux plaques de V_k reste constant, il en résulte que les $p_1 \mathrm{o} \theta_k$ sont des submersions riemanniennes. Ce qui assure que θ: $(V_1, g_{|V_1})(F_1, g_1 = g_{|F_1})$ et puis $\pi_1 : (M, g) \longrightarrow (F_1, g_1)$ sont des submersions riemanniennes. Il suit alors d'après un théorème de R. Hermann [5], puisque les variétés M et F_1 sont complètes, que π_1 est une fibration localement triviale. En plus π_1 définit $\mathcal{F}_2$. π_2 la projection sur l'unisection F_2 de $\mathcal{F}_2$ suivant $\mathcal{F}_1$ est également à la fois une submersion riemannienne et une fibration

localement triviale dont les fibres sont les feuilles $\mathcal{F}_1$. Les distributions horizontales $\mathcal{F}_1$ pour π_1 et $\mathcal{F}_2$ pour π_2 sont des connexions au sens de Ehresmann [7]. Puisque les deux feuilletages admettent des unisections, les groupes d'holonomie de ses connexions sont triviaux. L'application $f = (\pi_1, \pi_2)$ est alors un difféomorphisme qui au total est une isométrie de (M, g) sur $(F_1, g_1) \times (F_2, g_2 = g_{|F_2})$ puisque que π_1 et π_2 sont des submersions riemanniennes. C. Q.F.D.

Le résultat peut être en défaut si la variété n'est pas complète comme le montre l'exemple suivant : soit M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes complètes connexes de dimension 2 au moins . La variété $M = M_1 \times M_2 - \{*\}$ (où est un point quelconque de $M_1 \times M_2$) munie de la métrique produit n'est pas complète. Les facteurs horizontaux et verticaux définissent deux feuilletages $\mathcal{F}1$ et $\mathcal{F}2$ riemanniens et orthogonaux. Toute feuille "non trouée" L_2 de $\mathcal{F}_2$ (resp. L_1 de $\mathcal{F}_1$) est une unisection de $\mathcal{F}_1$ (resp.de $\mathcal{F}_2$) ; évidemment, la variété M n'est même pas le produit cartésien $L_1 \times L_2$!

3.2. Soit $(M, \mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp})$ une variété biriemannienne complète, $a \in M$ tel que $\exp_a$ soit injective, alors M est un produit riemannien de deux feuilles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\perp}$

Preuve : Dans ces conditions expa est bijective ([2] p.360); et est donc un difféomorphisme ([2] p.376); il suit alors que $F_{1,a} = \exp_a(T_a\mathcal{F}_1)$ et $F_{2,a} = \exp_a(T_a\mathcal{F}_2)$ sont des sous-variétés fermées de M. Pour tout $m \in M$, on a

$F_{2,m} = \exp_a(pr_1(exp_a^{-1}(m)) + T_a\mathcal{F}_2)$ et

$F_{1,a} \cap F_{2,m} = \exp_a(T_a\mathcal{F}_1)\exp_a(pr_1(\exp_a^{-1}(m)) + T_a\mathcal{F}_2) =$

$\exp_a(T_a\mathcal{F}_1 \cap (pr_1(\exp_a^{-1}(m)) + T_a\mathcal{F}_2)) = \{\exp_a(pr_1(\exp_a^{-1}(m))\}$: ce qui montre que F_1,a est une unisection et il en est de même pour $F_{2,a}$, donc M est une V.B.R.R. et on conclut avec 3.1

3.3. Une variété biriemannienne compacte admettant une unisection simplement connexe est produit riemannien de deux feuilles transverses.

Soient $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ une telle V. B. R, F_1 l'unisection simplement connexe de $\mathcal{F}_1$. Alors comme M est compacte, π_1 l'application canonique de M sur F_1 est une fibration dont les fibres sont les feuilles de $\mathcal{F}_2$. Le

feuilletage $\mathcal{F}_1$ induit une connexion intégrable sur ce fibré. Puisque la base est simplement connexe, le fibré est trivial. Avec les notations précédantes, chaque feuille est une unisection et comme d'après 2.6, l'écart entre deux unisections d'un même feuilletage est constant, il suit que chaque π_i est une submersion riemannienne et par suite $(M, g) = (F_1, g_1)(F_2, g_2)$.

3.4. Remarque : En s'inspirant de la démonstration du 3.1, et utilisant des cartes bidistinguées appropriées, on obtient pour une v. p. p. compacte les résultats suivants à savoir :

1) Une v. p. p compacte admettant deux unisections transverses est un produit de ses unisections.

2) Une v. p. p compacte admettant une unisection simplement connexe est un produit de feuilles transverses.

4. Références

[1] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet : Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Mathematics N° 194 Berlin Springer Verlag.

[2] Jean Dieudonné : Eléments d'analyse tome 4. Paris Gauthier-Villars.

[3] C. Godbillon : Feuilletages - Etudes géométriques 57R université Louis PASTEUR- I. R.. M. A .(C. N. R. S.)- Mai (1985).

[4] R. A. Blumenthal, J. Hebda, de Rham decomposition theorem for foliated manifolds, Ann. Ins. Fourier, 33(2), pp. 183-198, (1983).

[5] R. Hermann, A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle, Proc. A. M. S. 11, pp. 236-242 (1960).

[6] A. Codja, Sur les sections généralisées d'action localement libre de groupes de Lie compacts, Afrika mathematics, série 3 Vol. 11 (à paraître).

[7] A. Besse, Einstein Manifolds, p. 244.

[8] J. Minlor, Morse Theory, Princeton University Press, (1963).

Received by February 10, 2000.

Hassimiou Diallo
Département de Sciences et Tehnologie
Ecole Normale Supérieure
08 BP 10 Abidjan 08
Cote D'Ivoire
Francia