Proyecciones
Vol. 23, N^o 2, pp. 151-186, August 2004.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile
DOI: 10.4067/S0716-09172004000200007

THÉORÈMES DE ZILBER-EILEMBERG ET DE BROWN EN HOMOLOGIE ℓ_1

ABDESSELAM BOUARICH
Université Cadi Ayyad, Maroc

Received : December 2003. Accepted : July 2004

Abstract

Notion of acyclic models are introduced in Eleinberg-Maclane [4]. In [5] and [3], this theory is used as auxiliary tools to solve extension problems of morphisms of chains complexes and homotopy between those morphisms.

So in the first section of this work, we will adapt the notion of acyclic models in the category of Banach chain differential complexes $\mathbf{Ch_*(Ban)}$*. In the second section, we recall the functor of real* ℓ_1*-singular homology (cf. [8]) on which we apply theorems proved in the first section. In particular, we prove an analogous of Zilber-Eilenberg theorem [5] in real* ℓ_1*-singular homology. In last section, we prove an analogous of Brown theorem in real* ℓ_1*-singular homology. As consequence of this theorem we show that the real* ℓ_1*-singular homology depends only on the fundamental group and we establish some exact sequences.*

AMS Classification : *46M15, 46A30, 46A32, 14F99.*

Introduction

Dans ce papier, on se propose de redémontrer le théorème de Zilber-Eilenberg [5] et sa généralisation le théorème de Brown [3] dans le cadre de *l'homologie ℓ_1-singulière réelle* de Gromov [8]. Pour redémontrer ces deux théorèmes, dans un premier temps, il nous a fallu refaire complètement la théorie des modèles acycliques [4] dans la catégorie des complexes différentiels de Banach. Ensuite, nous avons révisé la construction de certains outils d'algèbre homologique nécessaire pour reformuler notamment le théorème de Brown en l'homologie ℓ_1-singulière réelle.

La démonstration du théorème de Brown nous a permis d'établir des résultats importants qui rappellent ceux analogues démontrés par Gromov en *cohomologie bornée réelle singulière* : dual topologique de l'homologie ℓ_1-singulière réelle [8]. Par exemple, nous avons démontré que l'homologie ℓ_1-singulière réelle dépend seulement du groupe fondamental de l'espace en question. De même, sous l'hypothèse de moyennabilité du groupe fondamental de la fibre (resp. base) d'une fibration donnée, nous avons réussi à démontrer que la projection induit un isomorphisme (resp. surjection) en homologie ℓ_1-singulière réelle.

Ce travail avait pour motivation des résultats sur les suites exactes en cohomologie bornée réelle (cf. [1]) et aussi des résultats qui concernent l'exactitude à gauche du foncteur de cohomologie bornée réelle [2].

1. Modèles acycliques

1.1. Foncteurs fortements représentables

On désigne par **Ban** la catégorie des espaces de Banach dont les objets sont les espaces de Banach et les morphismes sont les opérateurs linéaires continus. Par $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})$ on désigne la catégorie des complexes différentiels de Banach dont les objets sont des complexes différentiels de degré $r = -1$, (K_*, ∂_*^K),

$$\longrightarrow \quad K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^K} K_n \xrightarrow{\partial_n^K} K_{n-1} \quad \longrightarrow$$

o K_n est un espace de Banach et ∂_n^K un opérateur linéaire continu tel que $\partial_n^K \circ \partial_{n+1}^K = 0, \forall n \in \mathbf{Z}$. Les morphismes de la catégorie $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})$ sont les suites d'opérateurs linéaires continus $\{f_n/n \in \mathbf{Z}\}$ qui rendent le diagramme suivant commutatif,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & K_{n+1} & \xrightarrow{\partial^K_{n+1}} & K_n & \xrightarrow{\partial^K_n} & K_{n-1} & \longrightarrow \\
 & f_{n+1}\Big\downarrow & & f_n\Big\downarrow & & f_{n-1}\Big\downarrow & \\
\longrightarrow & L_{n+1} & \xrightarrow{\partial^L_{n+1}} & L_n & \xrightarrow{\partial^L_n} & L_{n-1} & \longrightarrow
\end{array}$$

Les espaces vectoriels d'homologie d'un complexe différentiel (K_*, ∂^K_*) seront désignés par $H_*(K_*, \partial^K_*) = \dfrac{Ker(\partial^K_n)}{Im(\partial^K_{n+1})}$.

Définition 1. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie et $T \ : \mathcal{A} \to$* **Ban** *un foncteur covariant. On dit que T est* **admissible** *si, pour tout morphisme x de la catégorie $\mathcal{A}$, l'opérateur linéaire continu $T(x)$ est de norme $\| T(x) \| \leq 1$.*

Définition 2. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie et $\mathcal{M}$ un ensemble d'objets fixés dans $\mathcal{A}$ dont les éléments seront appelés* **modèles** *[4]. Soit $T, S \ : \ \mathcal{A} \to$* **Ban** *deux foncteurs admissibles et $\eta \ : T \to S$ une transformation naturelle.*

Nous dirons que η est **uniformément bornée** *(resp. $\mathcal{M}$-uniformément bornée) s'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que pour tout objet $A \in \mathcal{A}$ (resp. $M \in \mathcal{M}$) l'opérateur continu $\eta_A \ : T(A) \to S(A)$ (resp, $\eta_M \ : T(M) \to S(M)$) est de norme $\| \eta_A \| \leq k$ (resp. $\| \eta_M \| \leq k$).*

Théorème 1. *Soit $T \ : \mathcal{A} \to$* **Ban** *un foncteur admissible. Alors, il existe un foncteur admissible $\widehat{T} \ : \mathcal{A} \to$* **Ban** *et une transformation naturelle uniformément bornée $\theta_T \ : \widehat{T} \to T$ de telle sorte que la correspondance $T \to \Lambda(T) = (\widehat{T}, \theta_T)$ soit fonctorielle.*

Démonstration. **a) Construction du foncteur admissible $\widehat{T}$**

Soit A un objet de la catégorie $\mathcal{A}$. On désigne par $\widetilde{T}(A)$ l'espace vectoriel réel engendré par les couples (ϕ, m) où $\phi \in Hom_{\mathcal{A}}(M, A), M \in \mathcal{M}$ et $m \in T(M)$. Pour tout vecteur $z \in \widetilde{T}(A)$ on définit sa semi-norme comme suit :

$$\text{(1.1)} \qquad si \ z = \sum_{p=1}^{p=n} a_p \, \{_p, m_p\} \in \widetilde{T}(A) \quad \text{on pose}$$

$$\|z\|_1 = \sum_{p=1}^{p=n} |a_p| \, \|m_p\|_{T(M_p)}$$

où $\| \,.\, \|_{T(M_p)}$ désigne la norme de l'espace de Banach $T(M_p)$ pour $1 \leq p \leq n$.

Puisque le noyau de dégénérescence de la semi-norme $\| \,.\, \|_1$ est engendré par les vecteurs $(\phi, 0_{T(M)}) \in \widetilde{T}(A)$; par un passage au quotient $\widetilde{T}(A)/Ker(\| \,.\, \|_1)$ on obtient une structure d'espace vectoriel réel normé que l'on va désigner par le même symbole $(\widetilde{T}(A), \| \,.\, \|_1)$ tandis que $(\widehat{T}(A), \| \,.\, \|_1)$ désigne sa completion.

Maintenant, si on se donne un morphisme $x : A \to B$ de la catégorie $\mathcal{A}$, on lui associe l'application $\widetilde{T}(x)(\phi, m) = (x\phi, m)$ qui se prolonge par linéarité en un opérateur linéaire continu $\widehat{T}(x) : \widehat{T}(A) \to \widehat{T}(B)$ de norme $\| \widehat{T}(x) \| \leq 1$. Autrement dit, $\widehat{T} : \mathcal{A} \to \mathbf{Ban}$ est un foncteur admissible.

b) Construction de la transformation naturelle θ_T

Pour un objet A de la catégorie $\mathcal{A}$ on définit un opérateur linéaire $\widetilde{\theta}_T(A) : \widetilde{T}(A) \to T(A)$ sur les générateurs de $\widetilde{T}(A)$ par : $\widetilde{\theta}_T(A)(\phi, m) = T(\phi)(m)$. Ainsi, puisque le foncteur T est admissible on peut écrire l'inégalité :

$$\| \widetilde{\theta}_T(A)(\phi, m) \|_{T(A)} \leq \| T(\phi) \| \| m \|_{T(M)} \leq \| (\phi, m) \|_1$$

qui montre que $\widetilde{\theta}_T(A)$ est continu et que son prolongement $\theta_T(A) : \widehat{T}(A) \to T(A)$ est de norme $\| \theta_T(A) \| \leq 1$. Ainsi, comme la donnée d'un morphisme $x : A \to B$ élément de $\mathcal{A}$ permet d'avoir un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}(A) & \xrightarrow{\widehat{T}(x)} & \widehat{T}(B) \\ {\scriptstyle \theta_T(A)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \theta_T(B)} \\ T(A) & \xrightarrow{T(x)} & T(B) \end{array}$$

on en déduit que $\theta_T : \widehat{T} \to T$ est une transformation naturelle uniformément bornée.

La fonctorialité des constructions a) et b) est évidente. $\square$

Proposition 1. *Soient $T, S : \mathcal{A} \to$ **Ban** deux foncteurs admissibles et $\nu : T \to S$ une transformation naturelle $\mathcal{M}$-uniformément bornée. Alors, la transformation naturelle $\widehat{\nu} : \widehat{T} \to \widehat{S}$ définie par l'expression*

(1.2) $$\widehat{\nu}_A(\phi, m) = (\phi, \nu_M(m)),$$

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall M \in \mathcal{M}, \forall \phi \in Hom(M, A), \forall m \in T(M)$$

est uniformément bornée.

Démonstration. En effet, si on applique l'expression (2) au couple (ϕ, m) on obtient l'inégalité :

$$\| \widehat{\nu}_A(\phi, m) \|_1 = \| \nu_M(m) \| \leq \| \nu_M \| \, . \, \| m \|_{T(M)} = \| \nu_M \| \, . \, \| (\phi, m) \|_1, \ \forall m \in M$$

Ainsi, puisque la transformation naturelle ν est $\mathcal{M}$-uniformément bornée, il existe un nombre réel $k > 0$ qui permet d'avoir l'inégalité :

$$\| \widehat{\nu}_A(\phi, m) \|_1 \leq \| \nu_M \| \, . \, \| (\phi, m) \|_1 \leq k \, \| (\phi, m) \|_1 \Longrightarrow \| \widehat{\nu}_A \| \leq k$$

qui montre bien que $\widehat{\nu}$ est une transformation naturelle uniformément bornée. □

Définition 3. *Soit $T : \mathcal{A} \to$ **Ban** un foncteur admissible et $\Lambda(T) = \theta_T : \widehat{T} \to T$ la transformation naturelle qui lui est associée par le théorème 1.*

1. *On dit que le foncteur T est* **représentable** *s'il existe une transformation naturelle $\zeta : T \to \widehat{T}$ telle que $\theta_T \circ \zeta = id_T$. La transformation naturelle ζ s'appelle une* **représentation** *de T [4].*
2. *On dit que le foncteur T est* **fortement** *(resp. $\mathcal{M}$ -fortement)*

   représentable *s'il existe une transformation naturelle uniformément (resp. $\mathcal{M}$-uniformément) bornée, $\zeta : T \to \widehat{T}$, telle que $\theta_T \circ \zeta = id_T$.*

Proposition 2. *Soient $T \xrightarrow{\eta} S \xrightarrow{\zeta} T$ deux transformations naturelles uniformément bornées telles que, $\zeta \circ \eta = id_T$. Si le foncteur S est fortement représentable alors le foncteur T est lui même fortement représentable.*

Démonstration. Remarquons d'abord que par fonctorialité du couple $(\widehat{T}, \theta_T)$ nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{T} \arrow[r, "\widehat{\nu}"] \arrow[d, "\theta_T"'] & \widehat{S} \arrow[r, "\widehat{\zeta}"] \arrow[d, "\theta_S"'] & \widehat{T} \arrow[d, "\theta_T"'] \\
T \arrow[r, "\nu"] & S \arrow[r, "\zeta"] & T
\end{tikzcd}$$

Ensuite, si on désigne par ζ_S la représentation forte du foncteur S on en déduit que la transformation naturelle $\zeta_T = \widehat{\zeta} \circ \zeta_S \circ \eta$ définit une représentation forte pour le foncteur admissible T, car on a

$$\theta_T \circ \zeta_T = \theta_T \circ \widehat{\zeta} \circ \zeta_S \circ \eta = \zeta \circ \theta_S \circ \zeta_S \circ \eta = \zeta \circ id_S \circ \eta = id_T$$

et on sait que $\widehat{\zeta}$, ζ_S et η sont uniformément bornées. □

Remarque 1. *Les démonstrations données ci-dessus restent valables si on remplace la norme ℓ_1 par une autre de types ℓ_p avec $p \geq 1$. Mais, puisque le thème central est l'homologie ℓ_1-singulière réelle dans la suite nous ne travaillons qu'avec la norme ℓ_1.*

1.2. Prolongement des transformations naturelles

Pour des raisons techniques, dans ce paragraphe et le prochain, nous n'allons considérer que les foncteurs admissibles T défini sur une catégorie $\mathcal{A}$ mais à valeurs dans la sous-catégorie $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ dont les objets sont constituée par les complexes différentiels $(K_*, \partial_*^{K_*})$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \exists k_n > 0, \forall (K_*, \partial_*^{K_*}) \in \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_b, \implies \parallel \partial_n^K \parallel \leq k_n. \tag{1.3}$$

Nous introduisons maintenant une définition qui va jouer un rôle essentiel dans la plupart des démonstrations que nous développerons dans la suite.

Définition 4. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie munie d'un ensemble de modèles $M \in \mathcal{M} \subset \mathcal{A}$. Nous dirons qu'un foncteur $T : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_b$ est $\mathcal{M}$-***uniformément fermé** *s'il existe une suite de nombres réels positifs $\{q_n \geq 0 / \forall n \in \mathbf{Z}\}$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}$ les différentielles du complexe $T(M) \in \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_b$ vérifient la propriété suivante,*

$$\forall z_n \in Im(\partial_{n+1}^{T(M)}), \exists y_n \in T_{n+1}(M) \quad \textit{tel que} \tag{1.4}$$

$$z_n = \partial_{n+1}^{T(M)}(y_n) \quad \textit{et} \quad \parallel y_n \parallel \leq q_n \parallel z_n \parallel$$

Remarque 2. *Par le thorme de l'application ouverte [14] la condition* (4) *implique que les diffrentielles* $\partial_n^{T(M)}$ *sont images fermées. (Ceci justifie bien le mot* **ferm** *qui intervient dans la dfinition.)*

On rappelle que si $T, S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_b$ sont deux foncteurs de composantes respectives T_n et S_n, on dit qu'une correspondance $\eta : T \to S$ définit une transformation naturelle si, pour tout objet A de $\mathcal{A}$:

1. $\eta_n(A) : T_n(A) \to S_n(A)$ est un opérateur linéaire continu ;
2. on a $\partial_n^{S(A)} \circ \eta_n(A) = \eta_{n-1}(A) \circ \partial_n^{T(A)}$;
3. si $x : A \to B$ est un morphisme alors, $S_n(x) \circ \eta_n(B) = \eta_n(A) \circ T_n(x)$.

Lorsque les propriétés 1), 2) et 3) sont vérifiées que pour les entiers $p \leq n$ nous dirons que $\eta : T \to S$ est une transformation naturelle de dimension n.

Théorème 2. *Soient* $T, S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ *deux foncteurs admissibles et* $\eta : T \to S$ *une transformation naturelle de dimension* $n-1$.

Alors, pour que η *se prolonge en une transformation naturelle de dimension* n *il suffit qu'on ait les conditions suivantes :*

1. *la transformation naturelle* $\eta_{n-1} : T_{n-1} \to S_{n-1}$ *est* $\mathcal{M}$*-uniformément bornée ;*
2. *le foncteur* $T_n : \mathcal{A} \to \mathbf{Ban}$ *est représentable ;*
3. *pour tout modèle* $M \in \mathcal{M}$, $H_{n-1}(S(M)) = 0$ *;*
4. *le foncteur* $S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ *est* $\mathcal{M}$*-uniformément fermé.*

Démonstration. Soient $M \in \mathcal{M}$ un modèle et $m \in T_n(M)$ un vecteur. Puisque le morphisme $\eta(M)$ commute avec les différentielles des deux complexes $T(M)$ et $S(M)$ en dimension $p \leq n-1$, la chaîne $\eta_{n-1}(M) \circ \partial_n^{T(M)}(m)$ est un $(n-1)$-cycle dans $S_{n-1}(M)$. Donc, d'après les conditions 3) et 4), il existe un nombre réel $k > 0$ et une chaîne $z_m \in S_n(M)$ tels que,

$$\partial_n^{S(M)}(z_m) = \eta_{n-1}(M) \circ \partial_n^{T(M)}(m)$$

et $\| z_m \| \leq k \| \eta_{n-1}(M) \circ \partial_n^{T(M)}(m) \|$.

Pour un objet A de $\mathcal{A}$, considérons l'application linéaire $\lambda_n(A) : \widehat{T}_n(A) \to S_n(A)$ définie sur les générateurs de l'espace de Banach $\widehat{T}_n(A)$ par l'expression :

$$\lambda_n(A)(\phi, m) = S_n(\phi)(z_m), \forall \phi \in Hom_{\mathcal{A}}(M, A).$$

Affirmation 1. *$\lambda_n : \widehat{T}_n \to S_n$ est une transformation naturelle uniformément bornée qui vérifie la relation, $\partial_n^S \circ \lambda_n = \eta_{n-1} \circ \partial_n^T \circ \theta_{T_n}$ où $\theta_{T_n} = \Lambda(T_n)$ est la transformation naturelle associée au foncteur admissible T_n (cf. th. 1.).*

Démonstration. Du point de vue ensembliste, $\lambda_n : \widehat{T} \to S$ est déjà une transformation naturelle qui vérifie la relation suivante sur les générateurs (cf. [4]) :

$$\begin{aligned} S_n(x) \circ \lambda_n(A)(\phi, m) = S_n(x)(S_n(\phi)(z_m)) &= S_n(x.\phi)(z_m), \ \forall x \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B) \\ &= \lambda_n(B)(x.\phi, m) = \lambda_n(B) \circ \widehat{T}_n(x)(\phi, m) \end{aligned}$$

et aussi $\partial_n^S \circ \lambda_n = \eta_{n-1} \circ \partial_n^T \circ \theta_{T_n}$ (cf. [4]). Donc, ici, la preuve consiste à démontrer que λ_n est uniformément bornée.

Observons que, par définition de $\lambda_n(A)$, on peut écrire les inégalités :

$$\begin{aligned} \| \lambda_n(A)(\phi, m) \| = \| S_n(\phi)(z_m) \| &\leq \| S_n(\phi) \| . \| z_m \| \leq \| z_m \| \\ &\leq k \| \eta_{n-1}(M) \circ \partial_n^{T(M)} \| . \| m \| \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la condition 1 du théorème, la transformation naturelle η_{n-1} était $\mathcal{M}$-uniformément bornée il existe donc un réel $k' > 0$ tel que pour tout modèle $M \in \mathcal{M}$ on ait, $\| \eta_{n-1}(M) \| \leq k'$. De même, puisque les différentielles de tous les objets de $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ sont de norme $\| \partial_n^{T(M)} \| \leq k_n$ (cf. (3)), on en déduit les majorations :

$$\begin{aligned} \| \lambda_n(A)(\phi, m) \| &\leq k \| \eta_{n-1}(M) \circ \partial_n^{T(M)} \| . \| m \| \\ &\leq kk'k_n \| m \| = kk'k_n \| (\phi, m) \|_1 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur $\lambda_n(A)$ tait continu et la norme $\| \lambda_n(A) \| \leq kk'k_n$ il en résulte que $\lambda_n : \widehat{T}_n \to S_n$ est une transformation naturelle uniformément bornée. $\square$

Maintenant on peut achever la preuve du théorème 2.

D'après la condition 2, le foncteur T_n est représentatble ; il existe donc une transformation naturelle $\zeta_n : T_n \to \widehat{T}_n$ telle que $\theta_{T_n} \circ \zeta_n = id_{T_n}$. Ainsi, en posant $\eta_n = \lambda_n \circ \zeta_n$, on obtient une transformation naturelle de source T_n et de but S_n telle que, pour tout objet A de $\mathcal{A}$ l'opérateur linéaire $\eta_n(A) = \lambda_n(A) \circ \zeta_n(A)$ est continu. De plus, on vérifie facilement qu'on a la relation $\partial_n^S \circ \eta_n = \eta_{n-1} \circ \partial_n^T$ qui montre que η_n prolonge la transformation naturelle η en dimension n. $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 2.

Corollaire 1. *Soient $T, S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ deux foncteurs admissibles et $\eta \; : T \to S$ une transformation naturelle de dimension $n-1$ $\mathcal{M}$-uniformément bornée. Alors, pour que η se prolonge en une transformation naturelle $\mathcal{M}$ -uniformément bornée de dimension n il suffit qu'on ait les conditions suivantes :*

1. *le foncteur T_n est $\mathcal{M}$-fortement représentable ;*
2. *pour tout modèle $M \in \mathcal{M}$, $H_{n-1}(S(M)) = 0$;*
3. *le foncteur $S \; : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé.*

1.3. Prolongement des homotopies

D'abord, rappelons que si $T, S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ sont deux foncteurs de composantes respectives T_n et S_n, nous dirons que deux transformations naturelles $\eta, \zeta \; : T \to S$ sont homotopes s'il existe une transformation naturelle $h \; : T \to S$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout objet de la catégorie $\mathcal{A}$ et pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, l'opérateur linéaire $h_n(A) \; : T_n(A) \to S_{n+1}(A)$ est continu ;
2. $\partial_{n+1}^{S(A)} \circ h_n(A) + h_{n-1}(A) \circ \partial_n^{T(A)} = \eta_n(A) - \zeta_n(A)$;
3. pour tout morphisme $x \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ on a, $h_n(B) \circ T_n(x) = S_{n+1}(x) \circ h_n(A)$.

Quand les propriétés 1), 2) et 3) ne sont vérifiées que pour les entiers $p \leq n$, nous dirons que $h \; : T \to S$ est une homotopie de dimension n.

Le but principal du présent paragraphe est de démontrer le théorème suivant qui nous donne des conditions suffisantes pour prolonger les homotopies entre foncteurs à valeurs dans la sous catégorie $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$.

Théorème 3. *Soient $T, S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ deux foncteurs admissibles. Soient $\eta, \zeta : T \to S$ deux transformations naturelles et $h : \eta \to \zeta$ une homotopie de dimension $n-1$. Alors pour que h se prolonge en une homotopie de dimension n il suffit qu'on ait les conditions suivantes :*

1. *le foncteur T_n est représentable ;*
2. *pour tout modèle $M \in \mathcal{M}$, $H_n(S(M)) = 0$;*
3. *le foncteur $S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé ;*
4. *les trois transformations naturelles h_{n-1}, ζ_n, η_n sont $\mathcal{M}$-uniformément bornées.*

Démonstration. Pour un modèle $M \in \mathcal{M}$ et un vecteur $m \in T_n(M)$ posons,

$$z = \left(\zeta_n(M) - \eta_n(M) - h_{n-1}(M) \circ \partial_n^{T(M)}\right)(m) \in S_n(M) \tag{1.5}$$

Puisque h est une homotopie de dimension $n-1$, la chaîne z est un n-cycle dans $S_n(M)$. Ainsi, en appliquant les conditions 2) et 3) du théorème on peut écrire :

Il existe $k > 0$ et $z_m \in S_{n+1}(M)$ tels que $\partial_{n+1}^{S_{n+1}(M)}(z_m) = z$ et $\| z_m \| \leq k \| z \|$.

Ensuite, pour un objet A de la catégorie $\mathcal{A}$, considérons l'application linéaire $\lambda'_n(A)$ définie sur les générateurs de l'espace de Banach $\widehat{T}_n(A)$ par;

$$\begin{array}{rcl} \lambda'_n(A) : \widehat{T}_n(A) & \to & S_{n+1}(A) \\ (\phi, m) & \to & S_{n+1}(\phi)(z_m) \end{array}$$

Comme dans [4], on vérifie facilement que $\lambda'_n : \widehat{T}_n \to S_{n+1}$ définit une transformation naturelle dans la catégorie des groupes abéliens.

Affirmation 2. *La correspondance $\lambda'_n : \widehat{T}_n \to S_{n+1}$ est une transformation naturelle uniformément bornée qui vérifie la relation*

$$\partial_{n+1}^S \circ \lambda'_n = \left(\zeta_n - \eta_n - h_{n-1} \circ \partial_n^T\right) \circ \theta_{T_n}$$

où $\theta_{T_n} = \Lambda(T_n)$ désigne la transformation naturelle associée au foncteur T_n (cf. th. 1).

Démonstration. 1) Vérifions que pour tout objet A de la catégorie $\mathcal{A}$, l'opérateur linéaire $\lambda'_n(A)$ est continu. Soit (ϕ, m) un générateur de l'espace de Banach $\widehat{T}_n(A)$. Il est clair que, par définition de l'application λ'_n, on a l'inégalité :

$$\| \lambda'_n(A)(\phi, m) \| = \| S_{n+1}(\phi)(z_m) \| \leq \| z_m \| \leq k \| z \|$$

où z est le n-cycle défini par l'expression (5). Ainsi, puisque les transformations naturelles h_{n-1}, η_n et ζ_n sont uniformément bornées (cf. condition 4 du théorème) il existe un nombre réel $k'_n > 0$ qui ne dépend que de l'ensemble des modèles $\mathcal{M}$ avec lequel on obtient la majoration :

$$\| z \| \leq k'_n \| m \| \Longrightarrow \| \lambda'_n(A) \| \leq kk'_n, \quad \forall A$$

qui montre que $\lambda'_n \ : \widehat{T}_n \to S_{n+1}$ est une transformation naturelle uniformément bornée.

2) Vérifions la relation : $\partial^S_{n+1} \circ \lambda'_n = \left(\zeta_n - \eta_n - h_{n-1} \circ \partial^T_n\right) \circ \theta_{T_n}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\partial^{S(A)}_{n+1} \circ \lambda'_n(A)(\phi, m) &= \partial^{S(A)}_{n+1} \circ S_{n+1}(\phi)(z_m) = S_n(\phi) \circ \partial^{S(M)}_{n+1}(z_m) \\
&= S_n(\phi) \circ \left(\zeta_n(M) - \eta_n(M) - h_{n-1}(M) \circ \partial^{T(M)}_n\right)(m) \\
&= \left(\zeta_n(A) - \eta_n(A) - h_{n-1}(A) \circ \partial^{T(A)}_n\right) \circ T_n(\phi)(m) \\
&= \left(\zeta_n(A) - \eta_n(A) - h_{n-1}(A) \circ \partial^{T(A)}_n\right) \circ \theta_{T_n}(A)(\phi, m)
\end{aligned}$$

□

Pour achever la preuve du théorème 3 il suffit qu'on démontre l'affirmation suivante.

Affirmation 3. *Soit $\nu_n \ : T_n \to \widehat{T}_n$ une représentaion du foncteur admissible T_n (i.e. $\theta_{T_n} \circ \nu_n = id_{T_n}$ déf. 3). Alors $h_n = \lambda'_n \circ \nu_n \ : T_n \to S_n$ est une transformation naturelle qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout objet A de $\mathcal{A}$, $h_n(A) \ : T_n(A) \to S_{n+1}(A)$ est un opérateur linéaire continu ;*
2. $h_{n-1} \circ \partial^T_n + \partial^S_{n+1} \circ h_n = \zeta_n - \eta_n$.

Démonstration. Puisque ν_n et λ'_n sont des transformations naturelles, il en est de même pour $h_n = \lambda'_n \circ \nu_n$. En plus, puisque pour tout objet A de la catégorie $\mathcal{A}$ les opérateurs linéaires $\nu_n(A)$ et $\lambda'_n(A)$ sont continus, $h_n(A)$ est lui même continu. Ceci d'une part.

D'autre part, d'après l'affirmation 2 on a la relation :

$$\partial^S_{n+1} \circ \lambda'_n = \left(\zeta_n - \eta_n - h_{n-1} \circ \partial^T_n\right) \circ \theta_{T_n}$$

qui, si on la compose par la transformation naturelle ν_n, donne la relation cherchée,
$h_{n-1} \circ \partial^T_n + \partial^S_{n+1} \circ h_n = \zeta_n - \eta_n$. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.

Corollaire 2. *Soient $T, S\ : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ deux foncteurs admissibles, $\eta, \zeta\ : T \to S$ deux transformations naturelles et $h\ : \eta \to \zeta$ une homotopie de dimension $n-1$. Alors, pour que h se prolonge en une homotopie de dimension n qui soit $\mathcal{M}$-uniformément bornée il suffit qu'on ait les conditions suivantes :*

1. *le foncteur T_n est $\mathcal{M}$-fortement représentable;*
2. *pour tout modèle $M \in \mathcal{M}, H_n(S(M)) = 0$;*
3. *le foncteur $S\ : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch_*Ban_b}$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé ;*
4. *les trois transformations naturelles h_{n-1}, ζ_n, η_n sont $\mathcal{M}$-uniformément bornées.*

De même, si on combine les résultats des corollaires 1 et 2 nous obtenons également le théorème de prolongement global des transformations naturelles à homotopie près :

Corollaire 3. *Soient $T, S\ : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ deux foncteurs admissibles et $\eta\ \ : T \to S$ une transformation naturelle $\mathcal{M}$-uniformment borne de dimension $n-1$. Alors, pour que η se prolonge en une transformation naturelle qui soit $\mathcal{M}$ -uniformément bornée de dimension $p \geq n$ il suffit qu'on ait les conditions suivantes :*

1. *pour tout entier $p \geq n$, le foncteur T_p est [$\mathcal{M}$ -fortement représentable;*
2. *pour tout modèle $M \in \mathcal{M}$ et pour tout entier $p \geq n-1$, $H_p(S(M)) = 0$;*

3. le foncteur $S : \mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ *est* $\mathcal{M}$*-uniformément fermé.*

Le prolongement de η *en dimension* $p \geq n$ *est unique à homotopie près. Plus précisément, si* η' *désigne une autre transformation naturelle qui prolonge* η *en dimension* $p \geq n$*, alors il existe une homotopie* $h : \eta \to \eta'$ $\mathcal{M}$ *-uniformément bornée et telle que* $h_q = 0$ *pour tous les entiers* $q \leq n-1$*.*

2. Homologie ℓ_1-singulière réelle

Soit X un espace topologique. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ on désigne par $C_n(X, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel engendré par l'ensemble des n-simplexes singuliers $\mathcal{S}_n(X)$. Sur l'espace $C_n(X, \mathbf{R})$ on définit une norme de type ℓ_1 (cf. [8]) :

$$\text{(2.1)} \qquad \text{si } \ z = \sum_{i=1}^{i=m} a_i \sigma_i^n \in C_n(X, \mathbf{R} \text{ on pose}$$

$$\| \, z \, \|_1 = \sum_{i=1}^{i=m} | \, a_i \, |$$

dont la completion sera notée, $(C_n^{\ell_1}(X, \mathbf{R}), \| \cdot \|_1)$.

Relativement à la norme $\| \cdot \|_1$ les opérateurs de bord $\partial_n : C_n(X, \mathbf{R}) \to C_{n-1}(X, \mathbf{R})$ sont continus et ont pour norme, $\| \, \partial_n \, \| \leq n+1$. Par conséquent, si on les prolonge par continuité sur les espaces de Banach $C_n^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$, le complexe différentiel $(C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}), \partial_*)$ est un élément de la sous-catégorie $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ (cf. (3)). D'autre part, puisque les applications continues $f : X \to Y$ induisent des morphismes de complexes différentiels de Banach $f_* : C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \to C_*^{\ell_1}(Y, \mathbf{R})$ de norme $\| \, f_* \, \| \leq 1$ il en résulte que le foncteur $C_*^{\ell_1}(-, \mathbf{R}) : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ est admissible (déf. 1).

Les espaces vectoriels réels d'homologie $H_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) = \dfrac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$ s'appellent : *homologie* ℓ_1*-singulière réelle* de l'espace X (cf. [8]), tandis que les espaces d'homologie associés au dual topologique $(C_b^*(X, \mathbf{R}), d_*) = (\mathcal{L}(C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}), \mathbf{R}), d_*)$ s'appelle : *cohomlogie bornée réelle singulière* de l'espace X.

Pour finir ce rappelle, nous donnerons maintenant quelques propriétés du foncteur d'homologie ℓ_1-singulière réelle $C_*^{\ell_1}(-, \mathbf{R})$ que nous utiliserons dans la suite de ce travail :

1. **Homologie d'un point** : si $X = \{P\}$ est un point alors $H_0^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et $H_n^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) = 0$ si $n \geq 1$.

2. **Additivité** : $H_*^{\ell_1}(\sqcup_{i \in I} X_i, \mathbf{R}) = \oplus_{i \in I} H_*^{\ell_1}(X_i, \mathbf{R})$.

3. **Le foncteur** $H_0^{\ell_1}(-, \mathbf{R})$: pour tout espace X on définit une forme linéaire continue $\varepsilon_X \ : C_0^{\ell_1}(X; \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ (i.e. augmentation) en posant, $\varepsilon_X(x) = 1, \forall x \in X$.

   La forme linéaire continue ε_X permet de voir que tous les 0-simplexes singuliers qui appartiennent à une même composante connexe par arcs de X sont homologues et que par suite, $H_0^{\ell_1}(X; \mathbf{R}) = \ell_{\mathbf{1}}(\pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{X}))$: est l'espace de Banach engendré par l'ensemble des composantes connexe par arcs $\pi_0(X)$.

4. Le fait qu'il n'y ait pas de sous-groupes borns dans le groupe $(\mathbf{R}, +)$ implique que le $H_b^1(X, \mathbf{R}) = 0$ (cf. [8]).

5. L'espace $H_1^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) = 0$. En effet, s'il existe une chaîne $z_0 \in Ker(\partial_1) \setminus Im(\partial_2)$ le théorème de Hahn-Banach permet de trouver une forme linéaire continue $c \ : Ker(\partial_1) \to \mathbf{R}$ qui s'annule sur le sous-espace $Im(\partial_2)$ et telle que $< c, z_0 > \neq 0$. Ainsi, en prolongeant c continûment sur l'espace de Banach $C_1^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$, on aura un 1-cocycle borné $\bar{c} \in Z_b^1(X, \mathbf{R})$ qui vérifie $< \bar{c}, z_0 > = < c, z_0 > \neq 0$, et donc ; la classe de cohomologie borne $[\bar{c}]$ est non nulle dans l'espace $H_b^1(X, \mathbf{R})$. Or ceci contredit le fait que $H_b^1(X, \mathbf{R}) = 0$.

6. **Invariance par homotopie** : si $f, g \ : X \to Y$ sont homotopes alors les morphismes f_* et g_* sont homotopes.

Ainsi, de l'invariance par homotopie de l'homologie ℓ_1-singulière réelle on déduit qu'un espace contractile X est acyclique : $H_n^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) = 0, \forall n \geq 1$. Dans [12], Morita-Matsumoto ont démontré le théorème suivant qui nous informe que la classe des espaces acycliques en homologie ℓ_1-singulière réelle est très riche.

Théorème 4. Si le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est moyennable (cf. P. Greenleaf [7]) alors, $H_n^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) = 0, \forall n > 0$. En conséquence, si le groupe $\pi_1(X)$ est ablien, rsoluble en particulier si X est simplement connexe alors X est acyclique en homologie ℓ_1-singulière réelle.

Nous donnerons maintenant la première application des modèles acycliques pour comparer l'homologie ℓ_1-singulière réelle d'un espace topologique a son homologie ℓ_1-singulière réelle "pointée". Ce thorme de comparaison nous est dictée par les besoins de la preuve du théorème 8 (cf. section 3).

Théorème 5. Soit (X, x_0) un espace pointé. Alors, le sous-complexe différentiel de Banach $C^{\ell_1}_{*,x_0}(X, \mathbf{R}) \subset C^{\ell_1}_{*}(X, \mathbf{R})$, qui est engendré par tous les simplexes singuliers de X dont tous les sommets sont confondus avec x_0 est homotopiquement équivalent à $C^{\ell_1}_{*}(X, \mathbf{R})$.

La démonstration du théorème consiste à construire un morphisme $r_* \ : C^{\ell_1}_{*}(X, \mathbf{R}) \to C^{\ell_1}_{*,x_0}(X, \mathbf{R})$ qui réalise une inverse homotopique de l'inclusion canonique $i_* \ : C^{\ell_1}_{*,x_0}(X, \mathbf{R}) \subset C^{\ell_1}_{*}(X, \mathbf{R})$. Pour le faire, nous allons appliquer le résultat du théorème 4 pour prolonger l'inverse de i_* qui est donné en dimension $* = 1$ par la transformation naturelle de Hurewicz

$$\begin{array}{cccc} r_1 \ : & C^{\ell_1}_{1}(X, \mathbf{R}) & \to & C^{\ell_1}_{1,x_0}(X, \mathbf{R}) \\ & \sigma & \to & \lambda_{\sigma(1)} \star \sigma \star \lambda^{-1}_{\sigma(0)} \end{array}$$

où $\lambda_x \ : [0, 1] \to X$ est un système de chemins fixés d'origine le point base $x_0 \in X$ et d'extrémité $x \in X$. Quand $x = x_0$, on prend le chemin $\lambda_{x_0} = x_0$ constant.

Pour prolonger la transformation naturelle uniformément bornée r_1 en dimension $* > 1$, il suffit qu'on démontre d'abord les affirmations suivantes qui sont exigées par les hypothèses du théorème 4.

Affirmation 4. *Le foncteur $\mathcal{T}_0 = C^{\ell_1}_{n,x_0}(-, \mathbf{R})$ est fortement représentable.*

Démonstration. Dans cette preuve, pour un espace pointé (X, x_0) on désignera par $\widehat{C}^{\ell_1}_{n,x_0}(X, \mathbf{R})$ l'espace de Banach défini dans la preuve du théorème 1.

Soit $\sigma \ : \triangle^n \to X$ un n-simplexe singulier qui envoie les sommets de Δ^n sur le point base x_0. Notons que si on désigne par $\bar{\sigma} \ : \bar{\triangle}^n \to X$ la factorisation de σ via l'application d'identification $\pi_n \ : \triangle^n \to \overline{\triangle}^n$ (i.e. $\sigma = \bar{\sigma} \circ \pi_n$), comme on a $\pi_n \in C^{\ell_1}_{n,*}(\overline{\triangle}^n, \mathbf{R})$, on voit alors que l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} \zeta^n_X & : C^{\ell_1}_{n,x_0}(X, \mathbf{R}) & \to & \widehat{C}^{\ell_1}_{n,x_0}(X, \mathbf{R}) \\ & \sigma & \to & (\sigma, \pi_n) \end{array}$$

est continue et de norme $\| \zeta^n_X \| \leq 1$. Ainsi, puisqu'on a la relation $\theta_{\mathcal{T}0}(X) \circ \zeta^n_X = id$, il en résulte que ζ^n définit une représentation forte du foncteur $C^{\ell_1}_{n,x_0}(-, \mathbf{R})$. $\square$

Affirmation 5. *Si $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble des modèles constitué par tous les n-simplexes standard Δ^n, alors le foncteur admissible $C_*^{\ell_1}(-, \mathbf{R}) \to$ $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ est $\mathcal{M}$ -uniformément fermé (déf. 4).*

Démonstration. On désigne par $P_* : C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \to C_{*+1}^{\ell_1}(X \times [0,1], \mathbf{R})$ le morphisme qui associe à un n-simplexe singulier σ^n la $(n+1)$-chaîne définie par la décomposition du prisme $P^{n+1}(\sigma^n) = \sigma^n \times [0,1]$ en $(n+1)$-simplexes standard orientés. Notons que maintenant chaque composante P_n est un opérateur linéaire continu de norme $\| P^n \|_1 \leq n+1$, et que si $H : X \times [0,1] \to X$ est une homotopie qui relie l'identité de l'espace X a la constante $x_0 \in X$, il en rsulte que le morphisme $\Lambda_* = H_* \circ P_* :$ $C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \to C_{*+1}^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$ réalise une homotopie contractante continue (i.e. $\Lambda_{*-1} \circ \partial_* + \partial_{*+1} \circ \Lambda_* = id_*$). Ainsi, si on observe que la restriction $s_* = \Lambda_{*|}$ sur le sous-espace de Banach $Im(\partial_{*+1}) = Ker(\partial_*)$ définit une section continue pour l'opérateur $\partial_{*+1} : C_{*+1}^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \to C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$ (ie. $\partial_{n+1} \circ s_n =$ id) on en tire l'inégalité :

$$\forall z_n \in Im(\partial_{n+1}), \| s_n(z_n) \|_1 \leq (n+1) \| z_n \|_1$$

qui nous montre que $C_*^{\ell_1}(-, \mathbf{R})$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé. $\square$

3. Théorème de Zilber-Eilenberg et produits en homologie ℓ_1 -singulire

Utilisant la théorie des modèles acycliques exposée dans la première section, nous allons démontrer le théorème de type Zilber-Eilenberg en homologie ℓ_1 qui s'nonce comme suit :

Théorème 6. Pour tout couple d'espaces X et Y il existe une équivalence de complexes différentiels de Banach entre
$C_*^{\ell_1}(X \times Y, \mathbf{R})$ et $C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} C_*^{\ell_1}(Y, \mathbf{R})$.

Le symbole $\widehat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel projectif complété dont la définition et l'existence sont données dans [9] ch. I, prop 1 p.28.

Dans cette section, le résultat du théorème 7 nous permet de définir une structure de cogèbre diffrentielle de Banach coassociative sur le complexe différentiel $C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$. Ceci, par la suite, permet de dfinir des produits cap et cup qui sont ncessaires pour noncer le thorme de Brown ; ils interviennent notamment dans l'expression de la différentielle tordue.

3.1. Preuve du théorème de Zilber-Eilenberg

Dans la catégorie des espaces topologiques produits $\mathbf{A} = \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$, on considère l'ensemble des modèles $\mathcal{M}$ constitu par les produits cartésiens, $\triangle^n \times \triangle^m$. De mme, par $\mathcal{P} \ : \mathbf{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ et $\mathcal{T} \ : \mathbf{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ nous désignerons les foncteurs admissibles qui associent à un d'objet $(X, Y) \in \mathbf{A}$ respectivement les complexes différentiels de Banach $\mathcal{P}(X, Y) = C_*^{\ell_1}(X \times Y, \mathbf{R})$ et $\mathcal{T}(X, Y) = C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} C_*^{\ell_1}(Y, \mathbf{R})$.

Affirmation 6. *Les foncteurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont fortement représentables (déf. 3).*

Démonstration. 1) Soit $(\widehat{\mathcal{T}}, \theta_{\mathcal{T}})$ le couple associé au foncteur admissible $\mathcal{T}$ (cf. th. 1). Pour un couple (X, Y), d'espaces considérons l'application linéaire continue :

$$\zeta_{(X,Y)} \ : \ \mathcal{T}(X, Y) \ \to \ \widehat{\mathcal{T}}(X, Y)$$

définie sur les générateurs par $\zeta_{(X,Y)}(\sigma_1, \sigma_2) = ((\sigma_1, \sigma_2), e_m \otimes e_n)$ où e_m et e_n désignent les applications identiques des simplexes euclidiens $\triangle^m$ et $\triangle^n$ respectivement et où (σ_1, σ_2) désigne un (m, n)-simplexe singulier de (X, Y).

Puisque $\zeta_{(X,Y)}$ est un opérateur linéaire continu de norme $\| \zeta_{(X,Y)} \| \leq 1$ et comme on sait que l'opérateur $\theta_{\mathcal{T}}(X, Y) \ : \widehat{\mathcal{T}}(X, Y) \to \mathcal{T}(X, Y)$ est défini par l'expression (cf. th. 1. b) :

$$\theta_{\mathcal{T}}(X, Y)((\sigma_1, \sigma_2), e_m \otimes e_n) = \mathcal{T}(\sigma_1, \sigma_2)(e_m \otimes e_n) = (\sigma_1, \sigma_2)$$

on en déduit la relation $\theta_{\mathcal{T}} \circ \zeta_{(X,Y)} = id$ qui montre que $\zeta \ : \mathcal{T} \to \widehat{\mathcal{T}}$ est une représentation forte du foncteur $\mathcal{T}$.

2) Désignons par $(\widehat{\mathcal{P}}, \theta_{\mathcal{P}})$ le couple associé au foncteur $\mathcal{P}$ (cf. th. 1). Puis, pour un couple d'espaces (X, Y) considérons l'application linéaire continue, $\xi_{(X,Y)} \ : \mathcal{P}(X, Y) \to \widehat{\mathcal{P}}(X, Y)$ définie sur les générateurs par, $\xi_{(X,Y)}(\sigma) = ((\sigma_1, \sigma_2), \delta_n)$; où σ_1 et σ_2 désignent les composantes du n-simplexe singulier $\sigma \ : \triangle^n \to X \times Y$ et où $\delta_n \ : \triangle^n \to \triangle^n \times \triangle^n$ désigne l'application diagonale.

Ainsi, avec ces notations, comme en 1) on vérifie aisément que l'opérateur linéaire $\xi_{(X,Y)}$ est de norme $\| \xi_{(X,Y)} \| \leq 1$ et qu'on a la relation $\theta_{\mathcal{P}} \circ \xi_{(X,Y)} = id$ qui signifie que $\xi : \mathcal{P} \to \widehat{\mathcal{P}}$ est une représentation forte du foncteur $\mathcal{P}$. $\square$

Affirmation 7. *Les foncteurs admissibles $\mathcal{T}, \mathcal{P}\ : \mathbf{A} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ sont acycliques sur l'ensemble des modles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$-uniformément fermés.*

Démonstration. On construit des homotopies contractantes comme dans la preuve de l'affirmation 4. □

Démonstration du théorème 7 : Observons que, pour tout couple d'espaces (X, Y), les applications $\phi_0(X, Y)\ : \mathcal{P}(X, Y) \to \mathcal{T}_0(X, Y)$ et $\Psi_0(X, Y)\ : \mathcal{T}_0(X, Y) \to \mathcal{P}_0(X, Y)$ définie respectivement par $(x, y) \to x \otimes y$ et $x \otimes y \to (x, y)$ induisent deux transformations naturelles $\Psi_0\ : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{P}_0$ et $\Phi_0\ : \mathcal{P}_0 \to \mathcal{T}_0$ qui sont $\mathcal{M}$-uniformément bornées et qui vérifient les identités : $\Phi_0 \circ \Psi_0 = id$ et $\Psi_0 \circ \Phi_0 = id$. Ainsi, suivant le résultat du théorème 4, on peut prolonger Φ_0 et Ψ_0 en deux transformations naturelles $\Psi\ : \mathcal{T} \to \mathcal{P}$ et $\Phi\ : \mathcal{P} \to \mathcal{T}$ homotopiquement équivalentes. □

3.2. Structure de cogèbre diffrentielle de Banach

Comme dans le cas de l'homologie singulière réelle, en utilisant la théorie des modèles acycliques exposée ci-dessus dans la catégorie des complexes différentiels de Banach, on vérifie que la transformation naturelle d'Alexander-Whiteny qui est définie par l'expression,

$$AW_n(X, Y)\ : C_n^{\ell^1}(X \times Y, \mathbf{R}) \to \bigoplus\nolimits_{p+q=n} C_p^{\ell^1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} C_q^{\ell^1}(Y, \mathbf{R})$$
$$\sigma_n = (\sigma_n^1, \sigma_n^2) \to \sum_{i=0}^{i=n} \partial^{n-i} \sigma_n^1 \otimes \partial_0^i \sigma_n^2$$

est une équivalence de complexes différentiels de Banach dont l'inverse homotopique est réalisé par la transformation naturelle de Maclane-Eilenberg donnée par ,

$$ME_n(X, Y)\ : C_p^{\ell^1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} C_q^{\ell^1}(Y, \mathbf{R}) \to C_{p+q}^{\ell^1}(X \times Y, \mathbf{R})$$
$$l_p \otimes k_q \qquad \to$$
$$\sum\nolimits_{(\mu,\nu)} (-1)^{\varepsilon(\mu)} (s_{\mu_q} \circ \cdots s_{\mu_1}(l_p), s_{\nu_p} \circ \cdots s_{\nu_p}(k_q))$$

où ∂_i désigne le i-ième opérateur de face d'un simplexe singulier, $\partial^{n-i} = \partial_{i+1} \circ \cdots \circ \partial_n$ et $\partial_0^i = \partial_0 \circ \cdots \circ \partial_0$ i-fois. Tandis que le symbole $\varepsilon(\mu) = \sum\limits_{i=1}^{i=p} [\mu_i - (i-1)]$ et s_i les opérations de dégénérescence.

Maintenant, si on désigne par $\triangle_X(x) = (x, x)$ l'application diagonale de l'espace X, en considérant l'opérateur linéaire continu

$$D_*(X) : C_*^{l^1}(X, \mathbf{R}) \overset{(\Delta_x)_*}{\to} C_*^{l^1}(X\mathrm{x}X, \mathbf{R}) \overset{AW_*(X,X)}{\to} C_*^{l^1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} C_*^{l^1}(X, \mathbf{R}),$$

on obtient une *approximation diagonale* qui permet de munir le complexe $C_*^{\ell^1}(X,\mathbf{R})$ d'une structure de cogèbre différentielle de Banach coassociative : $(D_* \otimes id) \otimes D_* = (id \otimes D_*) \otimes D_*$.

De même, si pour un espace pointé (X, x_0) on désigne par $\Omega(X, x_0)$ l'espace des lacets d'origine x_0 et si par $m\ : \Omega(X,x_0)\times\Omega(B,x_0) \to \Omega(B,x_0)$ on note la composition des lactes dans X, alors en composant la transformation naturelle de Eilenberg-Maclane

$$ME_*\ : C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R})\widehat{\otimes}C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R}) \to C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0)\times\Omega(B,x_0),\mathbf{R})$$

avec le morphisme $\widetilde{\mu}_* = C_*^{\ell_1}(m,\mathbf{R})$, on définit ainsi une application linéaire continue

$$\mu = \widetilde{\mu}_* \circ ME_*\ : C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R})\widehat{\otimes}C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R}) \longrightarrow C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R})$$

qui induira par la suite une structure d'algèbre différentielle de Banach graduée.

Enfin, notons que sur le dual topologique $C_b^*(X,\mathbf{R}) = \mathcal{L}(C_*^{\ell_1}(X,\mathbf{R});\mathbf{R})$ on pourra définir une structure d'algèbre différentielle de Banach en prenant comme multiplication l'opérateur linéaire continue,

$$\begin{aligned}\mu_x \quad : \quad & C_b^*\left(X,\mathbf{R}\right)\widehat{\otimes}C_b^*\left(X,\mathbf{R}\right) \underrightarrow{i_*} \mathcal{L}\left\{C_*^{l_1}\left(X,\mathbf{R}\right)\widehat{\otimes}C_*^{l_1}\left(X,\mathbf{R}\right),\mathbf{R}\right\} \\ & \underrightarrow{D^*\left(X\right)} C_b^*\left(x,\mathbf{R}\right)\end{aligned}$$

qui compose le morphisme canonique i_* défini par tensorisation des formes linéaires continues l'opérateur transposé D^* de la comultiplication D_* définie ci-dessus.

3.3. Généralités sur le produit Cap et Cup

Dans ce paragraphe, étant donné un complexe différentiel de Banach (K_*, ∂_*^K) de degré $r = -1$ et une algèbre réelle de Banach G, on désignera par $C_b^n(K_*, G)$ l'espace de Banach des n-cochaînes bornées $h\ : K_n \to G$ (i.e. opérateur linéaire continue).

Définition 5. *Soient G, N et H trois modules de Banach sur un anneau Λ et soit $\mu\ : G\widehat{\otimes}N \to H$ un opérateur linéaire continu. Soit*

$K_* = \{K_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ *une cogèbre différentielle graduée de Banach réelle dont la comultiplication sera notée,* $\nabla : K_* \to K_* \widehat{\otimes} K_*$.

On définit le cup-produit de deux cochaînes bornées $h \in C_b^*(K_*, G)$ *et* $h' \in C_b^*(K_*, N)$ *par l'expression :*

$$h \cup h' = \mu \circ (h \widehat{\otimes} h') \circ \nabla : K_* \xrightarrow{\nabla_*} K_* \widehat{\otimes} K_*$$

$h \widehat{\otimes} h' \to G \widehat{\otimes} N \xrightarrow{\mu} H$.

De même, étant donnée une chaîne $c \in K_* \widehat{\otimes} N$, *on définit son cap produit avec une cochaîne bornée* $h \in C_b^*(K_*, G)$ *par la formule,* $h \cap c = (id_K \widehat{\otimes} \mu) \circ (id_K \widehat{\otimes} h \widehat{\otimes} id_N) \circ (\nabla \widehat{\otimes} id_N)(c) \in K_* \widehat{\otimes} H$.

Le produit cap et cup qu'on vient de définir pour les complexes différentiels de Banach sont continus en tant qu'opérateurs linéaires et vérifient les propriétés algébriques suivante :

$$
\begin{aligned}
&(3.1) \qquad & d(h \cup h') &= dh \cup h' + (-1)^{deg(h)} h \cup dh' \\
&(3.2) \qquad & \partial(h \cap c) &= dh \cap c + (-1)^{deg(c)-deg(h)} h \cap \partial c \\
&(3.3) \qquad & (h \cup h') \cup h" &= h \cup (h' \cup h") \\
&(3.4) \qquad & (h \cup h') \cap c &= h \cap (h' \cap c).
\end{aligned}
$$

Avec les notations de la définition 5 et en posant $K_* = C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$ et $G = N = H = \Lambda = \mathbf{R}$ nous obtenons un cup-produit sur l'algèbre différentielle de Banach $C_b^*(X, \mathbf{R})$ et un cap-produit sur la cogèbre différentielle de Banach, $C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$.

3.4. Cochaînes bornées tordantes

Dans ce paragraphe, nous allons définir la notion de produit tensoriel projectif *tordu* de deux complexes différentiels de Banach. La torsion des complexes sera faite moyennant une cochaîne bornée "tordante"de degré un.

Définition 6. *Soient* (K_*, ∂_*^K) *une cogèbre différentielle de Banach positive et* (A_*, ∂_*^A) *une algèbre différentielle de Banach positive dont les différentielles* ∂_*^K *et* ∂_*^A *sont de même degré,* $r < 0$.

On définit une cochaîne bornée de degré $p \in \mathbf{N}$ *sur* K_* *à valeurs dans l'algèbre différentielle* A_* *par la donnée d'une suite d'opérateurs linéaires continus notés,* $t_n : K_n \to A_{n-p}$ *où* $t_0 = 0$.

Dans les conditions de la définition, si pour toute cochaîne bornée $t \in C_b^p(K_*, A_*)$ et pour toute chaîne $k \in K_n$ on pose

$$\delta_p(t)(k) = \partial^A_{n-p}(t_n(k)) + (-1)^p t_{n-r}(\partial^K_n(k), \tag{3.5}$$

$$\forall k \in K_n, \forall t \in C_b^p(K_*, A_*)$$

on définit ainsi une différentielle continue de degré r (i.e. $\delta_{p+r} \circ \delta_p = 0$) sur le complexe des cohaînes bornées $C_b^*(K_*, A_*)$. On vérifie facilement que la différentielle δ_* commute au cup-produit dans la formule suivante :

$$\delta(t \cup t') \;=\; \delta(t) \cup t' + (-1)^{deg(t)} t \cup \delta(t') \qquad \forall t, t' \in C_b^*(K_*, A_*). \tag{3.6}$$

En outre, si F_* désigne un A_*-module différentiel de Banach on vérifie aussi qu'on a la formule suivante :

$$d(t \cap x) \;=\; \delta(t) \cap x + (-1)^{deg(t)} t \cap d(x) \qquad \forall x \in K_* \widehat{\otimes} F_* \tag{3.7}$$

où $d_* = \partial^K_* + \partial^F_*$ désigne la différentielle totale du complexe produit tensoriel projectif $K_* \widehat{\otimes} F_*$.

Affirmation 8. *Soient K_* un complexe différentiel de Banach et A_* une algèbre différentielle de Banach qui ont le même degré $r = -1$. Pour tout A_*-module différentiel de Banach F_* de degré $r = -1$ et une cochaîne bornée $t \in C_b^1(K_*, A_*)$ la correspondance*

$$\begin{array}{rcc} d_t \;: K_* \widehat{\otimes} F_* & \to & K_* \widehat{\otimes} F_* \\ x & \to & d(x) + t \cap x \end{array}$$

est un morphisme continu de degré $r' = -1$ et qui vérifie la relation, $d_t \circ d_t = \delta(t) + t \cup t$.

Proof. En effet, puisque $d_* = \partial^K_* + \partial^F_*$ est une différentielle sur le complexe produit tensoriel projectif $K_* \widehat{\otimes} F_*$ et puisque le cap produit $t\cap$ est un opérateur continu, il en résulte donc que l'opérateur d_t est continu. D'autre part, si on utilise les propriétés algébriques du produit cap et cup et la formule (3.7) on obtient pour tout $x \in K_* \widehat{\otimes} F_*$:

$$\begin{aligned} d_t \circ d_t(x) &= d_t(d(x) + d_t(t \cap x) \\ &= t \cap d(x) + d(t \cap x) + t \cap (t \cap x) \\ &= t \cap d(x) + [\delta(t) \cap x + (-1) t \cap d(x)] + (t \cup t) \cap x \\ &= (\delta(t) + t \cup t) \cap x \end{aligned}$$

□

Définition 7. *On appelle cochaîne bornée tordante tout élément $t \in C_b^1(K_*, A_*)$ solution de l'equation, $\delta(t) + t \cup t = 0$. Autrement dit, si les composantes t_p de la transformation naturelle t vérifient les équations récurrentes :*

$$t_{n-1} \circ \partial_n^K - \partial_{n-1}^A \circ t_n + \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i t_i \cup t_{n-i} = 0, \qquad \forall n \geq 1$$

Il est clair qu'en conséquence de l'affirmation 8, on voit que si $t \in C_b^1(K_*, A_*)$ est une cochaîne bornée tordante il en résulte que le morphisme $d_t = d + t\cap \ : K_*\widehat{\otimes}F_* \to K_*\widehat{\otimes}F_*$ est une différentielle de degré $r = -1$. Dans le reste de ce travail, nous désignerons ce complexe différentiel par $(K_*\widehat{\otimes}_t F_*, d_t)$ et nous l'appellerons **complexe différentiel tordu de Banach**.

Dans la section 4, nous allons considérer la suite spectrale associée à une filtration diffrentielle croissante dfinie sur le complexe différentiel tordu $(K_*\widehat{\otimes}_t F_*, d_t)$ pour démontrer certains résultats importants en homologie ℓ_1-singulière réelle.

Enfin, notons qu'on peut définir deux actions des cochaînes bornées tordantes sur les complexes différentiels tordus de Banach. En effet, la première action s'obtient en composant du côté droite une cocahaîne bornée tordante $t \in C_b^1(K_*, A_*)$ par un morphisme d'algèbres différentielles de Banach $\varphi \ : A_* \to A'_*$:

$$(\varphi, t) \longrightarrow \varphi \circ t \in C_b^1(K_*, A'_*)$$

La seconde opération, nous l'obtenons en composant t du côté gauche par un morophisme de complexes différentiels de Banach $f_* \ : K'_* \to K_*$:

$$(f_*, t) \longrightarrow t \circ f_* \in C_*^1(K'_*, A_*)$$

3.5. Existence d'une cochaîne bornée tordante

Dans ce paragraphe, à tout espace connexe par arcs pointé (B, x_0) nous allons associer une cochaîne bornée tordante $t_B \in C_b^1(B, C_*^{\ell_1}(\Omega(B, x_0), \mathbf{R})$ où sur le complexe différentiel $C_*^{\ell_1}(\Omega(B, x_0), \mathbf{R})$ nous allons mettre la structure d'algèbre différentielle de Banach graduée décrite au paragraphe 3.2 ci-dessus.

Théorème 7. Pour tout espace connexe par arcs pointé (B, x_0), il existe une cochaîne tordante bornée $t_{_B} \in C_b^1(B, C_*^{\ell_1}(\Omega(B, x_0), \mathbf{R}))$ telle que :

1. Pour tout n-simplexe singulier constant σ de B, $t_n(\sigma) = 0$.

2. Pour tout 1-simplexe singulier σ de (B, x_0) on a $t^1_{_B}(\sigma) = \sigma - \sigma_0 \in C^{\ell_1}_0(\Omega(B, x_0), \mathbf{R}))$ où σ_0 un 1-simplexe constant fixé dans (B, x_0).

Pour démontrer le théorème nous allons appliquer la théorie des modèles acycliques pour prolonger la transformation naturelle $t^1_{_B} \ : C^{\ell_1}_1(B, \mathbf{R}) \to C^{\ell_1}_0(\Omega(B, x_0), \mathbf{R})$ en dimension supérieure. Pour cela, dans ce paragraphe, on désignera par $\mathcal{M}$ l'ensemble des modèles formés par les n-simplexes singuliers $\overline{\triangle}^n$ obtenus par identification des sommets e_0, $e_1, \cdots e_n$ du n-simplexe standard $\triangle^n$ à un point $*$, et on note par $\pi_n \ : \triangle^n \to \overline{\triangle}^n$ la surjection canonique.

Affirmation 9. *Pour tout modèle $M \in \mathcal{M}$ le complexe différentiel de Banach $C^{\ell_1}_*(\Omega(M, *), \mathbf{R})$ est acyclique : $H^{\ell_1}_n(\Omega(M, *), \mathbf{R}) = 0, \forall n \geq 1$.*

Démonstration. En effet, puisque l'espace $M = \overline{\triangle}^n$ a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles ses groupes d'homotopie de dimension $k > 1$ sont nuls : $\pi_k(M) = 0, \forall k > 1$. Ainsi, en utilisant la suite exacte longue d'homotopie associée à la fibration faible de Serre $\Omega(M, x_0) \hookrightarrow EM(*) \to M$ on déduit que $\pi_k(\Omega(M, *)) = \pi_{k+1}(M) = 0, \forall k > 0$. Par conséquent, les composantes connexe par arcs de l'espace des lacets $\Omega(M, *)$ sont faiblement contractiles.

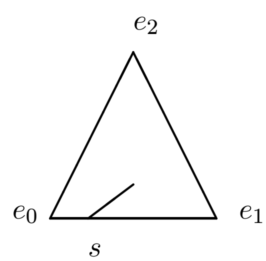
Ceci suffit pour conclure que le complexe différentiel de Banach $C^{\ell_1}_*(\Omega(M, *), \mathbf{R})$ est acyclique, car on sait que l'homologie ℓ_1-singulière réelle est additive et invariante par homotopie. $\square$

Corollaire 4. *Le foncteur $C^{\ell_1}_*(\Omega(-, *), \mathbf{R})$ est $\mathcal{M}$ -uniformment ferm.*

Affirmation 10. *Il existe une cochaîne bornée $t^2_{_B} \ : C^{\ell_1}_2(B, \mathbf{R}) \to C^{\ell_1}_1(\Omega(B, x_0), \mathbf{R})$ qui vérifie la relation $\delta(t^2_{_B}) - t^1_{_B} \cup t^1_{_B} = 0$ où $t^1_{_B} \ : C^{\ell_1}_1(B, \mathbf{R}) \to C^{\ell_1}_0(\Omega(B, x_0); \mathbf{R})$ désigne la cochaîne bornée définie au théorème 8. En fait, $t^2 \ : C^{\ell_1}_2(-, \mathbf{R}) \to C^{\ell_1}_1(\Omega(-, x_0), \mathbf{R})$ est une transformation naturelle uniformément bornée.*

Démonstration. Dans cette preuve, nous n'allons travailler qu'avec le sous-complexe différentiel $C_{*,x_0}(^{\ell_1}(X,\mathbf{R})$ qui est un rétracte par déformation de $C_*^{\ell_1}(X,\mathbf{R})$ d'après le théorème 6.

Soit $\sigma\ :\triangle^2\to B$ un 2-simplexe singulier tel que $\sigma(e_0)=\sigma(e_1)=\sigma(e_2)=x_0$. Pour chaque point $s\in[e_0,e_1]$ on désigne par α_s le chemin affine par morceaux du triangle standard $\triangle^2$ qui joint le sommet e_0 au point s et le point s au sommet e_2 (Voir figure).



Maintenant observons que, si on pose $k(\sigma)(s)=\sigma\circ\alpha_s\ :I\to B$, nous obtenons un opérateur linéaire continu (i.e. une 2-cochaîne bornée) :

$$\begin{array}{rcl} k\ :C_2^{\ell_1}(B,\mathbf{R}) & \to & C_1^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R}) \\ \sigma & \to & k(\sigma). \end{array}$$

Ainsi, puisque le bord $\partial(k(\sigma))=k(\sigma)(1)-k(\sigma)(0)=\partial_2(\sigma)\star\partial_0(\sigma)-\partial_1(\sigma)$ et puisque le cup-produit, $t_1\cup t_1(\sigma)=\mu(t_1\widehat{\otimes}t_1)\circ D_2(\sigma)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} t_1\cup t_1(\sigma) &= (\partial_2(\sigma)-\sigma_0)\star(\partial_0(\sigma)-\sigma_0) \\ &= \partial_2(\sigma)\star\partial_0(\sigma)-\partial_0(\sigma)-\partial_2(\sigma)+\sigma_0 \end{aligned}$$

Enfin, si pour tout 2-simplexe singulier σ on pose $t_B^2(\sigma)=k(\sigma)-\sigma_0$, on obtient la relation recherchée :

$$\begin{aligned} \partial(t_B^2(\sigma)) &= \partial(k(\sigma))=\partial_2(\sigma)\star\partial_0(\sigma)-\partial_1(\sigma) \\ &= t_1\cup t_1(\sigma)+\partial_0(\sigma)+\partial_2(\sigma)-\partial_1(\sigma)-\sigma_0 \\ &= t_1\cup t_1(\sigma)+(\partial_0(\sigma)-\sigma_0)-(\partial_1(\sigma)-\sigma_0)+(\partial_2(\sigma)-\sigma_0) \\ &= t_1(\partial\sigma)+t_1\cup t_1(\sigma). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque pour tout espace pointé (B, x_0) la norme $\| t^2_B \| \leq 2$, cela implique que $t^2 : C^{\ell_1}_2(-, \mathbf{R}) \to C^{\ell_1}_1(\Omega(-, *); \mathbf{R})$ est une transformation naturelle uniformément bornée. $\square$

Preuve du théorème 8 : Pour prolonger la transformation naturelle uniformément bornée t^2 en une cochaîne bornée tordante, nous allons procéder par récurrence sur la dimension. Supposons donc que la cochaîne tordante bornée t est construite jusqu'à la dimension $n-1$.

Soit $\widehat{C}^{\ell_1}_n(-, \mathbf{R})$ le foncteur admissible associé à $C^{\ell_1}_n(-, \mathbf{R})$ par le théorème 1. Pour un couple $(\phi, m) \in \widehat{C}^{\ell_1}_n(B, \mathbf{R})$ où $\phi : \overline{\triangle}^n \to B$ est un simplexe singulier et $m \in C^{\ell_1}_n(B, \mathbf{R})$ on pose :

$$x_{n-2} = (t_{n-1} \circ \partial - \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i t_i \cup t_{n-i})(m).$$

Puisque t est une cochaîne bornée tordante de dimension $n-1$ ceci implique que la chaîne $x_{n-2} \in Z^{\ell_1}_{n-2}(\Omega(\overline{\triangle}^n, *), \mathbf{R})$ est un $(n-2)$-cycle (i.e. $\partial x_{n-2} = 0$). D'autre part, puisqu'on sait que le complexe différentiel $C^{\ell_1}_*(\Omega(\overline{\triangle}^n, *); \mathbf{R})$ est acyclique (cf. Aff. 9) et que le foncteur admissible $C^{\ell_1}_*(\Omega(-), \mathbf{R})$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé (cf. cor. 3) on peut trouver un réel $k_{\mathcal{M}} > 0$ et une chaîne $x_{n-1} \in C^{\ell_1}_{n-1}(\Omega(\bar{\triangle}^n, *), \mathbf{R})$ tels que

$$\partial(x_{n-1}) = x_{n-2}$$

et $\qquad \| x_{n-1} \|_1 \leq k_{\mathcal{M}} \| x_{n-2} \|_1$.

Maintenant, si on pose $\widehat{t}^n_B(\phi, m) = (\phi, x_{n-1})$ on obtient une transformation naturelle uniformément bornée $\widehat{t}^n_B : \widehat{C}^{\ell_1}_n(-, \mathbf{R}) \to \widehat{C}^{\ell_1}_n(\Omega(-), \mathbf{R})$ qui permet de définir un prolongement de t^{n-1} en dimension n en posant, $t^n_B = \theta_{C^{\ell_1}_{n-1}(\Omega(-), \mathbf{R}) \circ \widehat{t}^n_B \circ \zeta^n_B}$ où ζ^n_B désigne la représentation forte construite dans la preuve de l'affirmation 5, tandis que ; $\theta_{C^{\ell_1}_{n-1}(\Omega(-), \mathbf{R})}$ désigne la transformation naturelle uniformément bornée associée au foncteur $C^{\ell_1}_*(\Omega(-), \mathbf{R})$ (cf. th. 1).

4. Théorème de Brown en homologie ℓ_1

Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration dont la base est connexe par arcs pointée en $x_0 \in B$. Rappelons, qu'en utilisant le théorème de relèvement des homotopies via la projection p, on peut faire agir les simplexes de l'espace des lacets $\Omega(B, x_0)$ sur ceux de la fibre $F = p^{-1}(x_0)$ (transport le long des lacets). Cette action permet de munir le complexe différentiel $C_*^{\ell_1}(F,\mathbf{R})$ d'une structure de $C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R})$-module différentiel de Banach. D'autre part, au paragraphe précédent, rappelons que nous avons associé à l'espace pointé (B,x_0) une cochaîne bornée tordante $t_{_B} \in C_b^1(B, C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0),\mathbf{R}))$ qui, avec nos données actuelles, nous permet de définir une différentielle tordue sur le complexe produit projectif $C_*^{\ell_1}(B,\mathbf{R})\widehat{\otimes} C_*^{\ell_1}(F,\mathbf{R})$ en posant : $d_t = \partial \otimes id + id \otimes \partial + t\cap$. D'où le théorème suivant qui est une version en homologie ℓ_1-singulière réelle du théorème de E. Brown [3] dont la preuve est l'objet principal de cette section.

Théorème 8. Soit $\zeta\ : F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration faible au sens de Serre dont la base est connexe par arcs pointée en x_0. Soit $t_{_B} \in C_b^1(B, C_*^{\ell_1}(\Omega(B,x_0);\mathbf{R})$ une cochaîne bornée tordante associée à la base (B,x_0) de ζ (th. 8).

Alors il existe une équivalence homotopique entre le complexe différentiel de Banach des chaînes ℓ_1-singulières réelles $(C_*^{\ell_1}(E,\mathbf{R}),\partial_*)$ et le complexe produit tensoriel projectif tordu $(C_*^{\ell_1}(B,\mathbf{R})\widehat{\otimes}_t C_*^{\ell_1}(F,\mathbf{R}), d_{_t})$.

4.1. Les consquences du thorme de Brown

Avant de nous pencher sur la preuve du théorème, dans ce paragraphe nous allons d'abord dégager quelques résultats importants en l'homologie ℓ_1-singulière réelle en utilisant les suites spectrales associes au complexe produit (double) $(C_*^{\ell_1}(B,\mathbf{R})\widehat{\otimes}_t C_*^{\ell_1}(F,\mathbf{R}), d_{_t})$.

Comme dans le cas des complexes différentiels non topologisés, du moment qu'on a un complexe différentiel produit positif $(C_*^{\ell_1}(B,\mathbf{R})\widehat{\otimes}_t C_*^{\ell_1}(F,\mathbf{R}), d_{_t}) = (K_*\widehat{\otimes}_t F_*, d_t)$ on peut lui associer une suite spectrale $(E^r_{*,*}, d_r)$ qui converge vers l'homologie du complexe différentiel total $Tot(C_*^{\ell_1}(B,\mathbf{R})\widehat{\otimes}_t C_*^{\ell_1}(F,\mathbf{R}))$ (cf. [6] ou [13]). Les termes de la suite spectrale $E^r_{*,*}$ nous les obtenons en considérant la filtration différentielle croissante $\mathcal{F}_n = \bigoplus_{q=0}^{q=n} K_q\widehat{\otimes}_t F_* \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$:

$$E^0_{p,q} = K_p\widehat{\otimes} F_q \tag{4.1}$$

$$E^{r+1}_{p,q} = H_{p,q}(E^r_{*,*}, d_r) = \frac{Ker(d_r\ : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1})}{Im(d_r\ : E^r_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q})} \tag{4.2}$$

où les différentielles d_r sont induites par la différentielle tordue $d_t = d_* + t\cap$ par passage au quotient. L'aboutissement $E^\infty_{*,*}$ de la suite spectrale

$(E^r_{*,*}, d_*)$ est défini par le quotient :

$$E^\infty_{p,q} = \frac{Im(i_p \ : H_{p+q}(\mathcal{F}_p) \to H_{p+q}(K_* \widehat{\otimes}_t F_*))}{Im(i_{p-1} \ : H_{p+q}(\mathcal{F}_{p-1}) \to H_{p+q}(K_* \widehat{\otimes}_t F_*))} \tag{4.3}$$

où i_p est le morphisme induit par l'inclusion canonique $\mathcal{F}_p \subseteq K_* \widehat{\otimes} F_*$.

Notons que la différentielle d_0 du terme $E^0_{*,*}$ est donnée par l'expression $d_0(x \otimes f) = x \otimes \partial f$. En général, quand le rang $r > 0$, il est très difficile d'expliciter la différentielle d_r. Toutefois, par un calcul élémentaire basé seulement sur le fait que tous les termes de la suite spectrale $(E^r_{*,*}, d_r)$ vivent dans le premier quadrant, nous pouvons établir aisément qu'on a (voir [13]) :

a) une suite de surjections canoniques, $s \ : H^{\ell_1}_n(F, \mathbf{R}) \to E^2_{0,n} \to E^3_{0,n} \to \cdots \to E^{n+1}_{0,n}$;
b) une suite d'injections canoniques, $j \ : E^{n-1}_{n,0} \to \cdots \to E^2_{n,0} = H^{\ell_1}_n(B, \mathbf{R})$;
c) et un diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
0 \to & E^\infty_{n+1,0} & \to & E^{n+1}_{n+1,0} & \overset{d_{n+1}}{\to} & E^{n+1}_{0,n} & \to & E^\infty_{0,n} \to 0 & \\
 & \uparrow & & j \downarrow & & s \uparrow & & \downarrow & \\
 & H^{\ell_1}_{n+1}(E, \mathbf{R}) & \overset{p_*}{\to} & H^{\ell_1}_{n+1}(B, \mathbf{R}) & & H^{\ell_1}_n(F, \mathbf{R}) & \overset{i_*}{\to} & H^{\ell_1}_n(E, \mathbf{R}) &
\end{array}$$

Corollaire 5. *Si la fibre F d'une fibration $p \ : E \to B$ est connexe par arcs et a un groupe fondamental $\pi_1(F)$ moyennable alors la projection p induit un isomorphisme isométrique en homologie ℓ_1-singulière réelle.*

Proof. Puisque le groupe fondamental $\pi_1(F)$ est moyennable, d'après le théorème 5 de Morita-Matsumoto [12], le complexe différentiel $C^{\ell_1}_*(F, \mathbf{R})$ est acyclique. Par conséquent, si on utilise utilise la suite spectrale $(E^r_{*,*}, d_r)$ décrite ci-dessus, on voit que dans ce cas le premier terme $E^1_{p,q} = 0$ si $q > 0$ et que $E^1_{p,0} = C^{\ell_1}_p(B, \mathbf{R})$ (noter que $d_0(x \otimes f) = x \otimes \partial f$). Ceci signifie que la suite spectrale dégénère et que par suite $p_* \ : E^\infty_n = H_n(E, \mathbf{R}) \to H_n(C^{\ell_1}_*(B, \mathbf{R}))$ est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 6. *Les espaces d'homologie ℓ_1-singulière réelle d'un espace connexe par arcs X ne dépendent que du groupe fondamental $\pi_1(X)$. C'est-à-dire il existe un isomorphisme isomtrique entre $H_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R})$ et $H_*^{\ell_1}(K(\pi_1(X), 1); \mathbf{R})$.*

Démonstration. On désigne par Π le groupe fondamental de l'espace X et par $\widetilde{X}$ son revêtement simplement connexe. On désigne aussi par $E\Pi \to K(\Pi, 1)$ le revêtement universel de Elinberg-Maclane associé au groupe Π. Maintenant, avec ces notations, si on applique le théorème 9 aux deux fibrations de Borel associées à l'action du groupe Π sur $\widetilde{X}$ et sur $E\Pi$,

$$\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{X} \times_{\Pi} E\Pi \xrightarrow{p_{\Pi}} K(\Pi, 1) \text{et}$$

$$E\Pi \hookrightarrow \widetilde{X} \times_{\Pi} E\Pi \xrightarrow{p_X} X$$

on obtient les équivalences de complexes différentiels de chaînes ℓ_1-singulières réelles :

$$\begin{array}{rcl} C_*^{\ell_1}(\widetilde{X} \times_{\Pi} E\Pi, \mathbf{R}) & \equiv & (C_*^{\ell_1}(K(\Pi, 1), \mathbf{R}) \widehat{\otimes}_t C_*^{\ell_1}(\widetilde{X}, \mathbf{R}), d_t) \\ C_*^{\ell_1}(\widetilde{X} \times_{\Pi} E\Pi, \mathbf{R}) & \equiv & (C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes}_t C_*^{\ell_1}(E\Pi, \mathbf{R}), d_t) \end{array}$$

Ainsi, puisque les espaces $E\Pi$ et $\widetilde{X}$ sont simplement connexes, le corollaire 4 permet de voir que les fibrations p_Π et p_X induisent des isomorphismes isométriques en homologie ℓ_1-singulière réelle,

$$H_*^{\ell_1}(K(\Pi, 1), \mathbf{R}) \xleftarrow{(p_\Pi)_*} H_*^{\ell_1}(\widetilde{X} \times_{\Pi} E\Pi, \mathbf{R}) \xrightarrow{(p_X)_*} H_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}). \ \square$$

À seconde application du thorme 9, nous donnerons des suites exactes en homologie ℓ_1-singulire dont la construction est base sur les suites spectrales.

On commence par le corollaire suivant que l'on peut considrer comme une version duale d'un résultat de Trauber démontré par Gromov en cohomologie borne relle dans [8] (voir aussi [10]).

Corollaire 7. *Si le groupe fondamental de la base d'une fibration $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \to B$ est moyennable alors $i_* : H_*^{\ell_1}(F, \mathbf{R}) \to H_*^{\ell_1}(E, \mathbf{R})$ est surjective.*

Proof. Dans cette preuve, nous allons considérer la seconde filtration différentielle croissante $\mathcal{F}'_n = \bigoplus_{q=0}^{q=n} K_* \widehat{\otimes}_t F_q \subseteq \mathcal{F}'_{n+1}$ pour en tirer une suite spectrale $E'^r_{p,q}$ qui dégénère et converge vers l'homologie ℓ_1-singulière réelle de l'espace total E.

En effet, puisque le groupe fondamental $\pi_1(B)$ est moyennable, le complexe différentiel $C^{\ell_1}_*(B, \mathbf{R})$ est acyclique. Donc, si on le tensorise par les espaces de Banach $C_q(F, \mathbf{R})$ on obtient un complexe différentiel acyclique $C^{\ell_1}_*(B, \mathbf{R}) \widehat{\otimes}_{\mathbf{t}} \mathbf{C^{\ell_1}_q(F, R)} = \mathbf{E'^0_{*,q}}$. Par conséquent, en passant aux espaces d'homologie on voit que $E'^1_{p,q} = 0 = E'^r_{p,q}$ si $p > 0$ et $r > 0$ et que $E'^1_{0,q} = C^{\ell_1}_q(F, \mathbf{R})$. Ainsi, si on applique les termes de la suite spectrale dégénérée $E'^r_{p,q}$ dans le diagramme commutatif dressé ci-dessus, on déduit que le morphisme $i_*\ : H_*(F, \mathbf{R}) \to H_n(E, \mathbf{R})$ est surjectif. □

Corollaire 8. *Une fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ dont la base est connexe par arcs induit une suite exacte de la forme :*

$$H^{\ell_1}_3(E, \mathbf{R}) \xrightarrow{p_*} H^{\ell_1}_3(B, \mathbf{R}) \xrightarrow{d_3} H^{\ell_1}_2(F, \mathbf{R})_{\pi(B)} \xrightarrow{i_*} H^{\ell_1}_2(E, \mathbf{R}) \xrightarrow{p_*} H^{\ell_1}_2(B, \mathbf{R}) \to 0.$$

La suite exacte du corollaire se dgage partir du diagramme que nous avons dress ci-dessus tout en appliquant le fait que $H^{\ell_1}_1(-, \mathbf{R}) = 0$ et le rsultat du lemme :

Lemme 1. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration de base connexe par arcs. On a les propositions suivantes :*

1. $E^2_{n,0} = H^{\ell_1}_n(B, \mathbf{R})$;
2. $E^2_{0,n} = \dfrac{H^{\ell_1}_n(F, \mathbf{R})}{Im(d_1 : E^1_{1,n} \to E^1_{0,n})} := H^{\ell_1}_n(F, \mathbf{R})_{\pi_1(B)}$.

Proof. Nous allons travailler avec la suite spectrale $(E^r_{*,*}, d_r)$ associe la filtration diffrentielle croissante $\mathcal{F}_n = \bigoplus_{q=0}^{q=n} K_q \widehat{\otimes}_t F_* \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$.

1) Puisque sur le terme $E^0_{p,q} = K_p\widehat{\otimes}F_*$ la diffrentielle $d_0(x\otimes y) = x\otimes\partial y$, on a $E^1_{n,0} = C^{\ell_1}_n(B,\mathbf{R})$. Ainsi, par dfinition du second terme $E^2_{*,*}$ on obtient :

$$E^2_{n,0} = \frac{Ker(d_1 : E^1_{n,0} \to E^1_{n-1,0})}{Im(d_1 : E^1_{n+1,0} \to E^1_{n,0})} = H^{\ell_1}_n(B,\mathbf{R}).$$

2) Comme dans le point prcdent, le premier terme $E^1_{0,n} = H^{\ell_1}_n(F,\mathbf{R})$ tandis que le second : $E^2_{0,n} = \dfrac{Ker(d_1 : E^1_{0,n} \to E^1_{-1,n})}{Im(d_1 : E^1_{1,n} \to E^1_{0,n})} = \dfrac{H^{\ell_1}_n(F,\mathbf{R})}{Im(d_1 : E^1_{1,n} \to E^1_{0,n})}$.
□

4.2. Démonstration du théorèm de Brown en homologie ℓ_1 -singulire

Avant de passer à la démonstration du théorème 9, nous fixerons d'abord les notations que nous allons utiliser dans le reste de cette section.

Rappelons que, si pour un espace pointé (X,x_0) on désigne par $E(X,x_0)$ l'espace des chemins d'origine x_0 alors, relativement à la topologie compact-ouvert, on sait que $E(X,x_0)$ est contractile et que l'application d'evaluation $e_X : E(X,x_0) \to X$ qui associe à un chemin $c \in E(X,x_0)$ son extrémité $e_X(c) = c(1)$ définit une fibration faible de Serre dont la fibre homotopique est l'espace des lacets d'origine x_0, $\Omega(X,x_0)$. On désigne par **WFib** la catégorie des fibrations faibles au sens de Serre.

Pour tout couple d'entiers naturels (m,n) on désigne par $\zeta_{m,n}$ la fibration faible définie par :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(\bar{\triangle}^n)\times\triangle^m & \hookrightarrow & X_{m,n} = E(\bar{\triangle}^n)\times\triangle^m & \overset{p_{m,n}}{\to} & \bar{\triangle}^n \\ & & (\alpha,t) & \to & \alpha(1) \end{array}$$

où $\bar{\triangle}^n$ est le n-simplexe singulier obtenu par identification des sommets du simplexe standard euclidien $\triangle^n$. De même, pour tout entier n, on désigne par

$$X_n = \{(\alpha,t) \in E(\bar{\triangle}^n)\times\triangle^n / \ \alpha(1) = \pi_n(t)\}$$

le produit fibré de l'évalution $e_{\bar{\triangle}^n} : E(\bar{\triangle}^n) \to \bar{\triangle}^n$ et de la surjection canonique $\pi_n : \triangle^n \to \bar{\triangle}^n$ (identification). Notons que ceci permet de définir une fibration faible qu'on va noter par ζ_n:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(\bar{\triangle}^n) & \hookrightarrow & X_n & \overset{p_n}{\to} & \triangle^n \\ & & (\alpha,t) & \to & t \end{array}$$

Ci-dessous, pour démontrer le théorème 9, nous allons appliquer les éléments de la théorie des modèles acycliques (cf. th. 4) dans la catégorie **WFib** équipée par l'ensemble des modèles $\mathcal{M} = \{\zeta_{m,n}, \zeta_n / \ m, n \in \mathbf{N}\}$ afin de comparer les deux foncteurs admissibles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{P}_t \ : \mathbf{WFib} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ qui associent respectivement à une fibration faible $\zeta \ : F \hookrightarrow E \to B$ les complexes différentiels de Banach

$$\mathcal{T}(\zeta) = C_*^{\ell_1}(E, \mathbf{R})$$

et $\qquad \mathcal{P}(\zeta)_t = C_*^{\ell_1}(B, \mathbf{R}) \widehat{\otimes}_{t_B} C_*^{\ell_1}(F, \mathbf{R}) où t_B$ désigne une cochaîne tordante associée à l'espace point (B, x_0) (cf. théorème 7).

Pour démontrer que les complexes différentiels $\mathcal{T}(\zeta) = C_*^{\ell_1}(E, \mathbf{R})$ et $P(\zeta)_t$ sont équivalents il suffit qu'on considère le prolongement par continuité (relativement à norme ℓ_1) des équivalences de complexes de chaînes ordinaires

$$\psi \ : C_*(B, \mathbf{R}) \otimes_t C_*(F, \mathbf{R}) \to C_*(E, \mathbf{R})$$

et

$$\phi \ : C_*(E, \mathbf{R}) \to C_*(B, \mathbf{R}) \otimes_t C_*(F, \mathbf{R})$$

construites par E. Brown [3]. Cela nous donne deux transformations naturelles uniformment bornes $\psi_* \ : \mathcal{P}_t \to \mathcal{T}$ et $\phi_* \ : \mathcal{T} \to \mathcal{P}_t$ et dont déjà l'une est l'inverse de l'autre en dimension zéro (i.e. $\psi_0 \circ \phi_0 = id$ et $\phi_0 \circ \psi_0 = id$). Ainsi, si les foncteurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{P}_t$ vrifient toutes les conditions demandes par le théorème 4 on pourra prolonger l'inversibilité homotopique entre ϕ_* et ψ_* en dimension supérieure dans la catgorie des complexes diffrentiels de Banach $\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$.

A Etude du foncteur $\mathcal{T}$

Affirmation 11. *Pour tout couple d'entiers m et n les complexes différentiels $\mathcal{T}(\zeta_{m,n})$ et $\mathcal{T}(\zeta_n)$ sont acycliques. En conséquence, le foncteur admissible $\mathcal{T}$: $\mathbf{WFib} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_{\mathbf{b}}$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé.*

Démonstration. 1) Puisque l'espace $X_{m,n} = E(\triangle^n) \times \triangle^n$ est contracticle, le complexe différentiel de Banach $C_*^{\ell_1}(X_{m,n}, \mathbf{R}) = \mathcal{T}(\zeta_{m,n})$ est acyclique.

2) De même, puisque la base de la fibration $p_n : X_n \to \triangle^n$ est contractile l'espace total X_n a le même type d'homotopie que la fibre $\Omega(\bar{\triangle}^n)$ de p_n. Mais comme on sait que les groupes d'homotopie $\pi_q(X_n) = \pi_q(\Omega(\bar{\triangle}^n)) = 0, \forall q \geq 1$ on en conclut que les composantes connexes par arcs de l'espace X_n sont faiblement contractiles. Par conséquent, le complexe différentiel de Banach $C_*^{\ell_1}(X_n, \mathbf{R}) = \mathcal{T}(\zeta_n)$ est acyclique.

3) Comme dans la preuve de l'affirmation 4, les composantes connexes par arcs sont contractile, cela permet de construire des homotopies contractantes sur les complexes différentiels $\mathcal{T}(X_n)$ et $\mathcal{T}(X_{n,m})$ qui entraînent par suite que $\mathcal{T}$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé. $\square$

Affirmation 12. *Le foncteur admissible $T : \mathbf{WFib} \to \mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ban})_\mathbf{b}$ est fortement représentable.*

Démonstration. Ici, la preuve consiste à démontrer qu'il existe une transformation naturelle uniformément bornée $\nu : \mathcal{T} \to \widehat{\mathcal{T}}$ telle que $\theta_{\mathcal{T}} \circ \nu = id_{\mathcal{T}}$ où le couple $(\widehat{\mathcal{T}}, \theta_{\mathcal{T}})$ est associé au foncteur admissible $\mathcal{T}$ par le théorème 1. Pour cela, nous allons considérer les constructions de Brown [3] et nous montrerons qu'elles restent valable en homologie ℓ_1-singulière réelle.

Soient $\zeta : F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration faible dont la base est pointée en $x_0 \in B$, et soit $\sigma_n : \triangle^n \to E$ un n-simplexe singulier dont tous les sommets sont confondus avec $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Puisque les sommets du simplexe singulier $p \circ \sigma_n : \triangle^n \to B$ s'envoient sur le point base $x_0 \in B$, on peut le factoriser par, $p \circ \sigma_n = \bar{\sigma}_n \circ \pi_n$.

Soit α un élément de $E(\bar{\triangle}^n)$ tel que $\alpha(1) = \pi_n(t)$ pour un certain $t \in \triangle^n$. Puisque la fibration $p : E \to B$ possède la propriété du relèvement des chemins $\bar{\sigma}_n \circ \alpha$ se relve en un chemin $\widetilde{\bar{\sigma}_n \circ \alpha} = u_n$ de E d'origine $u_n(0) = \sigma_n(t)$. Ainsi, en considérant le modèle ζ_n (i.e. fibration faible) :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(\bar{\triangle}^n) & \hookrightarrow & X_n & \xrightarrow{p_n} & \triangle^n \\ & & (\alpha, t) & \to & t \end{array}$$

et l'application continue qui est définie par :

$$\begin{array}{cccc} U_n : & X_n & \to & E \\ & (\alpha, t) & \to & u_n(1) = \widetilde{\bar{\sigma}_n \circ \alpha}(1), \end{array}$$

nous obtenons un morphisme de fibrations faibles $(U_n, \bar{\sigma}_n) : \zeta_n \to \zeta$ au sens de Serre.

D'autre part, observons que si pour tout $t \in \triangle^n$ on désigne par e_t le chemin affine qui joint le sommet e_0 au point t alors en posant $\alpha_t = \pi_n \circ e_t$ on forme un point $(\alpha_t, t) \in X_n$ tel que, si on fait varier $t \in \triangle^n$, on obtient un n-simplexe singulier $\widetilde{\sigma}_n : \triangle^n \to X_n$ défini par $\widetilde{\sigma}_n(t) = (\alpha_t, t)$.

Enfin, si on considère l'application :

$$\begin{array}{lcc} \nu_\zeta : \mathcal{T}(\zeta) & \to & \widehat{\mathcal{T}}(\zeta) \\ \quad \sigma_n & \to & ((U_n, \bar{\sigma}_n), \widetilde{\sigma}_n) \end{array}$$

on obtient un opérateur continu de norme $\| \nu_\zeta \| = 1$ et une correspondance $\nu : \mathcal{T} \to \widehat{\mathcal{T}}$ qui réalise une transformation naturelle uniformément bornée. En fait, puisqu'on a la relation $\theta_{\mathcal{T}}(\zeta) \circ \nu_\zeta(\sigma_n) = (U_n)_*(\widetilde{\sigma}_n) = U_n \circ \widetilde{\sigma}_n = \sigma_n$ on déduit que le foncteur $\mathcal{T}$ est fortement représentable (déf. 3). □

Proposition 3. *Si un espace connexe par arcs pointé (X, x_0) possède un revêtement simplement connexe $\widetilde{X}$, le complexe différentiel $(C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes}_{t_X} C_*^{\ell_1}(\Omega(X, x_0)), d_t)$ est acyclique.*

Proof. 1) Puisqu'on sait que le complexe différentiel $C_*^{\ell_1}(\Omega(X, x_0); \mathbf{R})$ est acyclique (cf. aff. 9) il en résulte que le complexe produit $(C_*^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes}_{\mathbf{t_X}} \mathbf{C_*^{\ell_1}}(\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, \mathbf{x_0})), \mathbf{d_t})$ induit une suite spectrale dégénérée avec un premier terme donné par :

$$E^1_{p,q} = 0, \forall q > 0$$

et$E^1_{p,0} = C_p^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} H_0^{\ell_1}(\Omega(X, x_0); \mathbf{R}) = C_p^{\ell_1}(X, \mathbf{R}) \widehat{\otimes} \ell_1(\pi_1(X))$
muni par la différentielle $d_1 : E^1_{p,0} \to E^1_{p-1,0}$

$$d_1(x \otimes [\alpha]) = \partial x \otimes \gamma + (-1)^p \partial_p T \otimes [(\partial_0^{p-1} x) \star \alpha] \in E^1_{p-1,0}$$

qui s'obtient aisément à partir de la différentielle $d_t = \partial \otimes id + id \otimes \partial + t\cap$ par passage au quotient modulo la filtration différentielle croissante $\mathcal{F}_n = \bigoplus_{q=0}^{q=n} K_q \widehat{\otimes}_t F_* \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ (cf. [6] ou [13]).

Pour achever la démonstration de la proposition, nous allons démontrer que le complexe différentiel $(E^1_{*,*}, d_1)$ est acyclique.

2) Sur l'algèbre de Banach $\ell_1(\pi_1(X))$ on définit une structure d'algèbre différentiel de Banach dont les composantes A_p de degré $p > 0$ sont nulles. De même, on considère un morphisme d'algèbres différentielles de Banach $a_* \; : C_*^{\ell_1}(\Omega(X,x_0);\mathbf{R}) \to \ell_1(\pi_1(X))$ qui envoie une chaîne de degré $p \neq 0$ sur zéro et $a_1(\sigma^1) = [\sigma^1] - [\sigma_0^1]$ pour tous les 1-simplexes singuliers.

Maintenant, avec ces considérations on peut définir une cochaîne bornée tordante $s = a_* \circ t_X \in C_b^1(X, \ell_1(\pi_1(X)))$ et un morphisme de complexes différentiels de Banach tordus

$$id \otimes a_* \; : (C_*^{\ell_1}(X,\mathbf{R})\widehat{\otimes}_{t_X} C_*^{\ell_1}(\Omega(X,x_0)), d_t) \to (C_*^{\ell_1}(X,\mathbf{R})\widehat{\otimes}_s \ell_1(\pi_1(X)), d_s)$$

qui induit un isomorphisme en homologie car, sur le premier terme des suites spectrales, on a dj un isomorphisme $H_{*,*}(id \otimes a_*) \, : \, (E^1_{*,*}, d^1_t) \to (E^1_{*,*}, d^1_s) = (C_*^{\ell_1}(X,\mathbf{R})\widehat{\otimes}_s \ell_1(\pi_1(X)), d_s)$.

D'autre part, d'après un théorème d'Eilenberg (cf. [15] page 278), puisqu'on sait que le complexe différentiel $(C_*(X,\mathbf{R})\otimes\mathbf{R}[\pi_\mathbf{1}(\mathbf{X},\mathbf{x_0})],\mathbf{d_1})$ est isomorphe au complexe différentiel des chaînes $\pi_1(X)$-équivariantes $C_*(\widetilde{X},\mathbf{R})\otimes_{\pi_1(X)}\mathbf{R}[\pi_1(X,x_0)]$ du revêtement simplement connexe $\widetilde{X}$, en passant aux complétions on déduit que le complexe différentiel $(E^1_{*,0}, d_s)$ est équivalent au complexe différentiel de Banach, $C_*^{\ell_1}(\widetilde{X},\mathbf{R})\widehat{\otimes}_{\pi_1(X)}\ell_1(\pi_1(X)) = C_*^{\ell_1}(\widetilde{X},\mathbf{R})$ qui est acyclique d'après le théorème 5 de Morita-Matsumoto. □

Corollaire 9. *Pour tout modèle ζ_n (resp. $\zeta_{n,m}$) le complexe différentiel $\mathcal{P}_t(\zeta_n)$ (resp. $\mathcal{P}_t(\zeta_{n,m})$) est acyclique.*

Proof. Remarquer que la fibration ζ_n (resp. $\zeta_{n,m}$) a le même type d'homotopie que la fibration de Serre $\Omega(M,x_0) \hookrightarrow EM(x_0) \to M$ où $M = \triangle^n$ (resp. $M = \overline{\triangle}^n$). □

Corollaire 10. *Le foncteur admissible $\mathcal{P}_t$ est $\mathcal{M}$-uniformément fermé.*

Pour compléter la liste des outils exigés par les hypothèses du théorème 4 nous devons également démontrer l'affirmation suivante.

Affirmation 13. *Le foncteur admissible $\mathcal{P}_t$ est fortement représentable.*

Démonstration. Dans cette preuve on se propose de construire une transformation naturelle uniformément bornée $\nu\ : \mathcal{P}_t \to \widehat{\mathcal{P}}_t$ telle que pour toute fibration faible à base pointée $\zeta = (E, p, (B, x_0); F)$ on ait la relation :

$$\theta_{\mathcal{P}_t}(\zeta) \circ \nu_\zeta(\sigma_n \otimes \tau_m) = \sigma_n \otimes \tau_m, \forall \sigma_n \in S_n(B), \tau_m \in S_m(F)$$

Rappelons que pour une fibration faible $\zeta = (E, p, B; F)$ on note par $\widehat{\mathcal{P}_\sqcup}(\zeta)$ l'espace de Banach engendré par les couples (ϕ, x) où la composante $\phi\ : \zeta_{m,n} \to \zeta$ est un morphimsme de fibrations et $x \in \widehat{\mathcal{P}}_t(\zeta_{m,n})$ (cf. preuve du théorème 1).

Soit $\zeta_{m,n} = (E(\bar{\triangle}^n) \times \triangle^m, p_{m,n}, \overline{\triangle}^n)$ un modèle et soient $\sigma_n \in S_n(B, x_0)$ et $\tau_m \in S_m(F)$ deux simplexes singuliers. Pour un élément $(\alpha, t) \in E(\bar{\triangle}^n) \times \triangle^m$ on désigne par $\widetilde{\bar{\sigma}_n \circ \alpha}\ : I \to E$ le chemin qui relève $\bar{\sigma}_n \circ \alpha\ : I \to B$ avec la condition initiale $\widetilde{\bar{\sigma}_n \circ \alpha}(0) = \tau_m(t)$. Observons que si on considère l'application continue $V_{m,n}\ : E(\bar{\triangle}^n) \times \triangle^m \to E$ qui associe à (α, t) le point $\widetilde{\bar{\sigma}_n \circ \alpha}(1)$ on obtient un morphisme de fibrations $\phi_{m,n} = (V_{m,n}, \bar{\sigma}_m)$: $\zeta_{m,n} \to \zeta$. D'autre part, si on pose $x_{m,n} = \pi_n \otimes (\sigma_0 \times id_{\triangle^m}) \in \mathcal{P}_t(\zeta_{m,n})$, on peut définir maintenant un opérateur linéaire continu $\nu_\zeta\ : \mathcal{P}_t(\zeta) \to \widehat{\mathcal{P}}_t(\zeta)$ en prenant comme expression sur les générateurs, $\nu_\zeta(\sigma_n \otimes \tau_m) = (\phi_{m,n}, x_{m,n})$.

En effet, la correspondance $\nu\ : \mathcal{P}_t \to \widehat{\mathcal{P}}_t$ est une transformation naturelle uniformément bornée (i.e. $\| \nu_\zeta \| = 1, \forall \zeta$) , et comme elle vérifie en outre,

$$\theta_{\mathcal{P}_t}(\zeta) \circ \nu_\zeta(\sigma_n \otimes \tau_m) = \mathcal{P}_t(\phi_{m,n})(\pi_n \otimes (\sigma_0 \times id_{\triangle^m})) = \sigma_n \otimes \tau_m$$

elle est une représentation forte du foncteur admissible $\mathcal{P}_t$. $\square$

References

[1] A. Bouarich, Suites exactes en cohomologie bornée réelle des groupes discrets, C.R.A.S. Paris, t. 320, Série 1, p. 1355-1359 (1995).

[2] A. Bouarich, Exactutide à gauche du foncteur $H_b^*(-, \mathbf{R})$ de cohomologie bornée réelle, Annales de la Faculté de Toulouse, Vol. X, No. 2, p. 255-270, (2001).

[3] E. Brown, Twisted tensor product, Annals of Math. Vol. 69, No. 1, p. 223-246, (1959).

[4] S. Eilenberg and S. Maclane, Acyclic Models, Amer. Jour. Math, Vol. 75, 189-199 (1953).

[5] S. Eilenberg and J.A. Zilber, On product of complexes, Amer. Jour. Math, Vol. 75, 200-204, (1953).

[6] R. Godment, Théorie des faisceaux, Herman Paris (1953).

[7] P. Greenleaf, Invariants means on topological groups, Van Nostrand Math. Studies, (1969).

[8] M. Gromov, Volume and Bounded Cohomology, IHES, (1981).

[9] A. Grothendeik, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. of American Soc. Vol. 16, (1966).

[10] V. Ivanov, Foundation of the theory of bounded cohomoloy, J. of Soviet Math. 37, 1090-1115, (1987).

[11] S. Maclane, Categories for Working mathematician, Springer-Verlag.

[12] Matsumoto-Morita, Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms, Proc. of the AMS, Vol. 94, No. 1, p. 539-544, (1986)

[13] J. McCleary, User's giide to spectral sequences, Publish or Perish, Inc (U.S.A), (1984).

[14] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, (1966).

[15] G. Whithead, Elements of homotopy theory, Springer-Verlag, Berlin, (1978).

Abdesselam Bouarich
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Téchniques
BP. 523, Beni Mellal
Maroc
e-mail : bouarich1@yahoo.fr