Proyecciones
Vol. 20, N^o 2, pp. 217-241, August 2001.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile
DOI: 10.4067/S0716-09172001000200006

TOPOLOGIES POLAIRES COMPATIBLES AVEC UNE DUALITÉ SÉPARANTE SUR UN CORPS VALUÉ NON-ARCHIMÉDIEN

R. AMEZIANE HASSANI
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fes - MAROC
and
M. BABAHMED
Université Abdelmalek Essaâdi, Tetouan - MAROC

Abstract

In this paper, we deal with polar topologies in separated dual pair $\langle X, Y \rangle$ of vector spaces over a non-archimedean valued field. We study compatible polar topologies, and we give some results characterizing specific subsets of X related to these topologies, especially if the field K is spherically complete or the compatible topology is polar or strongly polar. Furthermore, we investigate some topological properties in the duality $\langle X, Y \rangle$ such as barreldness and reflexivity.

1. §Introduction

La dualité dans les espaces normés sur un corps valué non-archimédien (n.a.) a été étudiée par Monna [3] et Fleischer [1]; si le corps de base est sphériquement complet, cette étude est, en grande partie, semblable à celle faite dans les espaces normés sur le corps réel.

Dans [8] van Tiel a developpé la théorie de la dualité dans les espaces localement convexes sur un corps valué n.a. sphériquement complet; un outil nécessaire est le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences. Ce théorème n'est vérifié dans le cas non-archimédien que si le corps de base est sphériquement complet. Pour établir une théorie satisfaisante de la dualité dans les espaces localement convexes sur un corps valué n.a. non-sphériquement complet, Schikhof [6] a introduit la notion d'espaces polaires et celle d'espaces fortement polaires. Ces notions jouent un rôle fondamental dans cette théorie du fait que dans la classe d'espaces fortement polaires on a la propriété de Hahn-Banach pour l'extension des formes linéaires continues ([6] , théorème 4.2) .

Dans ce travail, on étudie les topologies définies à partir d'une dualité séparante sur un corps valué n.a. En se référant aux travaux de Van Tiel [8] et ceux de Schikhof [6] , on va donner quelques propriétés fondamentales des topologies polaires dans une dualité séparante $\langle X, Y\rangle$ de K-espaces vectoriels. Dans la plupart des résultats établis, si K n'est pas sphériquement complet, on suppose que X, muni d'une telle topologie, soit polaire ou fortement polaire.

Dans §2, on établit quelques résultats relatifs à la dualité séparante $\langle X, Y\rangle$.

Dans §3, on définit les topologies polaires; ces topologies sont localement K-convexes, et on montre que si K est sphériquement complet, la topologie de tout espace localement K-convexe est une topologie polaire (proposition 3.2.); puis, on introduit la notion de famille saturée pour comparer ces topologies; on montre que la topologie polaire est définie d'une façon unique par une famille saturée (corollaire 3.1.).

Dans §4, on étudie les topologies polaires compatibles avec la dualité séparante $\langle X, Y\rangle$. On montre que les topologies polaires compatibles telles que X soit fortement polaire admettent les mêmes sous-ensemble K-fermés et fermés (corollaire 4.1.). On montre aussi que, si K est discret et sphériquement complet, les topologies polaires compatibles admettent les mêmes sous-ensembles absolument K-convexes et fermés (corollaire 4.6.); et si K est dense et sphériquement complet, elles admettent les mêmes sous-ensembles absolument K-convexe, K-fermés et fermés (corollaire 4.7.). En outre, si Y est faiblement complet, on montre que les topologies polaires compatibles telles que X soit polaire admettent les mêmes sous-ensembles bornés (corollaire 4.5.).

Dans §5, on donnne quelques résultats relatifs aux espaces tonnelés et réflexifs dans la dualité séparante $\langle X, Y \rangle$; on caractérise les topologies polaires compatibles telles que X soit tonnelé, et on montre que si K sphériquement complet et τ est une topologie polaire compatible, X est τ-réflexif (corollaire 5.3.).

§1. Préliminaires.

Soit $(K, |.|)$ un corps valué n.a., $|K| \setminus \{0\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{R}_+^*$; s'il est cyclique, on dit que la valeur absolue n.a. $|.|$ est discrète, ou que K est discret. Sinon, $|K| \setminus \{0\}$ est dense dans $\mathbf{R}_+^*$, et on dit que $|.|$ est dense, on que K est dense. Dans les deux cas, il existe $\rho > 1$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ tels que $|\lambda_n| = \rho^n \ \ \forall n \in \mathbf{Z}$ ([8]).

Un corps valué n.a. est dit local s'il est localement compact; les corps valué n.a. locaux sont: 1° le completé d'une extension transcendante simple d'un corps fini; 2° les extensions algébriques finies d'un corps Q_p, où Q_p est le corps des nombres p-adiques ([3]) .

Un corps valué n.a. est dit sphériquement complet si toute famille de boules dans K qui est totalement ordonnée par inclusion admet une intersection non vide. Cette notion a été introduite par Ingletion [2] pour étudier le théorème de Hahn-Banach dans les espaces normés n.a. Un corps valué n.a. discret et complet est sphériquement complet, et tout corps valué n.a. local est sphériquement complet ([8]) .

Soit E un K-espace vectoriel, un sous-ensemble A de E est dit absolument K-convexe si $\lambda x + \mu y \in A$ pour tous $x, y \in A$ et $\lambda, \mu \in K$

tels que $|\lambda| \leq 1$ et $|\mu| \leq 1$. Si A est un sous-ensemble de E, $\Gamma(A)$ est l'enveloppe absolument K-convexe de A, c'est le plus petit sous-ensemble absolument K-convexe contenant A. On appelle base de filtre K-convexe sur E, une base de filtre sur E formée d'ensembles de la forme $x + A$, où $x \in E$ et A est absolument K-convexe; et on appelle filtre K-convexe sur E un filtre sur E engendré par une base de filtre K-convexe. Un sous-ensemble M de E est dit C-compact si tout filtre K-convexe sur M posséde au moins un point adhérent dans M. Tout compact est C-compact; tout sous-ensemble fermé d'un C-compact est C-compact, et tout sous-ensemble absolument K-convexe et C-compact est fermé ([7]) .

Un sous-ensemble de E C-compact n'est pas nécessairement borné.

Un sous ensemble A absolument K-convexe d'un K-espace vectoriel E est dit K-fermé si pour tout $x \in E$ l'ensemble $\{|\lambda| \, / \lambda x \in A\}$ est fermé dans $|K|$.

Si p est une semi-norme n.a.; sur E, $\overline{B_p}(0,1) = \{x \in E / p(x) \leq 1\}$ est K-fermée.

Proposition 1.1. *Soit A un sous-ensemble de E absolument K-convexe.*

1° si K est discret; A est K-fermé;

2° si K est dense; A est K-fermé si, et seulement si, pour tout $x \in E$ tel que $\lambda x \in A$ pour tout $|\lambda| < 1$, $x \in A$.

L'intersection d'une famille de sous-ensembles K-fermés est K-fermée.

Si A est un sous-ensemble de E absolument K-convexe, on note $Kf(A)$ l'enveloppe K-fermée de A, c'est le plus petit sous-ensemble K-fermé contenant A. Si K est discret $Kf(A) = A$, et si K est dense $Kf(A) = \underset{|\lambda|>1}{\cap} \lambda A$.

Tout espace vectoriel topologique sur K admet un système fondamental de voisinages (S.F.V.) de 0 équilibrés et qu'on peut choisir ouverts ou fermés. Un espace vectoriel topologique sur $K(E, \tau)$ est dit localement K-convexe s'il admet un S.F.V. de 0 formé de sous-ensembles absolument K-convexes, dans ce cas la topologie τ est définie par une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes n.a. τ-continues sur E; de plus, si K est discret, on peut supposer que $N_p = \{p(x)/x \in E\} \subset |K|$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ ([3] .) .

Soit (E, τ) un espace localement K-convexe; une semi-norme n.a. p sur E est dite τ-polaire si $p = \sup\left\{|f| / f \in E^{'} \text{ et } |f| \leq p\right\}$. Si K est sphériquement complet, toute semi-norme n.a. sur E est τ-polaire. Si K n'est pas sphériquement complet on a $(m(K)/c_0(K))^{'} = \{0\}$ ([4] , p.108), où $m(K)$ est l'ensemble des suites bornées dans K et $c_0(K)$ est l'ensemble des suites nulles dans K; donc la norme n.a. canonique sur $m(K)/c_0(K)$ n'est pas polaire.

Proposition 1.2. ([6] , *proposition 3.2.*)

Soient (E, τ) un espace localement K-convexe et p une semi-norme n.a. sur E; les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) p est τ-polaire;

(ii) $\forall a \in E$ et $\forall \lambda \in K$ tels que $|\lambda| < p(a)$, $\exists f \in E^{'}$ telle que $f(a) = \lambda$ et $|f| \leq p$;

(iii) $\forall D$ sous-espace de E de dimension 1, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall f \in D^{'}$ telle que $|f| \leq p$ sur D, $\exists \overline{f} \in E^{'}$ un prolongement de f telle que $\left|\overline{f}\right| \leq (1+\varepsilon)p$ sur E;

(iv) $\forall a \in E \backslash \overline{B}_p(0,1)$, $\exists f \in E^{'}$ telle que $|f(a)| > 1$ et $\left|f(\overline{B}_p(0,1))\right| \leq 1$.

Remarque 1.1. 1° Schikhof a défini algébriquement une semi-norme n.a. polaire ([6] , p.194) . On a donné cette définition grâce au dual topologique d'un espace localement K-convexe; cependant les conditions de la proposition 3.2. de [6] ne changent que pour les formes linéaires, elles sont continues dans notre cas.

2° Si K est sphériquement complet, on a toutes les conditions (i)-(iv); de plus, on peut prendre $|\lambda| \leq p(a)$ dans (ii) et $\varepsilon \geq 0$ dans (iii).

On dit que E est τ-polaire si la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes n.a. τ-polaires; et on dit que E est fortement-τ-polaire si toute semi-norme n.a. τ-continue sur E est τ-polaire. Tout espace fortement-τ-polaire est τ-polaire; et si K est sphériquement complet, tout espace localement K-convexe est fortement-τ-polaire. Si K n'est pas sphériquement complet $m(K)/c_0(K)$ n'est pas fortement-$\widetilde{\tau}_\infty$-polaire, où $\widetilde{\tau}_\infty$ est la topologie définie par la norme n.a. canonique de $m(K)/c_0(K)$.

Les espaces suivantes sont fortement-τ-polaires ([6] , p.197) :

1° Les espaces localement K-convexes de dimension finie ou dénombrable;

2° Les espaces localement K-convexes avec une base de Schauder;

3° Les espaces localement K-convexes munis de la topologie faible.

Une caractérisation importante de la classe des espaces fortement-τ-polaires est le prolongement des formes linéaires continues:

Théorème 1.1. ([6] , théorème 4.2.)

Soit (E,τ)un espace localement K-convexe; les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) Eest fortement-τ-polaire;

(ii) Evérifie la propriété de Hahn-Banach:

Soient Dun espace de E, $p$une semi-norme n.a. sur E, $\varepsilon > 0$et $f \in D'$telle que $|f| \leq p$sur D, il existe $\overline{f} \in E'$un prolongement de $f$telle que $\left|\overline{f}\right| \leq (1+\varepsilon)p$sur E.

§2. Dualité séparante

Soient X et Y deux K-espaces vectoriels mis en dualité séparante $\langle X, Y\rangle$.

Si A est un sous-ensemble de X, $A^\circ = \{y \in Y / \, |\langle x, y\rangle| \leq 1 \quad \forall x \in A\}$ est appelé le polaire de A. On définit d'une façon symétrique le polaire d'un sous-ensemble de Y. Si A est un sous-ensemble de X et B est un sous-ensemble de Y, on a: B° absorbe A si, et seulement, A° absorbe B.

La topologie faible $\sigma(X,Y)$ sur X admet $\{A^\circ / A \in \mathcal{F}\}$ comme S.F.V. de 0, où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties finies de Y.

On montre que Y est isomorphe au dual topologique faible de X par l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcccccc} \psi : & Y & \longrightarrow & (X,\sigma(X,Y))' & & & \\ & y & \longrightarrow & f_y : & X & \longrightarrow & K \\ & & & & x & \longrightarrow & \langle x, y\rangle \end{array}$$

Proposition 2.1. *Soit Aun sous-ensemble de X.*

1° A°est absolument K-convexe et $\sigma(Y,X)$-fermé;

2° A est $\sigma(X,Y)$-borné si, et seulement si, A° est absorbant;
3° Si A est absorbant, A° est $\sigma(Y,X)$-borné.

Soient τ une topologie sur X et H un sous-ensemble de Y; on dit que H est τ-équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U un voisinage de 0 tel que $|\langle U, H\rangle| \leq \varepsilon$.

Si H est τ-équicontinu, $\Gamma(H)$ est τ-équicontinue et H est $\sigma(Y,X)$-borné.

Proposition 2.2. *Soient τ une topologie sur X et H un sous-ensemble de Y; les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(i) H est τ-équicontinu;
(ii) H est contenu dans le polaire d'un voisinage de 0;
(iii) H° est un voisinage de 0.

Si U est un voisinage de 0, U° est τ-équicontinu.

Théorème 2.1. *Soit B un sous-ensemble de Y; pour que B soit $\sigma(Y,X)$-relativement compact il faut, et il suffit, que pour tout $x \in X$ $B(x) = \{\langle x,y\rangle /y \in B\}$ soit relativement compact dans K.*

Preuve. Soit K^X l'espace de toutes les applications de X dans K muni de la topologie de la convergence simple τ_s. Un S.F.V. de 0 pour τ_s est formé par les ensembles $W(A,n) = \left\{ f \in K^X / \, |f(A)| \leq \dfrac{1}{\rho^n} \right\}$ où $n \in \mathbf{N}$ et A décrit l'ensemble des parties finies de X.

$W(A,n) \cap Y = \dfrac{1}{\lambda_n} A^{\circ}$; donc $\tau_{s/Y} = \sigma(Y,X)$, et le résultat découle de ([8] , théorème 4.2.) .

Proposition 2.3. *Soit B un sous-ensemble de Y.*
1° Supposons que K soit local; si B est $\sigma(Y,X)$-borné, B est $\sigma(Y,X)$-relativement compact.
2° Supposons que K soit sphériquement complet; si B est absolument K-convexe et $\sigma(Y,X)$-borné, B est $\sigma(Y,X)$-relativement C-compact.

Preuve. 1° Pour tout $x \in X,\ B(x) = \{\langle x,y\rangle /y \in B\}$ est borné dans K, donc relativement compact, et par suite B est $\sigma(Y,X)$-relativement compact.

2° Pour tout $x \in X$, $B(x)$ est absolument K-convexe et borné dans K, donc $\overline{B(x)}$ est C-compact, et alors B est contenu dans un sous-ensemble A absolument K-convexe et $\sigma(Y,X)-C-$compact ([7]). A est donc $\sigma(Y,X)$-fermé, et alors B est $\sigma(Y,X)$-relativement C-compact.

Corollaire 2.1. *Soit A un sous-ensemble absorbant de X.*

1° Si K est local, A° est $\sigma(Y,X)$-compact.

2° Si K est sphériquement complet, A° est $\sigma(Y,X)$-C-compact.

Soit A un sous ensemble de X, $A^{\circ\circ} = \{x \in X / \, |\langle x,y\rangle| \leq 1 \ \ \forall y \in A^\circ\}$ est appelé le bipolaire de A. On définit de la même façon le bipolaire d'un sous-ensemble de Y.
$A^{\circ\circ}$ est absolument K-convexe et $\sigma(X,Y)$-borné.

Proposition 2.4. *Soit A un sous-ensemble de X*

1° Si A est $\sigma(X,Y)$-borné, $A^{\circ\circ}$ est $\sigma(X,Y)$-borné.

2° A° est $\sigma(Y,X)$-borné si, et seulement si, $A^{\circ\circ}$ est absorbant.

Soit A un sous-ensemble de X; on dit que A est Y-fermé si pour tout $x \in X \setminus A$, il existe $y \in Y$ tel que $|\langle x,y\rangle| > 1$ et $|\langle A,y\rangle| \leq 1$.

X est Y-fermé; et pour tous $y \in Y$ et
$n \in \mathbf{Z}$ $B_n(y) = \{x \in X / \, |\langle x,y\rangle| \leq \rho^n\}$ est Y-fermé. L'intersection de sous-ensembles Y-fermés est un sous-ensemble Y-fermé. On appelle enveloppe Y-fermée d'un sous-ensemble A de X le plus petit sous-ensemble Y-fermé contenant A, on la note $\widetilde{A}$.

Proposition 2.5. *Soit A un sous-ensemble de X.*

1° $\widetilde{A} = A^{\circ\circ}$.

2° A est Y-fermé si, et seulement si, $A = A^{\circ\circ}$.

3° Si A est $\sigma(X,Y)$-borné, $\widetilde{A}$ est $\sigma(X,Y)$-borné et c'est le plus petit sous-ensemble $Y-$fermé et $\sigma(X,Y)$-borné contenant A.

Proposition 2.6. *Supposons que K soit sphériquement complet, et soit A un sous-ensemble de X absolument K-convexe et $\sigma(X,Y)$-fermé.*

1° Si K est discret, A est Y-fermé et on a: $A^{\circ\circ} = A$.

2° Si K est dense, $A^{\circ\circ} \subset \ \alpha A \, \forall \, |\alpha| > 1$.

Preuve.1° Soit $x_0 \in X \setminus A$, il existe une forme linéaire $\sigma(X,Y)$-continue sur X telle que $|f(x_0)| > 1$ et $|f(A)| \leq 1$ ([8], théorème 3.10).

Soit $y_0 \in Y$ tel que $f = fy_0$, on a $|\langle x_0, y_0\rangle| > 1$ et $|\langle A, y_0\rangle| \leq 1$.

2° Soient $|\alpha| > 1$ et $x_0 \in X \setminus \alpha A$, il existe une forme linéaire $\sigma(X,Y)$-continue telle que $f\left(\dfrac{x_0}{\alpha}\right) = 1$ et $|f(A)| \leq 1$ ([8], théorème 3.10.

Alors il existe $y_0 \in Y$ tel que $|\langle x_0, y_0\rangle| = |\alpha| > 1$ et $|\langle A, y_0\rangle| \leq 1$; donc $x_0 \notin A^{\circ\circ}$.

Proposition 2.7. *Soient $\langle X, Y\rangle$ et $\langle R, S\rangle$ deux dualités séparantes sur K et*
$u : X \longrightarrow R$ une application linéaire.

u est $(\sigma(X,Y), \sigma(R,S))$*-continue si, et seulement si, $u^*(S) \subset Y$; où u^* est l'adjoint algébrique de u. Dans ce cas la restriction u' de u^* sur S est $(\sigma(S,R), \sigma(Y,X))$-continue, et $u'' = (u')' = u$.*

Preuve. ([5], *p*.128).

Proposition 2.8. *Soient $\langle X, Y\rangle$ et $\langle R, S\rangle$ deux dualités séparantes sur K, et*
$u : X \longrightarrow R$ une application linéaire $(\sigma(X,Y), \sigma(R,S))$-continue.

1° $[u(A)]^\circ = (u')^{-1}(A^\circ) \quad \forall A \subset X;$

2° $u(A) \subset B \Rightarrow u(B^\circ) \subset A^\circ \quad \forall A \subset X$ *et* $\forall B \subset R;$

3° $u^{-1}(D^\circ) = \left[u'(D)\right]^\circ \quad \forall D \subset S;$

4° $u'(D) \subset C \Rightarrow u(C^\circ) \subset D^\circ \quad \forall D \subset S$ *et* $\forall C \subset Y.$

Soient $\langle X, Y\rangle$ et $\langle R, S\rangle$ deux dualités séparantes sur K, et soient $\pi : X \longrightarrow R$ et
$\delta : R \longrightarrow X$ deux applications linéaires telles que $\pi o \delta = id_R$. Si π est $(\sigma(X,Y), \sigma(R,S))$-continue et δ est $(\sigma(R,S), \sigma(X,Y))$-continue, alors $\pi^*(S) \subset Y$ et $\delta^*(Y) \subset S$. Posons $\pi' = \pi^*_{/S}$ et $\delta' = \delta^*_{/Y}$. On a $\delta' o \pi' = id_S$.

Proposition 2.9. *Soient π et δ deux applications linéaires définies comme ci-dessus, et soient τ une topologie sur X et τ_δ la topologie image réciproque de τ par δ définie sur R.*

Si τ admet comme S.F.V. de 0 $\{A^\circ / A \in \mathcal{A}\}$ *où $\mathcal{A}$ est une famille de sous-ensembles de Y, τ_δ admet comme S.F.V de* 0 $\left\{\left[\delta'(A\right]^\circ / A \in \mathcal{A}\right\}$.

Preuve. Soit V un voisinage de 0 pour τ_δ, il existe U un voisinage de 0 pour τ tel que $\delta^{-1}(U) \subset V$. Soit $A \in \mathcal{A}$ el que $A^\circ \subset U$; on a $\delta^{-1}(A^\circ) \subset V$, d'où $\left[\delta'(A)\right]^\circ \subset V$ (proposition 2.8.).

§3. Topologies polaires

Soit $\mathcal{A}$ une famille de sous-ensembles de Y $\sigma(Y,X)$-bornés vérifiant:

(a) $\mathcal{A}$ est filtrante à droite par inclusion;

(b) $Y = \underset{A\in\mathcal{A}}{U} A$;

(c) Il existe $\lambda_0 \in K$, $|\lambda_0| > 1$, tel que $\lambda_0 A \in \mathcal{A}$ $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.

On appelle topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X la topologie admettant comme S.F.V. de 0 $\{A^\circ/A \in \mathcal{A}\}$.

La topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence ne change pas si on remplace $\mathcal{A}$ par:

1° L'ensemble des intersections finies des éléments de $\mathcal{A}$;

2° L'ensemble des enveloppes absolument K-convexes des éléments de $\mathcal{A}$;

3° L'ensemble des parties des éléments de $\mathcal{A}$;

4° L'ensemble des sommes finies des éléments de $\mathcal{A}$;

5° L'ensemble des réunions finies des éléments de $\mathcal{A}$;

6° L'ensemble des adhérences faibles des éléments de $\mathcal{A}$.

Ainsi, au besoin, on peut supposer que $\mathcal{A}$ vérifie une ou plus de ces proprietés.

En particulier, si $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Y :

1° absolument K -convexes et $\sigma(Y,X)$-compacts, on a la topologie de Mackey $\tau_m(X,Y)$;

2° absolument K-convexes, $\sigma(Y,X)$-bornés et $\sigma(Y,X)$-C-compacts, on a la topologie C-compacte $\tau_c(X,Y)$;

3° $\sigma(Y,X)$-bornés et X-fermés, on a la topologie X-fermée $\tau_f(X,Y)$;

4° $\sigma(Y,X)$-bornés, on a la topologie forte $\tau_b(X,Y)$.

On a: $\sigma(X,Y) \le \tau_m(X,Y) \le \tau_c(X,Y) \le \tau_b(X,Y)$;

$\sigma(X,Y) \le \tau_f(X,Y) \le \tau_b(X,Y)$.

Exemple 3.1. Soient $m(K)$ l'ensemble de toutes les suites bornées dans K et $c_0(K)$ l'ensemble de toutes les suites nulles dans K munis de

la norme n.a. $\|(x_i)\|_\infty = \sup_i | x_i |$. On considère la dualité séparante $\langle m(K), c_0(K)\rangle$.
La topologie forte $\tau_b(m(K), c_0(K))$ est détérminée par la norme n.a. $\|(x_i)\| = \sup \{| x_i y_i | /(y_i) \epsilon c_0(K) \text{ et } \|(y_i)\| \leq 1\}$. Or $\|.\| = \|.\|_\infty$; donc la topologie forte $\tau_b(m(K), c_0(K))$ coïncide avec la topologie définie par la norme n.a. $\|.\|_\infty$.

Proposition 3.1. *Toute topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X est une topologie localement K-convexe.*

Preuve. Soit τ une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X; pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\circ$ est absolument K-convexe, il suffit donc de montrer que τ est une topologie vectorielle. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\circ$ est absorbant et équilibré, $A^\circ + A^\circ \subset A^\circ$ et $\frac{1}{\lambda_0} A^\circ = (\lambda_0 A)^\circ \in \mathcal{A}^\circ$; de plus, $\mathcal{A}^\circ$ est une base de filtre sur X, donc $\mathcal{A}^\circ$ est un S.F.V. de 0 pour une topologie vectorielle sur X ([5] , p.14) .

Définition 3.1. *Soit τ une topologie vectorielle sur X;on dit que τ est une topologie polaire s'il existe une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles $\sigma(Y, X)$-bornés de Y vérifiant les conditions (a), (b) et (c) et telle que τ soit une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence.*

Si τ est une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X, elle est définie par la famille de semi-normes n.a. $(p_A)_{A \in \mathcal{A}}$, avec $p_A(x) = \sup \{|\langle x, y\rangle| /y \in A\}$.

Si K est sphériquement complet, on a la réciproque de la proposition 3.1.

Proposition 3.2.*Si K est sphériquement complet, la topologie de tout espace localement K-convexe est une topologie polaire.*

Preuve. Soient (E, τ) un espace localement K-convexe et $\mathcal{U}$ un S.F.V. de 0 formé de sous-ensembles absolument K-convexes, absorbants et τ-fermés. Considérons la dualité séparante $\left\langle E, E' \right\rangle$. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^\circ$ est $\sigma(E', E)$-borné; posons $\mathcal{A} = \{\mathcal{U}^\circ / \mathcal{U} \in \mathcal{U}\}$. $\mathcal{A}$ vérifie les conditions (a), (b) et (c), et on a pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^{\circ\circ} = \mathcal{U}$; donc τ est la topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur E.

Remarque 3.1. *Soit* (E, τ)*un espace localement* K*-convexe; si* E*est* τ*-polaire,* τ*admet un S.F.V de* 0*formé par des sous-ensembles* $E^{'}$*-fermés, et alors* τ *est une topologie polaire sur* E*.*

Théorème 3.1. *Supposons que* K*soit sphériquement complet, et soit* τ*une topologie vectorielle sur* X*;pour que* τ*soit une topologie polaire il faut, et il suffit, que* τ*admette un S.F.V de* 0*formé de sous-ensembles absolument* K*-convexes, absorbants et* $\sigma(X, Y)$*-fermés. .*

Preuve.La condition nécessaire est évidente; pour la condition suffisante, soit $\mathcal{U}$ un S.F.V de 0 pour τ formé de sous-ensembles absolument K-convexes, absorbants et $\sigma(X, Y)$-fermés. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^{\circ}$ est $\sigma(Y, X)$-borné; posons $\mathcal{A} = \{\mathcal{U}^{\circ}/\mathcal{U} \in \mathcal{U}\}$. $\mathcal{A}$ satisfait les conditions (a), (b) et (c). Soit $\tau^{'}$ la topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X.

Pour tout $U \in \mathcal{U}$,$\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{\circ\circ}$, donc $\tau \geq \tau^{'}$; U est absolument K-convexe et $\sigma(X, Y)$-fermé, donc $\lambda U^{\circ\circ} \subset U$ pour $|\lambda| < 1$ (proposition 2.6.), et alors $\tau^{'} \geq \tau$.

Proposition 3.3. *Soit* τ*une topologie polaire de* $\mathcal{A}$*-convergence sur* X*,si* $\widetilde{\tau}$*désigne la topologie polaire de* $\widetilde{\mathcal{A}}$*-convergence sur* X*,alors* τ*coïncide avec* $\widetilde{\tau}$*.*

Preuve. $\widetilde{\mathcal{A}} = \left\{\widetilde{A}/A \in \mathcal{A}\right\}$ est une famille de sous-ensembles $\sigma(Y, X)$-bornés qui vérifie les conditions (a), (b) et (c), et on a pour tout $A \in \mathcal{A}$, $(\widetilde{A})^{\circ} = A^{\circ\circ\circ} = A^{\circ}$.

Remarque 3.2. *Si* τ*est une topologie polaire de* $\mathcal{A}$*-convergence sur* X*,on peut supposer que* A*est* Y*-fermé pour tout* $A \in \mathcal{A}$*.*

Proposition 3.4. *1° Si* K*est local, la topologie forte* $\tau_b(X, Y)$*coïncide avec la topologie de Mackey* $\tau_m(X, Y)$*.*

2° Si K*est sphériquement complet, la topologie forte* $\tau_b(X, Y)$*coïncide avec la topologie* C*-compacte* $\tau_c(X, Y)$*.*

Preuve. 1° Soit A un sous-ensemble $\sigma(Y, X)$-borné de Y; $\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(Y,X)}$ est $\sigma(Y, X)$-borné et $\sigma(Y, X)$-fermé, donc $\sigma(Y, X)$-compact (proposition 2.3.), et on a $A^{\circ} = \left[\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(Y,X)}\right]^{\circ}$.

2° D'une façon analogue.

Définition 3.2. *Soit $\mathcal{A}$une famille de sous-ensemble de Y;on dit que $\mathcal{A}$est saturée si: $A \in \mathcal{A}$et $B \subset A^{\circ\circ} \Rightarrow B \in \mathcal{A}$.*

Si $\mathcal{A}$est une famille de sous-ensemble de Y,l'enveloppe saturée de $\mathcal{A}$est la plus petite famille saturée contenant $\mathcal{A}$;on la note Sa $(\mathcal{A})$.

Sa $(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{Y} / \exists \mathcal{A} \in \mathcal{A} : \mathcal{B} \subset \mathcal{A}^{\circ\circ}\}$.

Proposition 3.5. *Soit τune topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X; τcoïncide avec la topolaire polaire de Sa $(\mathcal{A})$-convergence.*

Preuve. Pour tout $B \in$ Sa$(\mathcal{A})$, $\mathcal{B}$ est $\sigma(Y,X)$-borné, et Sa $(\mathcal{A})$ satisfait les conditions (a), (b) et (c). Soit $B \in$ Sa $(\mathcal{A})$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B \subset A^{\circ\circ}$, et alors $A^{\circ} \subset B^{\circ}$.

Remarque 3.3. *Pour une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X;on peut supposer que $\mathcal{A}$soit une famille saturée.*

Proposition 3.6. *Soit τ (resp $\tau^{'}$) une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence (resp. $\mathcal{B}$-convergence) sur X;si $\mathcal{A}$est saturée, on a: $\tau \geq \tau^{'}$si, et seulement si, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$.*

Preuve. Soit $B \in \mathcal{B}$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A^{\circ} \subset B^{\circ}$, donc $B \subset B^{\circ\circ} \subset A^{\circ\circ}$, et alors $B \in \mathcal{A}$.

Corollaire 3.1. *Soit τ (resp $\tau^{'}$) une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence (resp. $\mathcal{B}$-convergence); pour que τcoïncide avec $\tau^{'}$il faut, et il suffit, que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.*

Preuve. On peut supposer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient saturées (remarque 3.3.).

Maintenant, on va comparer les ensembles complets pour deux topologies polaires comparables; on donne d'abord le lemme suivant:

Lemme 3.1. *Soient Eun K-espace vectoriel et τ, $\tau^{'}$deux topologies vectorielles sur Etelles que $\tau^{'}$admette un S.F.V. de 0τ-fermés. Si $(x_i)_{i\in I}$est une suite généralisée de Cauchy dans $(E,\tau^{'})$telle qu'elle converge vers x_0* dans (E,τ),*alors $(x_i)_{i\in I}$converge vers $x_0$dans $(E,\tau^{'})$.*

Preuve. Soit U un voisinage de 0 τ-fermé dans (E,τ'); il existe $i_0 \in I$ tel que $x_i - x_j \in U \ \ \forall i,j \geq i_0$. U est τ-fermé, donc $x_i - x_0 \in U \ \ \forall i \geq i_0$, et par suite $(x_i)_{i\in I}$ converge vers x_0 dans (E,τ').

Théorème 3.2. *Soient τ et τ' deux topologies polaires sur X telles que τ soit moins fine que τ'; si M est un sous-ensemble de X τ-complet, M est τ'-complet.*

Preuve. τ' admet un S.F.V.de 0 $\sigma(X,Y)$-fermés, donc τ-fermés. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une suite généralisée de Cauchy dans (M,τ'), elle est de cauchy dans (M,τ), donc elle converge vers x_0 dans (M,τ); et alors $(x_i)_{i\in I}$ converge vers x_0 dans (M,τ') (Lemme 3.1.).

Proposition 3.7. *Soient π et δ les applications linéaires de la proposition 2.9.; si* τ est une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X et τ_δ *est la topologie image réciproque de τ par δ sur* R; on a :

1° τ_δ est la topologie polaire de $\delta'(\mathcal{A})$-convergence sur R.

2° π est (τ,τ_δ)-continue si, et seulement si, $\pi' o\delta'(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Preuve. 1° $(\delta')^*(R) \subset X$, donc δ' est $(\sigma(Y,X),\sigma(S,R))$-continue. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\delta'(\mathcal{A})$ est $\sigma(S,R)$-borné. δ' est surjective, donc $\delta'(\mathcal{A})$ recouvre S; de plus, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\delta^{-1}(A^\circ) = \left[\delta'(A)\right]^\circ$ (proposition 2.8.). Donc τ_δ est la topologie polaire de $\delta'(\mathcal{A})$-convergence.

2° On peut supposer que $A^{\circ\circ} = A$ et $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Supposons que π soit (τ,τ_δ)-continue, et soit $A \in \mathcal{A}$, $\pi^{-1}\left(\left[\delta'(A)\right]^\circ\right)$ est un voisinage de 0 dans (X,τ); il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $B^\circ \subset \pi^{-1}\left(\left[\delta'(A)\right]^\circ\right) = \left[\pi' o\delta'(A)\right]^\circ$, donc $\pi' o\delta'(A) \subset B^{\circ\circ} = B$, et par suite $\pi' o\delta'(A) \in \mathcal{A}$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{A}$, $\pi^{-1}\left(\left[\delta'(A)\right]^\circ\right) = \left[\pi' o\delta'(A)\right]^\circ$ est un voisinage de 0 dans (X,τ); donc π est (τ,τ_δ)-continue.

Proposition 3.8. *Si τ est la topologie faible (resp. de Mackey; resp. C-compacte; resp. X-fermée; resp. forte) sur X, τ_δ est la topologie faible (resp. de Mackey; resp. C-compacte; resp. X-fermée; resp. forte) sur R.*

Preuve. Supposons que τ soit la topologie de Mackey sur X. δ' est $(\sigma(Y,X), \sigma(S,R)$-continue, donc pour tout $A \in \mathcal{A}$ $\delta'(\mathcal{A})$ est $\sigma(S,R)-$borné. Si A est absolument K- convexe et $\sigma(S,R)$-compact dans Y, $\delta'(A)$ est absolument K-convexe et $\sigma(S,R)$-compact dans S.

Réciproquement, si B est absolument K-convexe et $\sigma(S,R)$-compact dans R; posons $A = \pi'(B)$; π' est $(\sigma(S,R), \sigma(Y,X))$-continue, donc A est absolument K-convexe et $\sigma(Y,X)$-compact dans Y, et on a $\delta'(A) = B$. Donc τ_δ est la topologie de Mackey sur R.

La démonstration est analogue pour les autres; pour la topologie X-fermée, on utilise les relations de la proposition 2.8.

§4. Topologies compatibles

Une topologie localement K-convexe τ sur X est dite compatible avec la dualité $\langle X,Y\rangle$, ou (X,Y)-compatible, si Y est isomorphe au dual topologique de X muni de la topologie τ.

La topologie faible $\sigma(X,Y)$ est la topologie la moins fine parmi les topologies (X,Y)-compatibles, et on montre qu'il existe une topologie notée $\tau(X,Y)$ qui est la plus fine parmi les topologies (X,Y)-compatibles, c'est la topologie borne supérieure de toutes les topologies (X,Y)-compatibles.

Exemple 4.1. Soient $\omega(K)$ l'ensemble de toutes les suites dans K et $\varphi(K)$ l'ensemble des suites finies dans K . $\omega(K)$ peut être identifié au produit $\prod\limits_{i\geq 1} K_i$, avec $K_i = K$ $\forall i \geq 1$ .On munit $\omega(K)$ de la topologie produit τ_ω , et on considère la dualité séparante $\langle \omega(K), \varphi(K)\rangle$. La topologie τ_ω coïncide avec la topologie faible $\sigma(\omega(K), \varphi(K))$. $\omega(K)$ est τ_ω-complet (K est complet), donc il est $\sigma(\omega(K), \varphi(K))$-complet, et alors la topologie forte $\tau_b(\omega(K), \varphi(K))$ coïncide avec la topologie faible $\sigma(\omega(K), \varphi(K))$. Donc toutes les topologies polaires sur $\omega(K)$ sont $(\omega(K), \varphi(K))$-compatibles.

Exemple 4.2. Considérons la dualité séparante $\langle c_0(K), m(K)\rangle$. On a $(c_0(K), \|.\|_\infty)' = m(K)$ ([3], p.65); donc la topologie définie sur $c_0(K)$ par la norme n.a. $\|.\|_\infty$ est $(c_0(K), m(K))$-compatible .

Proposition 4.1. *Supposons que* K *soit sphériquement complet, et* *soient τ une topologie (X,Y)-compatible sur X et A un sous-ensemble de X absolument K-convexe et τ-fermé.*

1° Si K est discret, A est Y-fermé.

2° Si K est dense, $A^{\circ\circ} \subset \alpha A \quad \forall\, |\alpha| > 1$.

Théorème 4.1. *Supposons que K soit sphériquement complet, et soit τ une topologie (X,Y)-compatible sur X; τ posséde un S.F.V. de 0 formé de sous-ensembles absolument K-convexes et Y-fermés.*

Preuve. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes n.a. sur X définissant la topologie τ. Un S.F.V. de 0 pour τ est formé par les intersections finies des ensembles $U(i,n) = \left\{x \in X/P_i(x) \leq \dfrac{1}{\rho^n}\right\}$ où $i \in I$ et $n \in \mathbf{N}$.

$U(i,n)$ est absolument K-convexe, et on montre qu'il est Y-fermé.

Proposition 4.2. *Soient τ une topologie (X,Y)-compatible et A un sous-ensemble de Y.*

1° A° est τ-fermé.

2° $A^\circ = \left[\overline{\Gamma(A)}\right]^\circ$.

Preuve. 1° $A^\circ = \bigcap\limits_{y\in A} y^{-1}(\overline{B}_K(0,1))$, et y est τ-continue $\forall\, y \in Y$.

2° Soit $y \in A^\circ$; $A \subset A^{\circ\circ} \subset y^\circ$. y° est absolument K-convexe et τ-fermé, donc $\overline{\Gamma(A)} \subset y^\circ$, et alors $y \in y^{\circ\circ} \subset \left[\overline{\Gamma(A)}\right]^\circ$.

Proposition 4.3. *Soient τ une topologie (X,Y)-compatible et p une semi-norme n.a. sur X. Pour que p soit τ-polaire il faut, et il suffit, que $\overline{B}_p(0,1)$ soit Y-fermée.*

Preuve. Découle de la proposition 1.2.(iv).

Proposition 4.4. *Soient τ une topologie (X,Y)-compatible, U un voisinage absolument K-convexe de 0 et p la semi-norme n.a. associée à U.*

Si U est Y-fermé, p est τ-polaire.

Preuve. Si K est discret, $U = \overline{B_p}(0,1)$, et alors p est τ-polaire.

Si K est dense, $B_p(0,1) \subset U \subset \overline{B_p}(0,1)$. Soit $x \notin \overline{B_p}(0,1)$, $x \notin U$, alors il existe $y \in Y$ tel que $|\langle x,y\rangle| > 1$ et $|\langle U,y\rangle| \leq 1$.

Supposons qu'il existe $z \in X$ tel que $p(z) = 1$ et $|\langle z,y\rangle| > 1$.

Soit $\lambda \in K$ tel que $|\langle z, y\rangle| > |\lambda| > 1$. $\left|\left\langle \frac{z}{\lambda}, y\right\rangle\right| > 1$ et $p\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \frac{1}{|\lambda|} < 1$ ce qui est absurde; donc $\left|\left\langle \overline{B_p}(0,1), y\right\rangle\right| \leq 1$.

Théorème 4.2. *Soit τ une toplogie (X, Y)-compatible; pour que X soit fortement-τ-polaire il faut, et il suffit, que tout sous-ensemble τ-fermé et K-fermé soit Y-fermé.*

Preuve. Analogue à celle de ([6] , théorème 4.7.) .

Corollaire 4.1. *Les topologies τ (X, Y)-compatibles telles que X soit fortement-τ-polaire admettent les mêmes sous-ensembles τ-fermés et K-fermés.*

Corollaire 4.2. *Soit τ une topologie (X, Y)-compatible, si X est fortement-τ-polaire, on a:*

1° Tout sous-ensemble K-fermé et τ-fermé est $\sigma(X, Y)$-fermé;

2° Tout sous-espace τ-fermé est $\sigma(X, Y)$-fermé.

Proposition 4.5. *Soient τ une topologie (X, Y)-compatible et A un sous-ensemble de X absolument K-convexe; si X est fortement-τ-polaire, on a: $Kf(\overline{A}) = A^{\circ\circ}$.*

Preuve. $Kf(\overline{A})$ est τ-fermé et K-fermé, donc Y-fermé (théorème 4.2.), et alors $A^{\circ\circ} = \widetilde{A} \subset Kf(\overline{A})$. D'autre part, $A^{\circ\circ}$ est τ-fermé et K-fermé, donc $Kf(\overline{A}) \subset A^{\circ\circ}$.

Corollaire 4.3. *Soit A un sous-ensemble de X absolument K-convexe, on a: $Kf(\overline{A}^{\sigma(X,Y)}) = A^{\circ\circ}$.*

Maintenant, on va caractériser les topologies τ (X, Y)-compatibles telles que X soit τ-polaire.

Théorème 4.3. *Soit τ une topologie localement K-convexe sur X; si X est τ-polaire, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) τ est (X, Y)-compatible;

(ii) τ est une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence, où $\mathcal{A}$ est formée de sous-ensembles de Y $\sigma(Y, X)$-bornés et X-fermés.

Preuve. (i)⇒(ii). Soit $\mathcal{P}$ la famille filtrante et stable par multiplication par un scalaire de semi-normes n.a. définissant la topologie τ.

Pour tout $p \in \mathcal{P}$ posons $A_p = \{y \in Y / |\langle x, y\rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in X\}$; et soit $\mathcal{A} = \left\{\mathcal{A}_{\surd}/_{\surd} \in \mathcal{P}\right\}$. $\mathcal{A}$ est filtrante à droit par inclusion.

Pour tout $x \in X$ $|\langle x, A_p\rangle| \leq p(x)$, donc A_p est $\sigma(Y, X)$-borné.

Soit $y \in Y$, y est τ-continue; il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $|\langle x, y\rangle| \leq p(x)$ $\forall x \in X$, donc $y \in A_p$. En outre, pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $p \in \mathcal{P}$ on $\lambda A_p = A_{|\lambda| p}$. Soit τ' la topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X; τ' est définie par la famille de semi-normes n.a. $(q_{A_p})_{p \in \mathcal{P}}$, avec $q_{A_p}(x) = \sup\{|\langle x, y\rangle| / y \in A_p\}$.

Comme p est τ-polaire $\forall p \in \mathcal{P}$, on a $q_{A_p} = p$; et alors $\tau' = \tau$.

D'autre part, pour tout $p \in \mathcal{P}$ A_p est K-fermé et $A_p = \bigcap_{x \in X} x^{-1}(\overline{B}_p(0, p(x)))$ est $\sigma(Y, X)$-fermé, donc A_p est X-fermé (Y est fortement-$\sigma(Y, X)$-polaire).

(ii)⇒(i) τ est une topologie polaire, donc $\sigma(X, Y) \leq \tau$, et alors $Y \subset X'$.

Soit $f \in X'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $|f(A^\circ)| \leq 1$, donc $f \in A^{\circ\circ}$ dans la dualité séparante $\left\langle X, X'\right\rangle$. A est X-fermé, donc A est K-fermé et $\sigma(Y, X)$-fermé, alors A est $\sigma(X', X)$-fermé, d'où A est X-fermé dans la dualité séparante $\left\langle X, X'\right\rangle$ (X' est fortement-$\sigma(X', X)$-polaire), et par suite $f \in A \subset Y$.

Si K est sphériquement complet, on a le résultat suivant:

Théorème 4.4. *Supposons que K soit sphériquement complet; si τ est une topologie localement K-convexe sur X, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) τ est (X, Y)-compatible;

(ii) τ est une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence, où $\mathcal{A}$ est formée de sous ensembles de Y absolument K-convexes, $\sigma(Y, X)$-bornés et $\sigma(Y, X)$-C-compacts.

Preuve. (i)⇒(ii) . Soit τ une topologie (X, Y)-compatible, τ posséde un S.F.V. de 0 , $\mathcal{U}$ formé de sous-ensembles absolument K-convexes et Y-fermés (théorème 4.1.). Posons $\mathcal{A} = \{U^\circ / U \in \mathcal{U}\}$, alors τ est la topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence sur X; et pour tout $U \in \mathcal{U}$, U° est absolument K-convexe, $\sigma(Y,X)$-borné (U est absorbant) et $\sigma(Y,X)$-C-compact (corollaire 2.1.).

(ii)$\Rightarrow$(i). On a $Y \subset X'$; soit $f \in X'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $|f(A^\circ)| \leq 1$.

Donc $f \in A^{\circ\circ}$ dans la dualité séparante $\left\langle X, X' \right\rangle$. A est absolument K-convexe et $\sigma(Y,X)$-C-compact, donc A est $\sigma(Y,X)$-fermé, et alors A est $\sigma(X',X)$-fermé dans X', et on a $A^{\circ\circ} \subset \alpha A \subset Y$ pour $|\alpha| > 1$, donc $f \in Y$.

On démontre de la même façon le théorème suivant:

Théorème 4.5. *Supposons que K soit local; si τ est une topologie localement K-convexe sur X, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) τ est (X,Y)-compatible;

(ii) τ est une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence, où $\mathcal{A}$ est formée de sous-ensembles de Y absolument K-convexes et $\sigma(Y,X)$-compacts.

Corollaire 4.4. *1° la topologie X-fermée $\tau_f(X,Y)$ est la topologie la plus fine parmi toutes les topologies τ (X,Y)-compatibles telles que X soit τ-polaire.*

2° Si *K est sphériquement complet, la topologie C-compact $\tau_c(X,Y)$ est la topologie la plus fine parmi toutes les topologies (X,Y)-compatibles.*

3° Si K est local, la topologie de Mackey $\tau_m(X,Y)$ est la topologie la plus fine parmi toutes les topologies (X,Y)-compatibles.

Pour les sous-ensembles bornés, on a le théorème suivant:

Théorème 4.6. *Supposons que Y soit $\sigma(Y,X)$-complet, et soit τ une topologie (X,Y)-compatible telle que X soit τ-polaire. Pour qu'un sous-ensemble de X soit τ-borné il faut, et il suffit, qu'il soit $\sigma(X,Y)$-borné.*

2. Preuve

τ est une topologie polaire de $\mathcal{A}$-convergence, où $\mathcal{A}$ est formée de sous-ensembles $\sigma(Y,X)$-bornés et X-fermés (théorème 4.3.). Soit M un sous-ensemble $\sigma(Y,X)$-borné; M° est absolument-K-convexe, absorbant et $\sigma(Y,X)$-fermé. Soit $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est $\sigma(Y,X)$-fermé, donc A est $\sigma(Y,X)$-complet, et alors il existe $\lambda \in K$ tel que $A \subset \lambda M^\circ$ ([6], lemme 7.6., donc $M \subset \lambda A^\circ$, et par suite M est τ-borné.

Corollaire 4.5. *Si Y est $\sigma(Y,X)$-complet, toutes les topologies τ (X,Y)-compatibles telles que X soit τ-polaire admettent les mêmes sous-ensembles bornés.*

Proposition 4.6. *Supposons que K soit discret et sphériquement complet, et soient τ une topologie (X,Y)-compatible et A un sous-ensemble de X. Pour que A soit absolument K-convexe et τ-fermé il faut, et il suffit, que $A = A^{\circ\circ}$.*

Preuve. Si A est absolument K-convexe et τ-fermé, on a $A = A^{\circ\circ}$ (proposition 4.1.). Réciproquement, si $A = A^{\circ\circ}$, A est absolument K-convexe et $\sigma(X,Y)$-fermé, donc τ-fermé.

Corollaire 4.6. *Si K est discret, les sous-ensembles absolument K-convexes et fermés sont les mêmes pour toutes les topologies (X,Y)-compatibles.*

Proposition 4.7. *Supposons que K soit dense et sphériquement complet, et soient τ une topologie (X,Y)-compatible et A un sous-ensemble de X absolument K-convexe et τ-fermé, on a: $\overline{A}^{\sigma(X,Y)} \subset Kf(A)$.*

Preuve. $A^{\circ\circ}$ est $\sigma(X,Y)$-fermé, donc $\overline{A}^{\sigma(X,Y)} \subset A^{\circ\circ}$, et alors $\overline{A}^{\sigma(X,Y)} \subset Kf(A)$ (proposition 4.1.).

Corollaire 4.7. *Si K est dense et sphériquement complet, les sous-ensembles absolument K-convexes K-fermés et fermés sont les mêmes pour toutes les topologies (X,Y)-compatibles.*

§ 5. Espaces tonnelés et espaces réflexifs

Soit (E,τ) un espace localement K-convexe; on appelle τ-tonneau de E tout sous-ensemble de E absolument K-convexe, absorbant et τ-fermé. Et on dit que E est τ-tonnelè si tout τ-tonneau est un voisinage de 0.

Proposition 5.1. *Soit τ une topologie (X,Y)-compatible; si X est τ-tonnelé, tout sous-ensemble de Y $\sigma(Y,X)$-borné est τ-équicontinu.*

Preuve. Soit H un sous-ensemble de Y $\sigma(Y,X)$-borné; H° est absorbant, absolument K-convexe et $\sigma(X,Y)$-fermé, donc τ-fermé, et alors H° est un τ-tonneau, donc un voisinage de 0.

La réciproque de cette proposition est vraie si le corps K est sphériquement complet:

Proposition 5.2. *Supposons que K soit sphériquement complet, et soit τ une topologie (X,Y)-compatible, si tout sous-ensemble de* Y *$\sigma(Y,X)$-borné est τ-équicontinu, X est τ-tonnelé.*

Preuve. Soit A un τ-tonneau de X, A° est $\sigma(Y,X)$-borné, donc $A^{\circ\circ}$ est un voisinage de 0; or $\alpha A^{\circ\circ} \subset A$ pour $|\alpha| < 1$ (proposition 4.1.), donc A est un voisinage de 0.

Proposition 5.3. *Toute topologie polaire admet un S.F.V. de 0 formé par des $\sigma(Y,X)$-tonneaux.*

Proposition 5.4. *Si la topologie forte $\tau_b(X,Y)$ n'est pas (X,Y)-compatible, il n'existe pas de topologie τ (X,Y)-compatible telle que X soit τ-tonnelé.*

Preuve. Supposons qu'il existe une topologie τ (X,Y)-compatible telle que X soit τ-tonnelé. Soit A un sous-ensemble de Y $\sigma(Y,X)$-borné, A est τ-équicontinu (propositon 5.1.), donc A° est un voisinage de 0 pour τ, et alors $\tau = \tau_b(X,Y)$, ce qui est absurde.

Corollaire 5.1. *Si la topologie forte $\tau_b(X,Y)$ est (X,Y)-compatible et X est $\tau_b(X,Y)$-tonnelé, $\tau_b(X,Y)$ est l'unique topologie τ (X,Y)-compatible telle que X soit τ-tonnelé.*

Proposition 5.5. *Si K est sphériquement complet, X est $\tau_b(X,Y)$-tonnelé.*

Preuve. $\tau_b(X,Y)$ est (X,Y)-compatible (proposition 3.4.), et le résultat découle de la proposition 5.2.

Si τ est une topologie (X,Y)-compatible, tout $\sigma(X,Y)$-tonneau est un τ-tonneau. Pour la réciproque, si K est discret ,donc sphériquement complet, les sous-ensembles de X absolument K-convexes et fermés sont les mêmes pour toutes les topologies (X, Y)-compatibles (corollaire 4.6.), et alors tout τ-tonneau est un $\sigma(X, Y)$-tonneau. Si K est dense et sphériquement complet, tout τ-tonneau K-fermé est un $\sigma(X, Y)$-tonneau (corollaire 4.7.).

Proposition 5.6. *Supposons que K soit sphériquement complet, et soit τ une topologie (X, Y)-compatible, tout τ-tonneau de X contient un $\sigma(X, Y)$-tonneau.*

Preuve. Soit A un τ-tonneau de X; A est absolument K-convexe et τ-fermé, donc $\overline{A}^{\sigma(X,Y)} \subset \alpha A$ pour $|\alpha| > 1$ (proposition 4.1.).

$\frac{1}{\alpha}\overline{A}^{\sigma(X,Y)}$ est un $\sigma(X, Y)$-tonneau, et on a $\frac{1}{\alpha}\overline{A}^{\sigma(X,Y)} \subset A$.

Définition 5.1. *Soit τ une topologie localement K-convexe sur X; on dit que X est $f\tau$-tonnelè si tout τ-tonneau Y-fermè est un voisinage de* 0.

Tout espace τ-tonnelé est $f\tau$-tonnelé. Pour la réciproque, on a la proposition suivante:

Proposition 5.7. *Soit τ une topologie (X, Y)-compatible telle que X soit fortement-τ-polaire. Pour que X soit τ-tonnelé il faut, et il suffit, qu'il soit $f\tau$-tonnelé.*

Preuve. Supposons que X Soit $f\tau$-tonnelé, et soit A un τ-tonneau de X, $Kf(A)$ et K-fermé et τ-fermé, donc il est Y-fermé (théorème 4.2.), et alors $Kf(A)$ est un voisinage de 0, donc A est un voisinage de 0.

Proposition 5.8. *Soit τ une topologie (X, Y)-compatible; les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) X est $f\tau$-tonnelé;

(ii) Si B est un sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$-borné, la semi-norme n.a. $p(x) = \sup\{|\langle x, y\rangle| \,/ y \in B\}$ est τ-continue.

Preuve. (i)$\Rightarrow$(ii). Soit B un sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$-borné; B° est un τ-tonneau Y-fermé, donc c'est un voisinage de 0, et on a $p(B^\circ) \leq 1$, donc p est τ-continue.

(ii)$\Rightarrow$(i). Soit U un τ-tonneau Y-fermé dans X. Posons: $p(x) = \sup\{|\langle x, y\rangle| \,/ y \in U^\circ\}$; U° est $\sigma(Y, X)$-borné. p est τ-continue, donc il existe V un voisinage de 0 tel que $p(V) \leq 1$; alors $V \subset U^{\circ\circ} = U$, et par suite U est un voisinage de 0.

Définition 5.2. *On dit que X est semi-réflexif si X est isomorphe au dual topologique fort de Y.*

Si X est semi-réflexif, toute forme linéaire sur Y qui est faiblement continue est fortement continue.

Proposition 5.9. *Pour que X soit semi-réflexif il faut, et il suffit, que la topologie forte sur Y soit (Y, X)-compatible.*

Exemple 5.1. Considérons la dualité séparante $\langle\varphi(K), \omega(K)\rangle$ .D'après l'exemple 4.1, $\tau_b(\omega(K), \varphi(K))$ est $(\omega(K), \varphi(K))$-compatible, donc $\varphi(K)$ est semi-réflexif .

Théorème 5.1. *Si tout sous-ensemble de X absolument K-convexe, $\sigma(X, Y)$-borné et $\sigma(X, Y)$-fermé est $\sigma(X, Y)$-C-compact, alors*

$\tau_b(Y, X) = \tau_c(Y, X)$.

Preuve. Soit A un sous-ensemble de X $\sigma(X, Y)$-borné; $\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}$ est absolument K-convexe, $\sigma(X, Y)$-borné et $\sigma(X, Y)$-fermé, donc il est $\sigma(X, Y)$-C-compact, et alors $\left[\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}\right]^\circ = A^\circ$ est un voisinage de 0 pour $\tau_c(Y, X)$; d'où $\tau_b(Y, X) = \tau_c(Y, X)$.

Corollaire 5.2. *Si K est sphériquement complet, X est semi-réflexif.*

Preuve. Découle de la proposition 2.3., du théorème 4.4; et du théorème 5.1.

Définition 5.3. *Soit τ une topologie localement K-convexe sur X; on dit que X est τ-réflexif si:*

1° X est semi-réflexif;

2° $\tau = \tau_b(X, X')$, où $X' = (X, \tau)'$.

Théorème 5.2. *Si K est sphériquement complet et τ est une topologie (X, Y)-compatible telle que X* soit τ-tonnelé , *alors X est τ-réflexif.*

Preuve. X est semi-réfléxif (corollaire 5.2.), X est $\tau_b(X,Y)$-tonnelé (proposition 5.5.) et $\tau_b(X,Y)$ est (X,Y)-compatible (proposition 3.4.), alors $\tau = \tau_b(X,Y)$ (corollaire 5.1.). Donc $\tau = \tau_b(X,X')$.

References

[1] I. Fleischer, sur les espaces normés non-archimediens, Proc. Kond. Ned. Akad. V. Wetensch. A57, pp. 165-168, (1952).

[2] A. W. Ingleton, the Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields, Proc. combridge Philos. Soc. 48, pp. 41-45, (1952).

[3] A. F. Monna, analyse non-archimédienne, Springer-Verlag Berlin Heidel-Berg New York, (1970).

[4] A. C. M. Rooij, non-archimedean functional analysis, Marcel Dekker, New York, (1978).

[5] H. H. Schaefer, topological vector spaces, springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (1971).

[6] W. H. Schikhof, locally convex spaces over nonspherically complete valued I,II. Bull. soc. Math. Belg. Sér. B 38, pp. 187-224 (1986).

[7] T. A. Springer, une notion de compacité dans la théorie des espaces vectoriels topologiques, Indag. Math. 27, pp. 182-190, (1965).

[8] J. Van Tiel, Espaces localement K-convexes, I-III, Indag. Math. 27, pp. 249-289, (1965).

Received : March, 2001.

R. Ameziane Hassani
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah-FES
FES - MAROC
MAROC
E-MAIL : ramezianehassani@hotmail.com
and
Mohammed Babahmed
Departement de Mathematiques
Faculté des Sciences de Tétouan
Université Abdelmalek Essaâdi-TETOUAN
B. P. 1796 (FES ATLAS)
FES - MAROC
MAROC
E-MAIL : babahmedmohammed@hotmail.com