

LE SEUIL DE RECONSTRUCTIBILITÉ PAR LE HAUT MODULO LA DUALITÉ DES RELATIONS BINAIRES FINIES

JAMEL DAMMAK

Université Claude Bernard Lyon 1, Tunisie

Abstract

Etant donnée une relation binaire R , de base E , on définit sa duale R^ par $R^*(x, y) = R(y, x)$. La relation R est dite auto-duale si elle est isomorphe à R^* . Une relation binaire R' est hémimorphe à R , si elle est isomorphe à R ou à R^* . Une relation binaire à n éléments est $(-k)$ -demi-reconstructible, si elle est déterminée à l'hémimorphie près, par la donnée à l'hémimorphie près de ses restrictions de cardinal $(n - k)$. L'étude faite en [8] entraîne la $(-d)$ -demi-reconstructibilité des relations binaires finies pour tout $d \geq 12$. Nous établissons la $(-d)$ -demi-reconstructibilité des relations binaires finies pour tout $d \in \{11, 10, 9, 8, 7, 6\}$.*

Given a binary relation R of basis E , we define its dual R^ by $R^*(x, y) = R(y, x)$. A relation R is self-dual if it is isomorphic to R^* . A binary relation R' is hemimorphic to R , if it is isomorphic to R or to R^* . A relation R defined on n elements is $(-k)$ -half-reconstructible if it is determined, up to hemimorphism, by its restrictions of cardinality $(n - k)$. From [8] follows the $(-d)$ -half-reconstructibility of finite binary relations, for all $d \geq 12$. We establish the $(-d)$ -half-reconstructibility of finite binary relations, for all $d \in \{11, 10, 9, 8, 7, 6\}$.*

Mathematics Subject Classification : 03C60; 04A05; 05C20; 05C38; 05C40.

Key Words : Relation de différence, Relation binaire, Graphe, Hy-pomorphe, Hémimorphe, Reconstruction.

1. Introduction

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est noté $|E|$. Une relation binaire R de base E est une application du produit $E \times E$ dans $\{+, -\}$. Les éléments de E sont appelés sommets de R . Les paires de sommets sont appelées arêtes de R . Une arête $\{a, b\}$ est dite neutre si $R(a, b) = R(b, a)$, elle est dite pleine (resp. vide) si $R(a, b) = R(b, a) = +$ (resp. $R(a, b) = R(b, a) = -$). Une arête de R est dite orientée, si elle n'est pas neutre, dans ce cas on dit que a domine b si $R(a, b) = +$. On appelle duale de R , la relation R^* définie sur E par : pour tous éléments $x, y \in E$, $R^*(x, y) = R(y, x)$. La relation R est dite auto-duale si elle est isomorphe à R^* . L'isomorphie entre deux relations R et R' est notée $R \sim R'$. Une relation binaire T est un tournoi lorsque pour tout élément $x \in E$, $T(x, x) = -$ et pour tous éléments distincts $x, y \in E$, $T(x, y) \neq T(y, x)$. Un 3-cycle (a, b, c) est un tournoi T à 3 éléments défini par $T(a, b) = T(b, c) = T(c, a) = +$. Une k -chaîne est un ordre total irréflexif à k éléments. La restriction de R à une partie X de E , notée R/X , est la relation de base X définie par : pour tous éléments x, y de X , $R/X(x, y) = R(x, y)$. Une relation R de base finie E est dite *connexe*, si pour tous éléments distincts x, y de E , il existe une suite $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$, telle que pour tout $i = 0, 1, \dots, k-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$.

Soient R et R' deux relations binaires de bases respectives E et E' , et f une bijection de E sur E' . L'application f est dite un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) de R sur R' , si pour tous x, y éléments de E , $R'(f(x), f(y)) = R(x, y)$ (resp. $R'(f(x), f(y)) = R^*(x, y)$). Dans ce cas on dit que R et R' sont isomorphes et on note $R' \sim R$ (resp. R et R' sont anti-isomorphes et on note $R' \sim R^*$). Une relation binaire R' est hémimorphe à R , si elle est isomorphe à R ou à R^* . Une relation binaire R est dite auto-duale si elle est isomorphe à R^* . Une relation binaire est dite non auto-duale minimale, si elle est non auto-duale et si toutes ses restrictions strictes sont auto-duales. Une relation binaire H s'abrite dans R si H est isomorphe à une restriction de R . Une restriction R/A s'inverse dans R' si $R'/A = R^*/A$. Deux relations binaires R et R' de base commune E de cardinal n sont dites k -hémimorphes (resp. k -hypomorphes) lorsque pour toute partie X de E de cardinal k , $R'/X \sim R/X$ ou $R'/X \sim R^*/X$ (resp. $R'/X \sim R/X$); définition analogue lorsque $\text{card}(X) \leq k$, on remplace alors le préfixe (k) par $(\leq k)$ dans les notations. La $(n-k)$ -hémimorphie (resp. $(n-k)$ -hypomorphie) est encore notée $(-k)$ -hémimorphie (resp. $(-k)$ -hypomorphie). Une relation R est dite k -demi-reconstructible (resp.

k -restructible) si toute relation k -hémimorphe (resp. k -hypomorphe) à R , lui est hémimorphe (resp. isomorphe); définition analogue pour la $(\leq k)$ -demi-restructibilité (resp. $(\leq k)$ -restructibilité), et aussi de la $(-k)$ -demi-restructibilité (resp. $(-k)$ -restructibilité).

Dans ce papier nous montrons :

Théorème 3.1 *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 23$ sont $(n - 11)$ -demi-restructibles.*

Ensuite dans le cas général nous montrons : Pour tout entier $d \geq 6$, les relations binaires finies de cardinal $n \geq 16 + d$ sont $(n - d)$ -demi-restructibles.

2. Définitions. Notations. Rappels.

Somme lexicographique. Etant donnée une relation S de base $I = \{1, \dots, k\}$, associons à chaque $i \in I$, une relation R_i de base I_i de telle sorte que les bases I_i soient deux à deux disjointes. La S -somme des R_i , notée $S(R_1, \dots, R_k)$, est la relation définie sur la réunion des I_i de la façon suivante : $S(R_1, \dots, R_k)(x, y) = R_i(x, y)$ si $x, y \in I_i$ et $S(R_1, \dots, R_k)(x, y) = S(i, j)$ si $x \in I_i$ et $y \in I_j$ et $i \neq j$. Nous dirons aussi que la S -somme des R_i , est obtenue à partir de la relation S en dilatant chaque $i \in I$ par la relation R_i .

Relations particulières. Citons les relations irréflexives particulières suivantes :

- Une *presque-chaîne* de longueur k est obtenue à partir d'une k -chaîne en rendant neutre l'arête liant son premier et son dernier élément. Une presque-chaîne de longueur 3 est dite aussi une 3-consécutivité.

- Un *pic* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est neutre et les arêtes $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ sont orientées avec $R(a, c) = R(b, c)$.

- Un *drapeau* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est orientée, l'arête $\{b, c\}$ est pleine et l'arête $\{a, c\}$ est vide.

- Un *diamant positif* (resp. *négatif*) est un tournoi à 4 sommets constitué d'un 3-cycle (a, b, c) et d'un point d dominé par (resp. dominant) (a, b, c) . Le point d est dit sommet du diamant.

- Etant donné un entier h , T_h est le tournoi à $2h + 1$ sommets : $0, 1, \dots, 2h$ tel que pour tout sommet i , $T_h(i, i + k) = +$ pour $k \in \{1, \dots, h\}$, (l'entier $i + k$ étant considéré modulo $2h + 1$). Une relation R est un élément de

$D(T_h)$, si R est un tournoi obtenu en dilatant chaque sommet k de T_h par une chaîne p_k de cardinal fini. Rappelons que $D(T_h)$ est la classe des tournois finis sans diamant ([7], [10]).

- Soient un entier naturel $h \geq 3$ et l'ensemble $F = \{1, \dots, h\}$.

* On appelle consécuitivité $1 < 2 < \dots < h$, l'une des quatre relations définies sur F comme suit :

$[R_1(x, y) = + \text{ssi } (y = x+1)]$, $[R_2(x, y) = + \text{ssi } (y = x+1 \text{ ou } y = x)]$,
 $[R_3(x, y) = + \text{ssi } (y = x + 1 \text{ ou } |y - x| > 1)]$, $[R_4(x, y) = + \text{ssi } (y = x + 1 \text{ ou } |y - x| \neq 1)]$.

* On appelle cycle $1 < 2 < \dots < h < 1$, l'une des quatre relations définies sur F comme suit : pour toute consécuitivité R_i , ($1 \leq i \leq 4$), le cycle R'_i coïncide avec R_i , sauf peut être sur les couples $(1, h)$ et $(h, 1)$ où on a $R'_i(h, 1) = +$ et $R'_i(1, h) = -$.

- Etant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par S_n , l'une des relations définies sur les $2n$ éléments t_1, \dots, t_{2n} , par : $S_n(t_i, t_{i+n}) = S_n(t_{i+n}, t_i)$ pour $i = 1, \dots, n$, $S_n(t_i, t_{i+k}) = -S_n(t_{i+k}, t_i) = +$ pour $k = 1, \dots, n - 1$ et pour $i = 1, \dots, 2n$ (les entiers ici sont considérés modulo $2n$). On notera δ_n un élément de la famille $E(S_n)$, des extensions de S_n obtenues en augmentant la base de S_n d'ensembles (éventuellement vides) deux à deux disjoints s_1, \dots, s_{2n} , appelés secteurs de la relation, tels que :

i) Pour tout i , $\delta_n/s_i \cup \{t_i, t_{i+1}\}$ est une chaîne de premier élément t_i et de dernier élément t_{i+1} .

ii) Pour tout i , on a $\delta_n/s_i \cup s_{i+n}$ est un tournoi sans diamant.

iii) Pour tout i , pour tout x de s_i , pour tout y de s_{i+j} , ($j = 1, \dots, n - 1$), on a $\delta_n(x, y) = -$, $\delta_n(y, x) = +$, $\delta_n(t_i, y) = -\delta_n(y, t_i) = +$, et pour tout y de s_{i+j} , ($j = n, \dots, 2n - 1$), on a $\delta_n(t_i, y) = -\delta_n(y, t_i) = -$.

Intervalle, Décomposabilité. La notion suivante d'intervalle d'une relation binaire a été introduite par R. Fraïssé en [6]. Etant donnée une relation binaire R de base E , une partie I de E est un R -intervalle, lorsque pour tous éléments $a, b \in I$, tels que $R(a, a) = R(b, b)$, et pour tout élément $x \in E - I$, on a $R(a, x) = R(b, x)$ et $R(x, a) = R(x, b)$. Clairement, l'ensemble vide, les singletons et l'ensemble E sont des intervalles de R , appelés intervalles triviaux. Une relation ayant au moins trois sommets sera dite *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux, elle est dit *décomposable* dans le cas contraire. Si I et J sont deux R -intervalles, la valeur $R(a, b)$ est une constante quand a (resp. b) décrit l'ensemble I (resp. J) et on note $R(I, J)$ cette constante.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.1. [9] Les relations binaires finies sont (≤ 6) -restructibles.

Lemme 2.2. [5] Pour tout entier $d \geq 5$, les relations binaires connexes finies de cardinal $n \geq 7 + d$ sont $(n - d)$ -demi-restructibles.

Lemme 2.3. [4] Les relations binaires connexes finies sont (≤ 7) -demi-restructibles.

Lemme 2.4. [4] Pour tout entier $k \geq 2$, les relations binaires finies abritant un non auto-dual de cardinal k , sont $(\leq k + 6)$ -demi-restructibles.

Lemme 2.5. [12] Soient R et R' deux relations binaires de même base E de cardinal fini n . Si R et R' sont q -hémimorphes (resp. q -hypomorphes) où $1 \leq q \leq n - 1$, alors pour tout entier $p \leq \min(q, n - q)$, R et R' sont p -hémimorphes (resp. p -hypomorphes).

Lemme 2.6. [2] Soit B une relation binaire de base $\{1, \dots, n\}$ (où $n \geq 2$), $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, et R (resp. R') la relation obtenu à partir du relation B , en dilatant le sommet i_0 par une relation H (reps. H'). Si les relations R et R' sont isomorphes, alors les relations H et H' sont aussi isomorphes.

Lemme 2.7. [1] Soient n, d et h des entiers naturels avec $1 \leq d \leq n - 1$ et $1 \leq h \leq n - d$, H une relation binaire à h sommets, et R et R' deux relations binaires $(n - d)$ -hémimorphes et de base commune E à n éléments. Alors, pour toute partie A de E à au plus d éléments, le nombre de parties F de E contenant A telle que R/F est hémimorphe à H , est égal au nombre de parties F de E contenant A telle que R'/F est hémimorphe à H .

Notation. Dans la suite, on utilisera les notations suivantes (faites sous les hypothèses du lemme 2.7) $n(R, H, A) = \text{card}\{F \subset E : A \subset F \text{ et } R/F \sim H \text{ ou } R/F \sim H^*\}$ $n(R', H, A) = \text{card}\{F \subset E : A \subset F \text{ et } R'/F \sim H \text{ ou } R'/F \sim H^*\}$.

Sous ces notations, le lemme 2.7 dit que : $n(R, H, A) = n(R', H, A)$.

Lemme 2.8. ([5] et [11]). Soient R et R' deux relations binaires de base commune E de cardinal n .

i) Pour tout entier $h \geq 1$, si R et R' sont $(4, n - h)$ -hypomorphes et si $|E| \geq 6 + h$, alors R et R' sont isomorphes.

ii) Pour tout entier $h \geq 4$, si R et R' sont $(n - h)$ -hypomorphes et si $|E| \geq 6 + h$, alors R et R' sont isomorphes.

Relation de différence. La notion de relation de différence a été introduite par G. Lopez dans [9]. Soient deux relations binaires R et R' de même base E , qui sont (≤ 2) -hémimorphes. On définit la relation $D_{R,R'}$ de base E par : pour tout élément x de E , $D_{R,R'}(x, x) = +$ et pour tous éléments distincts x, y de E , $D_{R,R'}(x, y) = +$ lorsqu'il existe une suite $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ d'éléments de E telle que $R(x_i, x_{i+1}) \neq R'(x_i, x_{i+1})$ pour tout i élément de $\{0, 1, \dots, k-1\}$. La relation $D_{R,R'}$ est une relation d'équivalence appelée relation de différence dont les classes sont appelées classes de différence.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.9. [10] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 3) -hypomorphes sur une même base finie E . Toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle commun à R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives

Lemme 2.10. [10] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 4) -hypomorphes sur une base finie E , et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Alors :

i) Si R/C est un tournoi, alors il existe un entier h tel que R/C est un $D(T_h)$.

ii) Si R/C n'abrite pas de 3-cycle, alors R/C est soit une chaîne, soit une presque-chaîne, soit une consécuitivité, soit un cycle.

iii) Si R/C abrite un 3-cycle, et si R/C n'est pas un tournoi, alors il existe un entier n tel que R/C est un élément de $E(S_n)$.

Notons que comme conséquence du lemme 2.10, on a :

Corollaire 2.11. Soient R et R' deux relations binaires (≤ 4) -hypomorphes sur une base finie E , et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Alors :

i) S'il existe un entier h tel que $R/C \in D(T_h)$, alors $R'/C \in D(T_h^*)$ et $(R'/C$ et $R^*/C)$ sont (≤ 6) -hypomorphes.

ii) S'il existe un entier n telle que R/C est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \in E(S_n^*)$, et $(R'/C$ et $R^*/C)$ sont (≤ 6) -hypomorphes.

iii) R/C et R'/C n'abritent pas de restrictions non auto-dual de cardinal ≤ 4 .

Relation connexe et fortement connexe. Une relation R de base finie E est dite connexe (resp. fortement connexe), si pour tous éléments distincts x, y de E , il existe une suite $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$, telle que pour tout $i = 0, 1, \dots, k-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$ (resp. $R(x_i, x_{i+1}) =$

$-R(x_{i+1}, x_i) = +$). La composante connexe (resp. fortement connexe) d'une partie A de E , telle que R/A est connexe, est la plus grande partie D de E telle que D contient A et la restriction R/D soit connexe (resp. R/D soit fortement connexe).

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.12. [5] Soient d un entier ≥ 5 , R et R' deux relations binaires $(-d)$ -hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à $7 + d$, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si C est différente de sa composante connexe, alors :

- i) C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.
- ii) $R'/C \sim R/C$.

Lemme 2.13. [5] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5) -hémimorphes sur une base finie E . Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^*,R'}$ possède une seule classe, alors R et R' sont des chaînes.

Lemme 2.14. [3] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5) -hémimorphes sur une base finie E et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si R/C et R'/C sont (≤ 5) -hypomorphes et si R/C est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C \sim R^*/C$.

Notons que comme conséquence des lemmes 2.10 et 2.14 on a :

Corollaire 2.15. Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5) -hémimorphes sur une base finie E , D une composante connexe de R et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R . Si $k = 6$ et si R/D n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/D \sim R/D \sim R^*/D$.

Corollaire 2.16. Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5) -hémimorphes sur une base finie E , D une composante connexe de R et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R .

- i) Si $k \in \{5, 6\}$ et si R/D n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/D \sim R/D \sim R^*/D$.
- ii) Si $k = 6$ et si R/D est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/D \sim R/D \sim R^*/D$.

Relations binaires non auto-duales minimales. Une relation binaire est dite non auto-duale minimale si elle est non auto-duale et toutes ses restrictions propres sont auto-duales.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.17. [4] Soient $r \geq 2$ un entier, R et R' deux relations binaires (≤ 4) -hémimorphes sur une base finie E . Si R n'abrite aucune restriction non auto-duale à au plus r sommets, alors les relations R, R^* et R' sont deux à deux $(\leq r)$ -hypomorphes.

Lemme 2.18. [4] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5) -hémimorphes sur une base finie E , et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, admettant une restriction non auto-duale, k la plus petite cardinalité des restrictions non auto-duales de R/C et I_0 la base d'une de ces restrictions. Alors la restriction R'/I_0 est isomorphe à R^*/I_0 .

Notons que comme conséquence des lemmes 2.17 et 2.18, on a :

Corollaire 2.19. Soit r un entier, $2 \leq r \leq 6$. Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5) -hémimorphes sur une base finie E , et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Alors R/C et R'/C sont $(\leq r)$ -hypomorphes ssi R/C n'abrite aucune relation non auto-duale minimale à au plus r sommets.

Lemme 2.20. [4] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 6) -hémimorphes sur une base finie E admettant une restriction non auto-duale, k la plus petite cardinalité des restrictions non auto-duales de R , I_0 la base d'une de ces restrictions et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors C est un intervalle de R et R' , sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

Lemme 2.21. [4] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 6) -hémimorphes sur une base finie E , admettant une restriction non auto-duale, C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ égale à sa composante connexe, k la cardinalité minimale des restrictions non auto-duales qui s'abritent dans R , et I_0 la base d'une de ces restrictions. Si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors :

- i) Si R/I_0 n'est pas un drapeau, alors $I_0 \cap C = \phi$.
- ii) Si R/I_0 est un drapeau, d'arête neutre $\{c, a\}$ et $\{c, b\}$, alors $I_0 \cap C = \phi$ ou $I_0 \cap C = \{c\}$.

Lemme 2.22. [4] Soient d un entier ≥ 5 , R et R' deux relations binaires $(\leq d)$ -hémimorphes sur une base finie E admettant une restriction non auto-duale, k la cardinalité minimale des restrictions non auto-duales qui s'abritent dans R , I_0 la base d'une de ces restrictions et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$.

- i) Si C est différente de sa composante connexe, alors R/C et R'/C sont $(\leq d - 1)$ -hypomorphes.

ii) Si $d \geq 6$, si $R'/I_0 \sim R/I_0$, si R/I_0 un drapeau et si $C \cap I_0 \neq \phi$, alors R/C et R'/C sont $(\leq d - 2)$ -hypomorphes.

iii) Si $d \geq 6$ et si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors R/C et R'/C sont $(\leq \max(k - 1, d - k))$ -hypomorphes.

3. La (-11)-demi-restructibilité des relations binaires finies.

Théorème 3.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 23$ sont $(n - 11)$ -demi-restructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n - 11)$ -hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 23 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R . Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 11) -hémimorphes. Suivant la valeur de k , on a:

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n - 11)$ -demi-restructible.

- Si $2 \leq k \leq 5$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 11-demi-restructible et par suite R est $(n - 11)$ -demi-restructible (lemme 2.5).

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n - 11)$ -demi-restructible.

Dans la suite $k = 6$, donc les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 5) -hypomorphes. Soit D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . D'après le corollaire 2.15 R/D est un tournoi sans diamant, de même le lemme 2.13 prouve que l'une des équivalences $D_{R/D, R'/D}$ ou $D_{R^*/D, R'/D}$ possède au moins deux classes.

La preuve du théorème 3.1 utilise les résultats suivants :

Proposition 3.2. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l'équivalence $D_{R/D, R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 3.2 on a :

Corollaire 3.3. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l'équivalence $D_{R^*/D, R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^*$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 3.2 C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $k = 6$, alors les relations R et R' sont (≤ 5)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 C est un intervalle de R et R' , sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives, la preuve de la proposition 3.2 utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.4. *i) Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*

ii) Si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$.

iii) Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. *i)* Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

ii) On suppose que C est une composante connexe de R . Comme $k = 6$ et R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors d'après le corollaire 2.2 $R'/C \sim R/C$.

iii) Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^*/C$.

□

Dans la suite on suppose que C et D sont deux composantes connexes non auto-duales de R qui sont des tournois sans diamant.

Lemme 3.5. *R'/D et R/D sont (≤ 6)-hypomorphes.*

Preuve. Puisque l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes et les relations R et R' sont (≤ 7)-hémimorphes, alors le i) du lemme 2.22 prouve que R'/D et R/D sont (≤ 6)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.1 $R'/D \sim R/D$. □

Lemme 3.6. *Si $|E - (C \cup D)| \geq 11$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. Comme l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $C \cap D = \phi$. D'après le lemme 3.4, on peut supposer que C est une composante connexe de R et que R/C est un tournoi sans diamant non auto-dual, et par suite R/C est fortement connexe. Posons $H = R/(C \cup D)$. Soient $(a, b) \in C \times D$. Considérons les parties F de E contenant $\{a, b\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Il n'y en a pas d'autre que $C \cup D$ car $H = R/(C \cup D)$ admet deux composantes connexes C et D . Le nombre de parties F de E contenant $\{a, b\}$ telles que R/F est

hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{a, b\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{a, b\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, \{a, b\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/(C \cup D) \sim H = R/(C \cup D)$ ou $R'/(C \cup D) \sim H^*$. Comme C et D sont les composantes connexes de $R/(C \cup D)$ et $R'/D \sim R/D$, alors $R'/C \sim R/C$. \square

Lemme 3.7. Si $|E - D| \geq 17$, alors $R/C \sim R'/C$.

Preuve. Si $|C| \leq 6$, alors le lemme 3.6 prouve que $R/C \sim R'/C$. Dans la suite $|C| \geq 7$. Soient A une partie de C de cardinal ≤ 6 , $b \in D$ et $H = R/(A \cup D)$. Si R/A est auto-dual, on a trivialement l'isomorphisme entre R/A et R'/A . Dans la suite, R/A n'est pas auto-dual. On va distinguer les cas suivants :

c_1) Cas où R/C et R/D ne sont pas hémimorphes.

Considérons les parties F de E contenant $\{b\} \cup A$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Il n'y en a pas d'autre que $A \cup D$, car $H = R/(A \cup D)$ admet deux composantes connexes A et D . Le nombre de parties F de E contenant $\{b\} \cup A$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{b\} \cup A) = 1$). D'après le lemme 2.7, $n(R', H, \{b\} \cup A) = 1$. Il s'ensuit que $R'/(A \cup D) \sim H$ ou $R'/(A \cup D) \sim H^*$. Comme A et D sont les composantes connexes de $R/(A \cup D)$ et $R'/D \sim R/D$, alors $R'/A \sim R/A$.

c_2) Cas R/C et R/D sont hémimorphes.

Soit $x \in (C - A)$. Considérons alors les parties F de $E - \{x\}$ contenant $\{b\} \cup A$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Il n'y en a pas d'autre que $A \cup D$ car A et D sont les composantes connexes de $H = R/(A \cup D)$. Le nombre de parties F de $E - \{x\}$ contenant $\{b\} \cup A$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R/(E - \{x\}), H, \{b\} \cup A) = 1$). D'après le lemme 2.7, $n(R'/(E - \{x\}), H, \{b\} \cup A) = 1$. Il s'ensuit que $R'/(A \cup D) \sim H$ ou $R'/(A \cup D) \sim H^*$. Comme A et D sont les composantes connexes de $H = R/(A \cup D)$ et $R'/D \sim R/D$, alors $R'/A \sim R/A$.

Dans les deux cas $R'/A \sim R/A$. Il s'ensuit que R/C et R'/C sont (≤ 6)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.1 $R/C \sim R'/C$. \square

Lemme 3.8. Si $h \geq 1$ et si $|D| \geq 6 + h$, alors il existe une partie A de D de cardinal h tel que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes.

Preuve. Soit $h \geq 1$. Si pour toute partie A de D de cardinal h , $R^*/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors R^*/D et R/D sont ($-h$)-hypomorphes

et comme R/D et R^*/D sont (≤ 4) -hypomorphes et $|D| \geq 6 + h$, alors $R^*/D \sim R/D$ (lemme 2.8), ce qui est impossible. D'où il existe $A \subset D$ tel que $R/(E - A)$ est non auto-dual. D'après le lemme 3.5 R/D et R'/D sont (≤ 6) -hypomorphes, alors $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont aussi (≤ 6) -hypomorphes, et par suite $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$ (lemme 2.1). Il s'ensuit que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. \square

Lemme 3.9. $R/C \sim R'/C$.

Preuve. D'après le lemme 3.4 C et D sont deux composantes connexes de R qui sont deux tournois sans diamant. Posons $X = E - (C \cup D)$. D'après le lemme 3.6 on peut supposer que $|X| \leq 10$, de même d'après le lemme 3.7 on suppose que $|E - D| \leq 16$. Suivant le cardinal de C , on a :

Cas 1 Si $|C| \leq 6$.

Suivant le cardinal de X , on a :

c_1) $|X| = 10$. D'après le lemme 3.8 il existe une partie A de D de cardinal 1 tel que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X)$ sur $R'/(E - A \cup X)$. Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$. Si f est un anti-isomorphisme. Comme C est connexe, alors d'après le lemme 2.3 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si $R'/C \sim R^*/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^*/(D - A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

c_2) $|X| \leq 9$. D'après le lemme 3.8 il existe une partie A de D tel que $|X| + |A| = 11$ et $(R/(D - A)$ et $R'/(D - A))$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Nous montrons comme dans le cas c_1 que $R/C \sim R'/C$.

Cas 2 Si $|C| \geq 7$.

Soient J une partie de C de cardinal h tel que $|C| - h = 6$. D'après le lemme 3.8 il existe une partie A de D telle que $|A| + |J| + |X| = 11$ et $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X \cup J)$ sur $R'/(E - A \cup X \cup J)$.

- Si f est un isomorphisme. Comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$.

- Si f est un anti-isomorphisme. Comme $|C - J| = 6$, alors $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$ ou $R'/(C - J) \sim R^*/(C - J)$. Si $R'/(C - J) \sim R^*/(C - J)$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^*/(D - A)$ ce qui est impossible. Donc $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$.

Dans les deux cas $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Les restrictions R/C et R'/C sont donc $(4, -h)$ -hypomorphes et $|C| - h = 6$. Il s'ensuit que

$R/C \sim R'/C$ (lemme 2.8). □

Optimalité de la valeur 23 du théorème 3.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l’optimalité de la valeur 23 du théorème 3.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i, T_i est une i -chaîne.

Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_{10})$ et $R' = S(R_1, R^*_1, T_{10})$ (où S est une relation vide à 3 éléments) sont (-11) -hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 22.

4. La (-10) -demi-restructibilité des relations binaires finies

Théorème 4.1. . *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 22$ sont $(n - 10)$ -demi-restructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n - 10)$ -hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 22 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R . Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 10) -hémimorphes. On a :

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n - 10)$ -demi-restructible.
- Si $2 \leq k \leq 4$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 10-demi-restructible et par suite R est $(n - 10)$ -demi-restructible (lemme 2.5).
- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n’admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n - 10)$ -demi-restructible.

Dans la suite $k \in \{5, 6\}$ donc les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 4) -hypomorphes. Soit D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . D’après le i) du corollaire 2.16 R/D est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, de même le lemme 2.13 prouve que l’une des équivalences $D_{R/D, R'/D}$ ou $D_{R^*/D, R'/D}$ possède au moins deux classes.

La preuve du théorème 3.1 utilise les résultats suivants :

Proposition 4.2. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l’équivalence $D_{R/D, R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 4.2 on a :

Corollaire 4.3. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l'équivalence $D_{R^*/D, R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^*$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 4.2 C est une classe de l'équivalence $D_{R, R'}$. Comme $k \in \{5, 6\}$, alors les relations R et R' sont (≤ 4)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 C est un intervalle de R et R' , sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives, la preuve de la proposition 4.2 utilise les lemmes suivants :

Lemme 4.4. *i) Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*

ii) Si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$.

iii) Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. i) Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

ii) On suppose que C est une composante connexe de R . Comme $k \in \{5, 6\}$ et R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors d'après le lemme 2.10 $R'/C \sim R/C$.

iii) Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^*/C$.
□

Dans la suite on suppose que C et D sont deux composantes connexes non auto-duales de R qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$.

Lemme 4.5. *Si $|E - (C \cup D)| \geq 10$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.6. □

Lemme 4.6. *Si $|E - D| \geq 16$, alors $R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.7. □

Lemme 4.7. $R/C \sim R'/C$.

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.9. □

Optimalité de la valeur 22 du théorème 4.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l’optimalité de la valeur 22 du théorème 4.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i , T_i est une i -chaîne.

Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_9)$ et $R' = S(R_1, R^*_1, T_9)$ (S est une relation vide a 3 éléments) sont (-10) -hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 21.

5. La (-9) -demi-restructibilité des relations binaires finies.

Théorème 5.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 21$ sont $(n - 9)$ -demi-restructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n - 9)$ -hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 21 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R , et I_0 la base d’une de ces restrictions. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 9) -hémimorphes. On a :

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n - 9)$ -demi-restructible.
- Si $2 \leq k \leq 3$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 9-demi-restructible et par suite R est $(n - 9)$ -demi-restructible (lemme 2.5).
- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n’admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n - 9)$ -demi-restructible.
- Si $k \in \{5, 6\}$, alors les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 4) -hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R , nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l’équivalence $D_{R/D, R'/D}$ (resp. $D_{R^*/D, R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^*$).

Dans la suite $k = 4$, donc les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 3) -hypomorphes, et par suite d’après le lemme 2.9 toute classe C de l’équivalence $D_{R, R'}$ est un intervalle de R et R' , sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve du théorème 5.1 utilise les résultats suivants :

Proposition 5.2. *Si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 5.2 on a :

Corollaire 5.3. *Si $R'/I_0 \sim R^*/I_0$, alors $R' \sim R^*$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 5.2, C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, la preuve utilise les lemmes suivants :

Lemme 5.4. *i) Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*

ii) Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. i) Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

ii) Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^*/C$. \square

Dans la suite on suppose C est une composante connexe non auto-duale de R .

Lemme 5.5. $I_0 \cap C = \phi$.

Preuve. Puisque R/I_0 n'est pas un drapeau, et $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le i) du lemme 2.21 $I_0 \cap C = \phi$. \square

Lemme 5.6. *i) R/C et R'/C sont (≤ 5) -hypomorphes.*

ii) Si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. i) Comme R et R' sont (≤ 9) -hémimorphes et $R'/I_0 \sim R/I_0$, et $|I_0| = 4$, alors le lemme 2.13 prouve que R'/C et R/C sont (≤ 5) -hypomorphes.

ii) Puisque R'/C et R/C sont (≤ 5) -hypomorphes, alors le lemme 2.10 de G. Lopez et C. Rauzy nous donne la forme de R/C et de R'/C , d'après la forme si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$. Dans le cas où R/C est un élément de $E(S_n)$, le lemme 2.14 prouve que $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$. \square

Lemme 5.7. *Si $|E - (C \cup I_0)| \geq 9$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. D'après le lemme 5.4 on suppose que C est une composante connexe non auto-duale de R , de même d'après le lemme 5.6 on suppose que R/C est un tournoi sans diamant, et par suite R/C est fortement connexe. Soient $H = R/(I_0 \cup C)$, et $a \in C$. Considérons alors les parties F de E contenant $I_0 \cup \{a\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Il n'y en a pas d'autre que $I_0 \cup C$ car I_0 et C sont les composantes connexes de $H = R/(I_0 \cup C)$. Le nombre de parties F de E contenant $I_0 \cup \{a\}$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, I_0 \cup \{a\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $I_0 \cup \{a\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, I_0 \cup \{a\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/(C \cup I_0) \sim H$ ou $R'/(C \cup I_0) \sim H^*$. Comme $R/(C \cup I_0)$ admet deux composantes connexes I_0 et C , et $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R/C \sim R'/C$. \square

Lemme 5.8. $R'/C \sim R/C$.

Preuve. D'après le lemme 2.17, on peut supposer que R/C est un tournoi sans diamant. Posons $X = E - (C \cup I_0)$, suivant le cardinal de x , on les cas suivants :

- c_1 Si $|X| \geq 9$, alors le lemme 3.4 prouve que $R/C \sim R'/C$.
- c_2 Si $|X| = 8$. Soit J une partie de C de cardinal 1. Comme R/C est un tournoi sans diamant, alors $R/(C - J)$ est soit fortement connexe, soit une chaîne. Si $R/(C - J)$ est une chaîne, alors $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Dans la suite $R/(C - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - X \cup J)$ sur $R'/(E - X \cup J)$. Comme $R/(E - X \cup J)$ admet deux composantes connexes I_0 et $C - J$ et $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors f est un isomorphisme avec $f(I_0) = I_0$ et $f(C - J) = C - J$. Il s'ensuit que $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Donc R/C et R'/C sont $(4, -1)$ -hypomorphes et $|C| \geq 7$, et par suite d'après le lemme 2.8 $R/C \sim R'/C$.
- c_3 Si $|X| = 7$. Soit J une partie de C de cardinal 2. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Donc R/C et R'/C sont $(4, -2)$ -hypomorphes et $|C| \geq 8$, et par suite d'après le lemme 2.8 $R'/C \sim R/C$.
- c_4 Si $|X| \leq 6$. Soit J une partie de C de cardinal h tel que $h + |X| = 9$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Donc R/C et R'/C sont $(4, -h)$ -hypomorphes et $|C| \geq 6 + h$, et par suite d'après le lemme 2.8 $R'/C \sim R/C$. \square

Optimalité de la valeur 21 du théorème 5.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l'optimalité de la valeur 21 du théorème 5.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i , T_i est une i -chaîne. Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_8)$ et $R' = S(R_1, R_1^*, T_8)$ (où S est une relation vide à 3 éléments) sont (-9) -hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 20.

6. La (-8) -demi-reconstructibilité des relations binaires finies.

Théorème 6.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 20$ sont $(n - 8)$ -demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n - 8)$ -hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 20 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R , et I_0 la base d'une de ces restrictions. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 8) -hémimorphes. On a :

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n - 8)$ -demi-reconstructible.

- Si $k = 2$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 8-demi-reconstructible et par suite R est $(n - 8)$ -demi-reconstructible (lemme 2.5).

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n - 8)$ -demi-reconstructible.

- Si $k \in \{5, 6\}$, alors les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 4) -hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R , nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l'équivalence $D_{R/D, R'/D}$ (resp. $D_{R^*/D, R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^*$).

- Si $k = 4$. Nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0 \sim R/I_0$ (resp. $R'/I_0 \sim R^*/I_0$), alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^*$).

Dans la suite $k = 3$.

La preuve du théorème 6.1 utilise la proposition suivante :

Proposition 6.2. *Si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R \sim R'$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 6.2 on a :

Corollaire 6.3. *Si $R'/I_0 \sim R^*/I_0$, alors $R' \sim R^*$.*

Preuve de la proposition 6.2 Soit C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le lemme 2.21, $I_0 \cap C = \phi$ ou $I_0 \cap C = \{c\}$ avec R/I_0 est un drapeau, d'arête neutre $\{c, a\}$ et $\{c, b\}$.

i) Si $I_0 \cap C = \phi$, nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R/C \sim R'/C$.

ii) Si R/I_0 est un drapeau, d'arête neutre $\{c, a\}$ et $\{c, b\}$ et $I_0 \cap C = \{c\}$, alors le ii) du lemme 2.21 prouve que R/C et R'/C sont (≤ 6)-hypomorphes, et par suite $R'/C \sim R/C$ (d'après le lemme 2.1).

Optimalité de la valeur 20 du théorème 6.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l'optimalité de la valeur 20 du théorème 6.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i , T_i est une i -chaîne. Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_7)$ et $R' = S(R_1, R^*_1, T_7)$ (où S est une relation vide à 3 éléments) sont (-8)-hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 19.

7. La (-7)-demi-restructibilité des relations binaires finies.

Théorème 7.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 25$ sont $(n - 7)$ -demi-restructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n - 7)$ -hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 25 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R , et I_0 la base d'une de ces restrictions. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 7)-hémimorphes. On a :

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n - 7)$ -demi-restructible.

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n - 7)$ -demi-restructible.

- Si $k \in \{5, 6\}$, alors les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 4)-hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R , nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l'équivalence $D_{R/D, R'/D}$ (resp. $D_{R^*/D, R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^*$).

- Si $k \in \{2, 3\}$. Nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0 \sim R/I_0$ (resp. $R'/I_0 \sim R^*/I_0$), alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^*$).

Dans la suite $k = 4$, donc les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 3)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 toute classe C de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R' , sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve du théorème 7.1 se base sur la proposition suivante :

Proposition 7.2. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 7.2 on a :

Corollaire 7.3. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l'équivalence $D_{R^*/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^*$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 7.2, C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, la preuve utilise les lemmes suivants :

Lemme 7.4. *i) Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*

ii) Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. *i)* Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

ii) Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^*/C$.

□

Dans la suite C est une composante connexe non auto-duale de R .

Lemme 7.5. *Si $|E - (C \cup D)| \geq 7$, alors $R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.6. □

Lemme 7.6. *Si $|E - D| \geq 13$, alors $R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.7. \square

Lemme 7.7. Si $h \geq 4$ et si $|D| \geq 6 + h$, alors il existe une partie A de D de cardinal h tel que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes.

Preuve. Soit $h \geq 4$. Si pour toute partie A de D de cardinal h , $R^*/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors R^*/D et R/D sont $(-h)$ -hypomorphes et $|D| \geq 6 + h$, alors $R^*/D \sim R/D$ (lemme 2.8), ce qui est impossible. D'où il existe $A \subset D$ telle que $R/(E - A)$ est non auto-dual. D'après le i) du lemme 2.22 R/D et R'/D sont (≤ 6) -hypomorphes, alors $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont aussi (≤ 6) -hypomorphes, et par suite $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$ (lemme 2.1). Il s'ensuit que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. \square

Lemme 7.8. $R/C \sim R'/C$.

Preuve. Posons $X = E - (C \cup D)$. D'après le lemme 7.5 on peut supposer que $|X| \leq 6$, de même d'après le lemme 7.6 on suppose que $|E - D| \leq 12$, et par suite $|C| \leq 12$. Suivant le cardinal de X , on a :

$c_1) |X| = 0$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 7 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A)$ sur $R'/(E - A)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. Comme C est connexe, alors d'après le lemme 2.3 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si $R'/C \sim R^*/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^*/(D - A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

$c_2) |X| = 1$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 6 tel que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X)$ sur $R'/(E - A \cup X)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. Comme C est connexe, alors d'après le lemme 2.3 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si $R'/C \sim R^*/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^*/(D - A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

$c_3) |X| = 2$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 5 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X)$ sur $R'/(E - A \cup X)$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R/C \sim R'/C$.

$c_4) |X| = 3$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X)$ sur $R'/(E-A \cup X)$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R/C \sim R'/C$.

$c_5) 4 \leq |X| \leq 6$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soient B une partie de X de cardinal 3 et f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X \cup B)$ sur $R'/(E-A \cup X \cup B)$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R/C \sim R'/C$. \square

8. La (-6)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies.

Théorème 8.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 23$ sont $(n-6)$ -demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n-6)$ -hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 23 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R , I_0 la base d'une de ces restrictions, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 6) -hémimorphes. On a :

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n-6)$ -demi-reconstructible.

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, et par suite le lemme 2.1 prouve que R est $(n-6)$ -demi-reconstructible.

- Si $k \in \{5, 6\}$, alors les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 4) -hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R , nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l'équivalence $D_{R/D, R'/D}$ (resp. $D_{R^*/D, R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^*$).

- Si $k \in \{2, 3\}$, nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0 \sim R/I_0$ (resp. $R'/I_0 \sim R^*/I_0$), alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^*$).

Dans la suite $k = 4$, donc les relations R, R^* et R' sont deux à deux (≤ 3) -hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 toute classe C de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R' , sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve du théorème 8.1 se base sur la proposition suivante :

Proposition 8.2. Soient C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, et D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R'/C \sim R/C$.

Notons que comme conséquence de la proposition 8.2 on a :

Corollaire 8.3. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R . Si l'équivalence $D_{R^*/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^*$.

Dans la suite de la preuve de la proposition 8.2, C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, la preuve utilise les lemmes suivants :

Lemme 8.4. Si $|E - C| \geq 6$, alors $R/C \sim R'/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$.

Preuve. d'après le lemme 2.12 on suppose que C est une composante connexe de R . Soient $H = R/C$, et $a \in C$. Considérons alors les parties F de E contenant a et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Comme C est une composante connexe de R , alors il n'y en a pas d'autre que C . Le nombre de parties F de E contenant a telle que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{a\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant a telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, \{a\}) = 1$). Il s'ensuit que $R/C \sim R'/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. □

Lemme 8.5. Si $|E - C \cup D| \geq 7$, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.6. □

Lemme 8.6. Si $|E - D| \geq 12$, alors $R/C \sim R'/C$.

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.7. □

Dans la suite $|E - D| \leq 11$, et par suite $|C| \leq 11$.

Lemme 8.7. *i)* Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède une classe fortement connexe de cardinal ≥ 10 , alors $R/C \sim R'/C$.

ii) Si toute classe fortement connexe de l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ est de cardinal ≤ 9 , alors R/D et R'/D sont (≤ 6) -hypomorphes.

Preuve. Soit K une classe de l'équivalence $D_{R/D, R'/D}$. Puisque K est différente de D , alors il existe $x \in D - K$ tel que $R(x, K) \neq R(K, x)$.

Montrons que K est un tournoi sans diamant.

On va raisonner par l'absurde supposons qu'il existe une arête neutre $\{a, b\}$ de K . D'où $R/\{x, a, b\}$ est un pic, ce qui est impossible, donc K est un tournoi. Comme $K \neq D$, alors le i) du lemme 2.22 prouve que R/K et R'/K sont (≤ 5)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.10 R/K est un tournoi sans diamant.

i) D'après le lemme 2.12 on suppose que C est une composante connexe de R et par suite $C \cap D = \emptyset$, de même d'après le lemme 8.6 on suppose que $|C| \leq 11$. Soient $H = R/(C \cup K \cup \{x\})$ et $Y = E - H$. On va distinguer les cas suivants :

c_1) Si $|Y| \geq 6$.

Soient a un point de C et b, c, d trois points de K , avec $R/\{b, c, d\}$ est un 3-cycle. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x, a, b, c, d\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Il n'y en a pas d'autre que $C \cup K \cup \{x\}$, car C et $K \cup \{x\}$ sont les composantes connexes de $H = R/(C \cup K \cup \{x\})$ et $|C| \leq |K \cup \{x\}|$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x, a, b, c, d\}$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{x, a, b, c, d\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{x, a, b, c, d\}$ telle que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, \{x, a, b, c, d\}) = 1$). Il s'ensuit que $R/C \sim R'/C$.

c_2) Si $|Y| = 5$.

Soient J une partie de K de cardinal 1 tel que $R/(K - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Comme C et $\{x\} \cup K - J$ sont les composantes connexes de $R/(E - Y \cup J)$, et $R/(\{x\} \cup K - J) \sim R'/(\{x\} \cup K - J)$, alors $R'/(E - Y \cup J) \sim R/(E - Y \cup J)$, et par suite $R/C \sim R'/C$.

c_3) Si $|Y| = 4$.

Soient J une partie de K de cardinal 2 tel que $R/(K - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Nous montrons comme dans c_2 que $R'/(E - Y \cup J) \sim R/(E - Y \cup J)$, et par suite $R/C \sim R'/C$.

c_4) Si $|Y| \leq 3$.

Soient J une partie de K tel que $|Y| + |J| = 6$ et $R/(K - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Nous montrons comme dans c_2 que $R'/(E - Y \cup J) \sim R/(E - Y \cup J)$, et par suite $R/C \sim R'/C$.

ii) Si R/K est une chaîne, on a trivialement R/K et R'/K sont (≤ 6)-hypomorphes. Dans la suite on suppose que R/K est un tournoi sans diamant fortement connexe et $6 \leq |K| \leq 9$. Comme $K \neq D$, alors le i) du

lemme 2.22 prouve que R/K et R'/K sont (≤ 5) -hypomorphes. Suivant le cardinal de K , on a :

c_1) Si $|K| = 6$. Comme K est différente de sa composante, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/K \sim R/K$, d'autre part $(R/K$ et $R'/K)$ sont (≤ 5) -hypomorphes. Il s'ensuit que R/K et R'/K sont (≤ 6) -hypomorphes.

c_2) Si $|K| = 7$. Soient A une partie de K de cardinal 6 et $\{a\} = K - A$. Les relations $R/(E - \{a\})$ et $R'/(E - \{a\})$ sont (-5) -hémimorphes et A est différente de sa composante, alors le lemme 2.12 prouve que $R/A \sim R'/A$. Il s'ensuit que R/K et R'/K sont (≤ 6) -hypomorphes.

c_3) Si $|K| = 8$. Soient A une partie de K de cardinal 6 et $\{a, b\} = K - A$. Les relations $R/(E - \{a, b\})$ et $R'/(E - \{a, b\})$ sont (-4) -hémimorphes. Si R/A est une chaîne, on a $R/A \sim R'/A$. Si R/A est fortement connexe. Soient $H = R/(\{x\} \cup A)$, et $(y, z, t) \in A^3$ avec $R/\{y, z, t\}$ est un 3-cycle. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x, y, z, t\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Il n'y en a pas d'autre que $\{x\} \cup A$, car $\{x\}$ et A sont les composantes fortement connexes de $H = R/(\{x\} \cup A)$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z, t\}$ telle que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R/(E - \{a, b\}), H, \{x, y, z, t\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z, t\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R'/(E - \{a, b\}), H, \{x, y, z, t\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/A \sim R/A$, et par suite $(R/K$ et $R'/K)$ sont (≤ 6) -hypomorphes.

c_4) Si $|K| = 9$. Soient A une partie de K de cardinal 6 et $\{a, b, c\} = K - A$. Les relations $R/(E - \{a, b, c\})$ et $R'/(E - \{a, b, c\})$ sont (-3) -hémimorphes. Si R/A est une chaîne, on a $R/A \sim R'/A$. Si R/A est fortement connexe. Soient $H = R/(\{x\} \cup A)$, et $(y, z, t) \in A^3$ avec $R/\{y, z, t\}$ est un 3-cycle. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x, y, z\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^*$. Il n'y en a pas d'autre que $\{x\} \cup A$, car $\{x\}$ et A sont les composantes fortement connexes de $H = R/(\{x\} \cup A)$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z\}$ telle que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R/(E - \{a, b, c\}), H, \{x, y, z\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R'/(E - \{a, b, c\}), H, \{x, y, z\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/A \sim R/A$, et par suite $(R/K$ et $R'/K)$ sont (≤ 6) -hypomorphes. □

Lemme 8.8. *Si $h \geq 4$ et $|D| \geq 6 + h$ et si $(R/D$ et $R'/D)$ sont (≤ 6) -hypomorphes, alors il existe une partie A de D de cardinal h tel que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 7.7. \square

Lemme 8.9. $R/C \sim R'/C$.

Preuve. Posons $X = E - (C \cup D)$. D'après le lemme 8.5 on peut supposer que $|X| \leq 5$, de même d'après le lemme 8.6 on suppose que $|E - D| \leq 11$, et par suite $|C| \leq 11$, aussi d'après le lemme 8.7 on suppose que $(R/D$ et $R'/D)$ sont (≤ 6) -hypomorphes. Suivant le cardinal de X , on a :

$c_1) |X| = 0$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 6 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A)$ sur $R'/(E - A)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. D'après le lemme 8.4 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si $R'/C \sim R^*/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^*/(D - A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

$c_2) |X| = 1$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 5 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X)$ sur $R'/(E - A \cup X)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. D'après le lemme 8.4 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^*/C$. Si $R'/C \sim R^*/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^*/(D - A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

$c_3) |X| = 2$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X)$ sur $R'/(E - A \cup X)$. Nous montrons comme dans c_2 que $R/C \sim R'/C$.

$c_4) 3 \leq |X| \leq 5$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soient B une partie de X de cardinal 2 et f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X \cup B)$ sur $R'/(E - A \cup X \cup B)$. Nous montrons comme dans c_2 que $R/C \sim R'/C$. \square

References

- [1] Y. BOUDABBOUS et J. DAMMAK : Sur la $(-k)$ -demi-restructibilité des tournois finis, CRAS, Série I 326, pp. 1037-1040, (1998).
- [2] A. BOUSSAIRI : Thèse de doctorat de mathématiques. Soutenue à l'Université Claude Bernard, le 12 Juin, (1995).
- [3] J. DAMMAK : Caractérisation des relations binaires finies d -demi-restructibles. *Proyecciones*, Volume 22, N 1, (2003).
- [4] J. DAMMAK : La dualité dans la demi-reconstruction des relations binaires finies, CRAS, Série I 327, pp. 861-864, (1998).
- [5] J. DAMMAK : La (-5) -demi-restructibilité des relations binaires connexes finies. *Proyecciones*, Volume 22, N 3, (2003).
- [6] R. FRAÏSSÉ : L'intervalle en théorie des relations, in *orders, descriptions and roles*, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland, pp. 313-342, (1984).
- [7] C. GNANVO et P.ILLE : La reconstruction des tournois. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, série I, pp. 577-580, (1988).
- [8] J. G. HAGENDORF et G. LOPEZ : La demi-restructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments. *C. R. Acad. Sci. Paris*, série I, 317, pp. 7-12, (1993).
- [9] G. LOPEZ : L'indéformabilité des relations et multirelations binaires. *Zeitschrift. Math. Logik Grundlagen Math.* 24, pp. 303-317, (1978).
- [10] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and $(n-1)$, I. *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.* Bd. 38, S. 27-37, (1992).
- [11] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and $(n-1)$, II. *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.* Bd 38, S. 157-168, (1992).

- [12] M. POUZET : Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. *Math. Zeitschr.* 150, pp. 117-134, (1976).

Received : April, 2003.

Jamel Dammak

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Sfax
Université Claude Bernard Lyon 1
B. P. 802, 3018 Sfax
Tunisie
e-mail : jdammak@yahoo.fr