Proyecciones
Vol. 24, N^o 3, pp. 181-203, December 2005.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile
DOI: 10.4067/S0716-09172005000300001

UNE PROPRIÉTÉ DU GROUPE À 168 ÉLÉMENTS

REMI GOBLOT
University Mohamed I, Morocco

Received : December 2004. Accepted : July 2005

Abstract

Let $\mathcal{E}$ be an affine space of dimension n over a field K, $\mathcal{G}$ the affine group of $\mathcal{E}$, G the corresponding linear group. To each point $a \in \mathcal{E}$ corresponds a section $s_a \colon G \to \mathcal{G}$ of the canonical map $\mathcal{G} \to G$: to the linear map $\varphi \in G$ corresponds the affine map φ_a wich has φ as associated linear map and a as fixed point. We proove that every section is of this type, except in the only one case where $K = \mathbf{F_2}$ and $n = 3$.

Soit K un corps commutatif, $\mathcal{E}$ un K-espace affine de dimension n, E l'espace des vecteurs de $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ le groupe affine et $\mathcal{T}$ le sous-groupe des translations, $G \sim \mathcal{G}/\mathcal{T}$ le groupe linéaire. Pour $\varphi \in \mathcal{G}$, on note $\overline{\varphi}$ l'application linéaire associée dans G. Pour $f \in G$ et $a \in \mathcal{E}$, on note f_a l'application affine fixant a d'application linéaire associée f. Ë tout $a \in \mathcal{E}$ correspond donc la section

$$s_a: G \hookrightarrow \mathcal{G}\ ,\ f \mapsto f_a$$

L'objet de ce travail est de montrer le théorème suivant:

Théorème *a) Toute section* $s: G \to \mathcal{G}$ *est du type* s_a *à l'exception du cas où* $K = \mathbf{F}_2$ *et* $n = 3$.

b) On suppose $K = \mathbf{F_2}$ *et* $n = 3$. *Soit* $\mathcal{F}$ *l'ensemble des sous-groupes de* G *de cardinal* 7. *Pour tout* $M \in \mathcal{F}$, *soit* $N(M)$ *le normalisateur de* M. *L'ensemble* $\mathcal{F}$ *est muni d'une structure canonique de* $\mathbf{F_2}$*-espace affine de dimension* 3 *d'espace des vecteurs* E*: pour* M_1 *et* M_2 *distincts de* $\mathcal{F}$, $N(M_1) \cap N(M_2) = \{I, g, g^2\}$ *est un sous-groupe de* G *d'ordre* 3. *On pose* $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\varepsilon}$ *où* $\overrightarrow{\varepsilon}$ *est le vecteur de* E *fixe par* g. *L'opération de* G *sur* $\mathcal{F}$ *par conjugaison donne une section de* G *dans le groupe affine de* $\mathcal{F}$ *sans point fixe.*

c) L'ensemble $\mathcal{E}'$ *des isomorphismes affines* $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *induisant l'identité sur* E *a une structure canonique de* $\mathbf{F_2}$*-espace affine de dimension* 3 *de mme espace vectoriel associé* E *et de mme groupe affine* $\mathcal{G}$ *que* $\mathcal{E}$. *L'ensemble des sections* $G \hookrightarrow \mathcal{G}$, *de cardinal* 16, *est en bijection canonique avec* $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$. *Les espaces affines* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$ *jouent le même rôle l'un par rapport à l'autre.*

Cas où K n'est pas $\mathbf{F_2}$. Montrons que *toute section est du type* s_a *où* $a \in \mathcal{E}$.

Soit s une section et $\lambda \neq 1$ dans $K^\times$. L'homothétie vectorielle λI_E se remonte par s en une homothétie affine $hom(a, \lambda)$ de rapport λ et de centre a. Soit $f \in G$ et $\varphi = s(f)$. L'homothétie vectorielle λI_E commute avec f, donc $s(\lambda I_E) = hom(a, \lambda)$ commute avec $s(f) = \varphi$. On a donc

$$\varphi(a) = \Big(\varphi \circ hom(a, \lambda)\Big)(a) = \Big(hom(a, \lambda) \circ \varphi\Big)(a) = \Big(hom(a, \lambda)\Big)\Big(\varphi(a)\Big)$$

Comme a est seul point fixe de $hom(a, \lambda)$, on a $\varphi(a) = a$ et s est la section s_a envoyant G en le stabilisateur de a.

Ce raisonnement tombe en défaut si $K = \mathbf{F_2}$ car il n'existe aucun $\lambda \neq 1$. Dans la suite, le corps est $\mathbf{F_2}$ et $\dim E = 3$. Dans la section 1, on étudie les sous-groupes de G. Les sections 2 et 3 développent respectivement les points b) et c) du théorème. La section 4 envisage le cas des $\mathbf{F_2}$-espaces vectoriels de dimension supérieure 3.

1. Sous groupes du groupe G

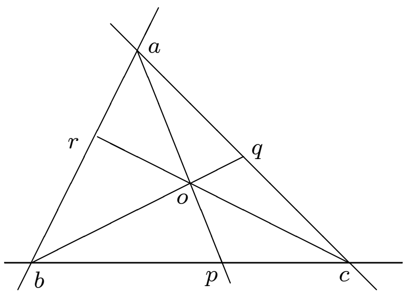
1.1 Plans projectifs sur $\mathbf{F_2}$. Le cardinal de G est $7 \times 6 \times 4 = 168$, nombre de bases de E. Le groupe multiplicatif $\mathbf{F_2^\times}$ étant réduit à $\{1\}$, la géométrie vectorielle sur E et la géométrie projective sur le plan projectif $P(E)$ se confondent: on a une bijection canonique

$$E \setminus \{\overrightarrow{0}\} \to P(E)\ ,\ \ \overrightarrow{v} \mapsto v$$

On notera de la mm̂e faon une application linéaire inversible $f\colon E \to E$ et l'homographie $f\colon P(E) \to P(E)$ associée. La donnée d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de E équivaut à la donnée d'un triangle non aplati (e_1, e_2, e_3) de $P(E)$, qui se complète d'unique faon en un repère (e_1, e_2, e_3, e_4) de $P(E)$ où e_4 est l'unique point de $P(E)$ ne se trouvant sur aucun des ctés du triangle. Une homographie est donc définie par la donnée d'un triangle et du triangle image.

Le plan projectif $P(E)$ comporte 7 points et 7 droites. Par chaque point passent 3 droites et chaque droite porte 3 points. La figure suivante constituée d'un triangle abc et de 3 droites $(ap), (bq), (cr)$ concourantes en o permet de se représenter un plan projectif sur $\mathbf{F_2}$ en convenant de considérer p, q, r comme alignés.

L'ensemble des 7 droites de $P(E)$ constitue le plan projectif dual $P(E^*) = P^*(E)$.



Proposition 1. *Soit P un ensemble de points, P^* un ensemble de cardinal supérieur à 1 de droites.*

On suppose vérifiées les conditions d'incidence suivantes:

- *pour toute droite, exactement trois points sont en incidence avec cette droite*
- *pour toute paire de deux points distincts, une unique droite est en incidence avec ces deux points,*
- *pour toute paire de deux droites distinctes, un unique point est en incidence avec ces deux droites.*

Alors P a une structure de $\mathbf{F_2}$-plan projectif et P^* s'identifie à l'ensemble des droites de P. Une bijection $h: P \to P$ est une homographie si et seulement si elle conserve l'alignement.

Montrons qu'un point o est en incidence avec exactement 3 droites. Soit m_1 distinct de o. Comme (om_1) n'est pas la seule droite, il existe $m_2 \notin (om_1)$. Soit m_3 le troisème point de la droite $D = (m_1 m_2)$.

Les droites (om_1), (om_2), (om_3) sont en incidence avec o. Une quatrième droite couperait D en un quatrième point ce qui est impossible. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit m'_i le troisème point de (om_i), alors

$P = \{o, m_1, m'_1, m_2, m'_2, m_3, m'_3\}$ est de cardinal 7.

Adjoignons un élément $\overrightarrow{0}$ à P. Un élément sera noté x ou $\overrightarrow{x}$ selon qu'on le considère comme appartenant à P ou à $E = P \cup \{\overrightarrow{0}\}$. On définit sur E l'addition suivante:

- $\forall \overrightarrow{x} \in E\ ,\ \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$,
- $\forall \overrightarrow{x} \in E\ ,\ \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$,
- pour $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ distincts de $\overrightarrow{0}$ et entre eux, $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{z}$ où z est le troisième point de la droite en incidence avec x et y.

Cette addition est associative: $(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} + (\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma})$. Montrons le si α, β, γ sont distincts non alignés. Soit $\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ et $\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}$ et σ l'unique point en incidence avec les droites $(\delta\gamma)$ et $(\alpha\varepsilon)$. On a

$$(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\delta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\sigma} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\alpha} + (\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}) = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{\sigma}$$

Alors E, de cardinal 8, a une structure de $\mathbf{F_2}$-espace vectoriel de dimension 3, P s'identifie au plan $P(E)$ et P^* au dual de P.

Montrons qu'une bijection $h: P \to P$ conservant l'alignement est une homographie. On prolonge h à E en posant $h(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Soit $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$

non nuls et distincts, $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Alors x, y, z sont alignés distincts, donc $h(x), h(y), h(z)$ sont alignés distincts, d'où $h(\overrightarrow{x}) + h(\overrightarrow{y}) = h(\overrightarrow{z})$ et $h: E \to E$ est bien linéaire.

1.2 Sous-groupes isomorphes à $\mathbf{S_4}$. Soit D une droite de $P(E)$. L'ensemble $P(E) \setminus D$, formé de quatre points, est un repère projectif de $P(E)$. Considérant l'action du stabilisateur $St(D)$ de D sur le quadrilatère $P(E) \setminus D$, on obtient un isomorphisme $St(D) \sim \mathbf{S_4}$. Soit $G(D) \sim \mathbf{S_3}$ le groupe des homographies de D. L'application *restriction à D* définit un morphisme $St(D) \sim \mathbf{S_4} \to \mathbf{G(D)} \sim \mathbf{S_3}$ dont le noyau est un groupe de Klein $Kl(D)$: l'ensemble des $h \in G$ induisant l'identité sur D. Ce groupe $Kl(D)$ est formé de l'identité et de trois involutions, chacune induisant deux transpositions disjointes sur le quadrilatère $P(E) \setminus D$. On a 7 droites dans $P(E)$, une classe de conjugaison de 7 groupes $St(D)$ et une classe de conjugaison de 7 groupes de Klein $Kl(D)$.

Dualement, le stabilisateur $St(m)$ d'un point m est isomorphe à $\mathbf{S_4}$. Le sous-groupe de Klein $Kl(m)$ est formé des homographies laissant stable chacune des trois droites passant par m. Une involution de $Kl(m)$ laisse fixe les points d'une de ces trois droites et échange les deux points distincts de m sur chacune des deux autres. On a 7 points dans $P(E)$, une classe de conjugaison de 7 groupes $St(m)$ et une classe de conjugaison de 7 groupes de Klein $Kl(m)$.

1.3 Sous-groupes d'ordre 8 et involutions . Il s'agit de la classe de conjugaison des 2-Sylow(s). Dans chaque groupe isomorphe à $\mathbf{S_4}$, on a trois sous-groupes diédraux de cardinal 8. Un 2-Sylow est donc contenu dans $St(D) \cap St(m)$ où D est une droite et m un point. Nécessairement, $m \in D$, sinon m est un point du repère $P(E) \setminus D$ et $St(D) \cap St(m) \sim \mathbf{S_3}$ est le stabilisateur de m dans $St(D) \sim \mathbf{S_4}$.

Un 2-Sylow est donc le stabilisateur $St(D, m)$ d'un couple (D, m) où D est une droite et m un point de D. On a 7 droites et sur chacune 3 points, d'o 21 couples (D, m). La classe de conjugaison des 2-Sylow(s) est de cardinal 21.

Toute involution étant contenue dans un 2-Sylow, les involutions de G sont celles mises en évidence précédemment: ce sont des paires de transpositions disjointes $(a, b), (c, d)$ où le quadriltaère a, b, c, d est un repère projectif de $P(E)$. On a 7 tels quadrilatères et pour chacun d'eux 3 telles involutions. Les involutions de G forment une classe de conjugaison de cardinal 21.

On a une bijection canonique de l'ensemble des 21 2-Sylow(s) sur l'ensemble des 21 involutions: à tout 2-Sylow $St(D, m)$, on associe l'involution $\tau_{D,m}$ telle que $\{I, \tau_{D,m}\}$ soit le centre de $St(D, m)$. Si a, b, c, d sont les 4 points de $P(E) \setminus D$, choisissant les notations de sorte que les droites (ab) et (cd) se coupent en m, alors $\tau_{D,m}$ échange a et b et échange c et d. On a $\{I, \tau_{D,m}\} = Kl(D) \cap Kl(m)$.

1.4 Sous-groupes d'ordre 3 **et** 6 . Soit D une droite. Alors $P(E) \setminus D$ est un quadrilatère et le groupe $St(D)$ est isomorphe à $\mathbf{S_4}$. tout $m \in P(E) \setminus D$ est associé le groupe $St(D, m) \sim \mathbf{S_3}$ laissant stables D et m et le sous-groupe $\Gamma(D, m) \sim \mathbf{A_3}$ formé de deux permutations circulaires sur les 3 points de D et sur les 3 points du triangle complémentaire de $D \cup \{m\}$. Les groupes $\Gamma(D, m)$ sont des 3-Sylow(s). Les 3-Sylow(s) etant conjugués, ils sont tous de ce type.

On a 7 possibilités pour la droite D et $7 - 3 = 4$ possibilités pour le point $m \notin D$, d'où $7 \times 4 = 28$ sous-groupes du type $St(D, m) \sim \mathbf{S_3}$ et 28 sous-groupes $\Gamma(D, m) \sim \mathbf{A_3}$.

1.5 Les deux classes de conjugaison des groupes isomorphes à $\mathbf{S_4}$ comme $\mathbf{F_2}$-plans projectifs en dualité . Les sous-groupes de G isomorphes à $\mathbf{S_4}$ se rangent en deux classes de conjugaison: les 7 stabilisateurs de point $St(m)$ où $m \in P$, les 7 stabilisateurs de droite $St(D)$ où $D \in P^*$. On a les relations d'incidence:

- Soit A, B deux droites distinctes se coupant en m, C la troisième droite passant par m. On a $St(A) \cap St(B) = St(C, m) = \{I, \tau_{C,m}\}$. De mme, soit a, b deux points distincts de $P(E)$, c le troisième point de la droite $D = (ab)$. Alors $St(a) \cap St(b) = St(D, c) = \{I, \tau_{D,c}\}$.
- Soit D une droite, $m \notin D$ un point, alors $St(D) \cap St(m) = St(D, m) \sim S_3$.
- Soit D une droite, $m \in D$ un point, alors $St(D) \cap St(m) = St(D, m)$ est diédral de cardinal 8.

Proposition 2. *Soit P, P^* les deux classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{S_4}$. Soit S, S' deux sous-groupes de $P \cup P^*$.*

- *$S \cap S'$ est de cardinal 2 si et seulement si S et S' sont dans la mme classe de conjugaison.*

- $S \cap S' \sim \mathbf{S_3}$ *si et seulement si* S *et* S' *ne sont pas dans la mme classe de conjugaison et ne sont pas en incidence.*

- $S \cap S'$ *est diédral de cardinal* 8 *si et seulement si* S *et* S' *ne sont pas dans la mme classe de conjugaison et sont en incidence.*

1.6 Sous-groupes d'ordre 7 de G . Ils forment l'ensemble $\mathcal{F}$ des 7-Sylow(s). Raisonnons dans le cadre vectoriel. L'extension $\mathbf{F_8}$ de $\mathbf{F_2}$ est une $\mathbf{F_2}$-algèbre de rang 3. Le groupe multiplicatif $\mathbf{F_8^\times}$ est cyclique d'ordre 7. Les éléments de $\mathbf{F_8^\times}$ se rangent en deux classes x, x^2, x^4 et x^{-1}, x^{-2}, x^{-4}, racines des deux polynmes irréductibles de degré 3:

$$P(X) = X^3 + X + 1 \quad , \quad Q(X) = X^3 + X^2 + 1$$

Dans G, on a deux classes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'éléments d'ordre 7 selon que le polynme minimal est $P(X)$ ou $Q(X)$.

Soit $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bases de E. On a une application $\mathcal{B}(E) \to \mathcal{P}$ associant à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ l'application dont la matrice dans cette base est la matrice compagnon de $P(X)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

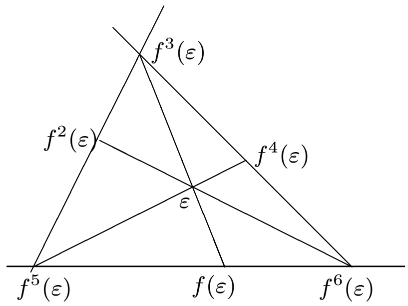
Cette application est surjective. En effet, soit f admettant $P(X)$ pour polynme caractéristique. Comme $P(X)$ est irréductible, f n'a aucun vecteur propre et admet la matrice compagnon de $P(X)$ dans toute base $\left(\overrightarrow{e_1}, f(\overrightarrow{e_1}), f^2(\overrightarrow{e_1})\right)$. Ainsi, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les deux classes de conjugaison des éléments d'ordre 7 de G.

Soit $\overrightarrow{e_1} \neq \overrightarrow{0}$. L'application $f \mapsto \left(f(\overrightarrow{e_1}), f^2(\overrightarrow{e_1})\right)$ est donc une bijection de $\mathcal{P}$ sur l'ensemble des couples de vecteurs $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ tels que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ soit base de E. On a $8-2=6$ possibilités pour $\overrightarrow{e_2}$ et $8-4=4$ possibilités pour $\overrightarrow{e_3}$.

Ainsi, $Card\mathcal{P} = 6 \times 4 = 24$. Les éléments de $\mathcal{P}$ se rangent en 8 paquets de 3 élements (f, f^2, f^4) engendrant le même groupe $M = \langle f \rangle = \langle f^2 \rangle = \langle f^4 \rangle$ d'ordre 7. L'ensemble $\mathcal{F}$ des sous-groupes d'ordre 7 est donc de cardinal 8.

Considérons un tel sous-groupe M et ses générateurs f, f^2, f^4 appartenant à $\mathcal{P}$. Comme le coefficient de X^2 dans P est nul, pour tout $\overrightarrow{\varepsilon} \neq$

$\overrightarrow{0} \in E$, on a $f(\overrightarrow{\varepsilon}) + f^2(\overrightarrow{\varepsilon}) + f^4(\overrightarrow{\varepsilon}) = \overrightarrow{0}$. Considérant la droite vectorielle $\Delta = \{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\varepsilon}\}$ et le plan vectoriel $\Pi = \left\{\overrightarrow{0}, f(\overrightarrow{\varepsilon}), f^2(\overrightarrow{\varepsilon}), f^4(\overrightarrow{\varepsilon})\right\}$, on a $E = \Delta \oplus \Pi$. La donnée du groupe $M = \langle f \rangle = \langle f^2 \rangle = \langle f^4 \rangle$ induit une orientation sur le plan Π en prenant la permutation circulaire $\left(f(\overrightarrow{\varepsilon}), f^2(\overrightarrow{\varepsilon}), f^4(\overrightarrow{\varepsilon})\right)$, indépendante du générateur $f \in calP \cap M$. Ainsi, *la donnée d'un $M \in \mathcal{F}$ détermine 7 décompositions orientées $E = \Delta \oplus \Pi$ où $\Delta = \{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\varepsilon}\}$ et $\Pi = \left\{\overrightarrow{0}, f(\overrightarrow{\varepsilon}), f^2(\overrightarrow{\varepsilon}), f^4(\overrightarrow{\varepsilon})\right\}$ muni de la permutation circulaire $\left(f(\overrightarrow{\varepsilon}), f^2(\overrightarrow{\varepsilon}), f^4(\overrightarrow{\varepsilon})\right)$ avec $f \in \mathcal{P} \cap M$.*



Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, les points $f^k(\varepsilon), f^{k+1}(\varepsilon), f^{k+3}(\varepsilon)$ sont alignés.

2. Structure d'espace affine sur $\mathcal{F}$

2.1 Sous-groupes d'ordre 21 . Soit M un sous-groupe d'ordre 7. Formons le *normalisateur* $N(M)$, plus grand sous-groupe dans lequel M est distingué.

Le groupe M concide avec son commutant. En effet, si h commute avec $f \in calP \cap M$, comme le polynme minimal de f est $P(X)$, de degré 3, donc égal au polynme caractéristique, E est cyclique pour f et h appartient à l'algèbre $\mathbf{F_2[f]} \sim \mathbf{F_2[X]/(P)} \sim \mathbf{F_8}$ des applications linéaires polynomiales en f. Cette algèbre se déduit de M par adjonction de l'application nulle.

Soit $g \in N(M)$. L'automorphisme $h \mapsto ghg^{-1}$ laisse $P \cap M = \left\{f, f^2, f^4\right\}$ stable.

Si cet automorphisme laisse fixe un élément de $\left\{f, f^2, f^4\right\}$, on peut supposer que c'est f. On a alors $gf = fg$, donc $g \in M$.

Si $g \notin M$, cet automorphisme induit une permutation circulaire sur $\left\{f, f^2, f^4\right\}$ et $g^3 \in M$. Comme g opère sur $P(E)$ de cardinal 7, en le décomposant en cycles disjoints, on voit que son ordre ne peut être 21, donc est nécessairement 3. Deux cas sont à envisager:

- $gfg^{-1} = f^2$, $gf^2g^{-1} = f^4$, $gf^4g^{-1} = f$,
- $gfg^{-1} = f^4$, $gf^2g^{-1} = f$, $gf^4g^{-1} = f^2$.

Définition. On dira que g est *relié* à M dans le premier cas. Il s'agit bien d'une relation entre g et M car si elle est vraie pour un $f \in calP \cap M$, elle est aussi vraie pour les autres éléments f^2, f^4 de $calP \cap M$.

Supposons g relié à M. Soit ε le point fixe de g. Les relations $g(\varepsilon) = \varepsilon$, $gf = f^2g$, $gf^2 = f^4g$, $gf^4 = fg$ impliquent que $gf(\varepsilon) = f^2(\varepsilon)$, $gf^2(\varepsilon) = f^4(\varepsilon)$, $gf^4(\varepsilon) = f(\varepsilon)$. Autrement dit, la droite stable par g est $\Big\{f(\varepsilon), f^2(\varepsilon), f^4(\varepsilon)\Big\}$.

Inversement, soit un point $\varepsilon \in P(E)$ et la droite $\Big\{f(\varepsilon), f^2(\varepsilon), f^4(\varepsilon)\Big\}$. Définissons g par $g(\varepsilon) = \varepsilon$, $g\Big(f(\varepsilon)\Big) = f^2(\varepsilon)$, $g\Big(f^2(\varepsilon)\Big) = f^4(\varepsilon)$. Comme g respecte l'alignement, on a $g\Big(f^4(\varepsilon)\Big) = f(\varepsilon)$, $g\Big(f^3(\varepsilon)\Big) = f^6(\varepsilon)$, $g\Big(f^6(\varepsilon)\Big) = f^5(\varepsilon)$, $g\Big(f^5(\varepsilon)\Big) = f^3(\varepsilon)$. D'où l'on déduit que $g \in N(M)$ est relié à M. On a donc autant d'éléments g d'ordre 3 reliés à M que de points $\varepsilon \in P(E)$, c'est-à-dire 7. Leurs carrés g^2 sont les 7 autres éléments d'ordre 3 de $N(M)$.

Remarquons que la donnée d'un groupe M d'ordre 7 détermine sur $P(E)$ une structure de $\mathbf{F_7}$-droite affine pour laquelle M est le groupe des translations. Le groupe $N(M)$, de cardinal 21, apparait alors comme groupe des homothéties-translations de rapport $1, 2, 4$ (les carrés de $\mathbf{F_7}$). C'est le produit semi-direct de M par chacun de ses 7 sous-groupes d'ordre 3 (Cf. 1.7).

Un élément g d'ordre 3 *est relié à un unique sous-groupe d'ordre* 7. En effet, soit ε le point fixe de g, $\Big\{e, g(e), g^2(e)\Big\}$ la droite laissée stable par g, alors g est relié au groupe $M = \langle f \rangle$ où $f(\varepsilon) = e$, $f^2(\varepsilon) = g(e)$, $f^4(\varepsilon) = g^2(e)$. Remplacer f par f^2 ou f^4 revient à faire une permutation circulaire sur $e, g(e), g^2(e)$. Ceci se résume dans la définition et la proposition suivantes

Définition. *Soit M un groupe d'ordre* 7*, $P \cap M = \big(f, f^2, f^4\big)$. Un élément g d'ordre* 3 *est relié à M s'il vérifie les trois conditions (équivalentes) suivantes:*

$$\Big(gfg^{-1} = f^2\Big) \Longleftrightarrow \Big(gf^2g^{-1} = f^4\Big) \Longleftrightarrow \Big(gf^4g^{-1} = f\Big)$$

Proposition 3. *Tout élément g d'ordre* 3 *est relié à un unique groupe M d'ordre* 7*. Si $\varepsilon \in P$ est le point fixe de g et si $calP \cap M = \big(f, f^2, f^4\big)$, alors $\big(f(\varepsilon), f^2(\varepsilon), f^4(\varepsilon)\big)$ est la droite stable par g.*

Le groupe $\langle g\rangle = \langle g^2\rangle$ d'ordre 3, de point fixe ε, est relié à deux groupes M_1 et M_2 d'ordre 7 où, avec $calP \cap M = (f_1, f_1^2, f_1^4)$ et $calP \cap M_2 = (f_2, f_2^2, f_2^4)$, on a

$$f_1(\varepsilon) = e\ ,\ f_1^2(\varepsilon) = g(e)\ ,\ f_1^4(\varepsilon) = g^2(e)$$
$$f_2(\varepsilon) = e\ ,\ f_2^2(\varepsilon) = g^2(e)\ ,\ f_2^4(\varepsilon) = g(e)$$

2.2 Les 28 3-sylow(s) et les 28 paires de 7-sylow(s) . Á tout élément $g \in G$ d'ordre 3, on associe le point fixe ε et la droite stable orientée $(e, g(e), g^2(e))$, puis les trois éléments f_1, f_1^2, f_1^4 d'ordre 7 appartenant à $\mathcal{P}$ définis par

$$f_1(\varepsilon) = e\ ,\ f_1^2(\varepsilon) = g(e)\ ,\ f_1^4(\varepsilon) = g^2(e)$$

On a ainsi une application $g \mapsto M(g)$ de l'ensemble des 56 éléments d'ordre 3 sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des 8 sous-groupes d'ordre 7.

Proposition 4. *(i) L'application de l'ensemble des* 28 *sous-groupes d'ordre* 3 *dans l'ensemble des paires de sous-groupes distincts d'ordre* 7

$$\Big(I, g, g^2\Big) \mapsto \Big(M(g), M(g^2\Big)$$

est bijective.

(ii) Étant donné deux couples (M_1, M_2) et (M_1', M_2') d'éléments de $\mathcal{F}$ où $M_1 \neq M_2$ et $M_1' \neq M_2'$, l'ensemble des $h \in G$ tels que $hM_ih^{-1} = M_i'$ pour $i \in \{1, 2\}$ est de cardinal 3.

(i) C'est une application de l'ensemble des 28 sous-groupes d'ordre 3 dans l'ensemble des $C_8^2 = 28$ paires (M_1, M_2) de sous-groupes distincts de $\mathcal{F}$: à $\Gamma = \big(I, g, g^2\big)$ on associe la paire $\big(M(g), M(g^2)$, avec $M(g) = \langle f_1\rangle$ et $M(g^2) = \langle f_2\rangle$ où, ε étant le point fixe de g et g^2,

$$f_1(\varepsilon) = e\ ,\ f_1^2(\varepsilon) = g(e)\ ,\ f_1^4(\varepsilon) = g^2(e)$$

$\mathrm{f}_2(\varepsilon) = e\ ,\ f_2^2(\varepsilon) = g^2(e)\ ,\ f_2^4(\varepsilon) = g(e)$

Pour montrer la bijectivité de cette application, il suffit de voir l'injectivité. Pour g d'ordre 3, les groupes $M(g) = M_1$ et $M(g^2) = M_2$ sont distincts et $\Gamma = \big(I, g, g^2\big)$ est dans l'intersection des normalisateurs $N(M_1) \cap N(M_2)$.

S'agissant de groupes de cardinal 21, cette intersection ne peut t̂re que de cardinal 3, donc réduite à Γ qui est donc l'unique antécédent de (M_1, M_2).

(ii) On forme $N(M_1) \cap N(M_2) = (I, g, g^2)$ et $N(M_1') \cap N(M_2') = (I, g', g'^2)$ où g (resp. g^2) est relié à M_1 (resp. M_2) et g' (resp. g'^2) est relié à M_1' (resp. M_2'). Comme M_1 (resp. M_1') est l'unique groupe de $\mathcal{F}$ relié à g (resp. g'), l'ensemble des h cherché est exactement l'ensemble

$$\left(h \in G \mid g' = hgh^{-1}\right)$$

Il est bien de cardinal 3 car le commutant d'un élément $g \in G$ d'ordre 3 est $\langle g \rangle = (I, g, g^2)$ de cardinal 3.

En particulier, *l'ensemble des $s \in G$ tels que $M_2 = sM_1s^{-1}$ et $M_1 = sM_2s^{-1}$ est constitué des trois involutions du normalisateur $N(\Gamma) \sim \mathbf{S_3}$ où $\Gamma = \langle g \rangle = N(M_1) \cap N(M_2)$.*

2.3 Structure de $\mathbf{F_2}$-espace affine . Soit M_1 et M_2 deux groupes distincts de $\mathcal{F}$. L'intersection des normalisateurs $N(M_1) \cap N(M_2)$ est un groupe Γ d'ordre 3. Si ε est le point laissé fixe par Γ, on pose $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{\varepsilon} \in E$.

Il s'agit de montrer la *relation de Chasles: si M, M_1, M_2 sont trois points distincts de $\mathcal{F}$, alors*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2}$$

Il existe g_1 et g_2 d'ordre 3 tels que g_1 et g_2 soient tous deux reliés à M, g_1^2 relié à M_1 et g_2^2 relié à M_2. Autrement dit,

$$\Gamma_1 = N(M) \cap N(M_1) = \left(I, g_1, g_1^2\right) \ , \ \Gamma_2 = N(M) \cap N(M_2) = \left(I, g_2, g_2^2\right)$$

pour $f \in calP \cap M$, $f_1 \in \mathcal{P} \cap M_1$, $f_2 \in \mathcal{P} \cap \mathcal{M}_\in$, on a

$$g_1 f g_1^{-1} = g_2 f g_2^{-1} = f^2 \ , \ g_1^2 f_1 g_1^{-2} = f_1^2 \ , \ g_2^2 f_2 g_2^{-2} = f_2^2$$

Si ε_1 et ε_2 sont les points fixes de g_1 et g_2, on a $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{\varepsilon_2}$.

On va montrer qu'il existe deux couples d'involutions (s_1', s_2') et (s_1'', s_2'') dans $N(\Gamma_1) \times N(\Gamma_2)$ tels que $s' = s_1's_2' = s_2's_1'$ et $s'' = s_1''s_2'' = s_2''s_1''$ soient des involutions. On aura alors $M_2 = s'M_1s' = s''M_1s''$. On vérifiera que $g = s's''$ est d'ordre 3 appartenant à $N(M_1) \cap N(M_2)$. Si ε est le point fixe de g, on aura $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\varepsilon}$. On vérifiera alors la relation de Chasles: $\overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2} + \overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{0}$.

Soit $e \in P(E)$. Il existe i et j tels que $\varepsilon_1 = f^i(e)$ et $\varepsilon_2 = f^j(e)$. Les droites stables de g_1 et g_2 sont respectivement $\big(f^{i+1}(e), f^{i+2}(e), f^{i+4}(e)\big)$ et $\big(f^{j+1}(e), f^{j+2}(e), f^{j+4}(e)\big)$. Ces droites ont un point commun. On peut choisir le générateur $f \in \mathcal{P} \cap M$ et les indices 1 et 2 de sorte que ce point commun soit $f^{i+2}(e) = f^{j+1}(e)$, i.e. que $j = i+1$. Pour alléger les notations, on pose $e_k = f^k(e)$. Alors g_1 et g_2 ont les décompositions en cycles disjoints

$$g_1 = (e_i)(e_{i+1}, e_{i+2}, e_{i+4})(e_{i+3}, e_{i+6}, e_{i+5})$$

$$g_2 = (e_{i+1})(e_{i+2}, e_{i+3}, e_{i+5})(e_{i+4}, e_i, e_{i+6})$$

On trouve alors dans les normalisateurs de Γ_1 et Γ_2 les involutions, chacune composée de deux transpositions disjointes

$$s_1' = (e_{i+2}, e_{i+4})(e_{i+6}, e_{i+5}) \ , \ s_2' = (e_{i+2}, e_{i+5})(e_{i+4}, e_{i+6})$$

$$s_1'' = (e_{i+1}, e_{i+4})(e_{i+3}, e_{i+5}) \ , \ s_2'' = (e_{i+3}, e_{i+5})(e_i, e_{i+6})$$

On a alors

$$s' = s_1's_2' = s_2's_1' = (e_{i+2}, e_{i+6})(e_{i+4}, e_{i+5})$$

$$s'' = s_1''s_2'' = s_2's_1'' = (e_i, e_{i+6})(e_{i+4}, e_{i+1})$$

On en déduit l'élément d'ordre 3

$$g = s's'' = (e_{i+3})(e_i, e_{i+2}, e_{i+6})(e_{i+1}, e_{i+5}, e_{i+4})$$

On a donc $\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{e_{i+3}}$. D'où

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2} + \overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{e_i} + \overrightarrow{e_{i+1}} + \overrightarrow{e_{i+3}} = \overrightarrow{0}$$

Vérifions que pour tout $h \in G$, l'application $\widetilde{h}\colon M \mapsto hMh^{-1}$ est affine, d'application linéaire associée h. Soit M_1 et M_2 dans $\mathcal{F}$, $f_1 \in \mathcal{P} \cap M_1$, $f_2 \in \mathcal{P} \cap M_2$, g d'ordre 3 tels que $gf_1g^{-1} = f_1^2$ et $g^2f_2g^{-2} = f_2^2$. Soit $\widetilde{h}$ l'automorphisme intérieur de G déduit de h. On aura $\widetilde{h}(g)\widetilde{h}(f_1)\widetilde{h}(g)^{-1} = \widetilde{h}(f_1)^2$, $\widetilde{h}(g)^2\widetilde{h}(f_2)\widetilde{h}(g)^{-2} = \widetilde{h}(f_2)^2$. Si ε est le point fixe de g, $h(\varepsilon)$ est le point fixe de $\widetilde{h}(g)$, donc posant $M_1' = \widetilde{h}(M_1)$ et $M_2' = \widetilde{h}(M_2)$, on a bien

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = h(\overrightarrow{\varepsilon}) = h(\overrightarrow{M_1M_2})$$

Remarque . Le dual E^* opère canoniquement sur $\mathcal{F}$ ainsi: étant donné M_1, M_2 de $\mathcal{F}$, on forme $N(M_1) \cap N(M_2) = (I, g, g^2)$. Au lieu de considérer le vecteur fixe $\overrightarrow{\varepsilon}$ de g, on considère le plan vectoriel stable et la forme linéaire $\overleftarrow{u} \in E^*$ dont il est noyau. On pose alors $\overleftarrow{M_1M_2} = \overleftarrow{u} \in E^*$. On obtient une structure de $\mathbf{F_2}$-espace affine *duale* de la première. *On n'a pas les mm̂es parallélogrammes.*

Soit M_1, M_2, M_1', M_2' distincts dans $\mathcal{F}$, $\langle g \rangle = N(M_1) \cap N(M_2)$, $\langle g' \rangle = N(M_1') \cap N(M_2')$. Si on avait simultanément

$$\overrightarrow{M_1M_1} = \overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \overleftarrow{M_1M_2} = \overleftarrow{M_1'M_2'} = \overleftarrow{u}$$

on aurait $g(\overrightarrow{\varepsilon}) = g'(\overrightarrow{\varepsilon}) = \overrightarrow{\varepsilon}$ et $g(\ker u) = g'(\ker u) = \ker u$. Comme $E = (\overrightarrow{\varepsilon}) \oplus \ker u$, on aurait $g' = g$ ou $g' = g^2$. Par la proposition 3, on aurait $(M_1, M_2) = (M_1', M_2')$.

3. Groupe affine en dimension 3

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbf{F_2}$-espace affine de dimension 3, E le $\mathbf{F_2}$-espace vectoriel associé, $\mathcal{G}$ le groupe affine, G le groupe linéaire. Le sous-groupe $\mathcal{T}$ des translations est formé de l'identité et de 7 translations non nulles qui sont involutives. Les $\mathbf{F_2}$-espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ ont le mm̂e espace vectoriel associé E. En revanche, le groupe affine $\mathcal{G}$ n'opère pas canoniquement sur $\mathcal{F}$ et il n'existe pas d'isomorphisme canonique reliant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

3.1 L'espace affine $\mathcal{E}'$. *L'ensemble $\mathcal{E}'$ des isomorphismes affines $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ induisant l'identité sur l'espace E des vecteurs est un espace affine de dimension 3 sur $\mathbf{F_2}$ admettant E pour espace des vecteurs et $\mathcal{G}$ pour groupe affine.*

Deux isomorphismes $\theta_1, \theta_2 \colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ se déduisent l'un de l'autre par une translation de vecteur $\overrightarrow{v} \in E$: pour tout $m \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{\theta_1(m)\theta_2(m)} = \overrightarrow{v}$. On pose alors $\overrightarrow{\theta_1\theta_2} = \overrightarrow{v}$.

Le groupe $\mathcal{G}$ opère canoniquement sur $\mathcal{E}'$: Soit $\varphi \in \mathcal{G}$, $\overline{\varphi} \in G$ l'application linéaire associée et $\theta \in \mathcal{E}'$. On note encore $\overline{\varphi}$ l'application affine inversible $M \mapsto \overline{\varphi} M \overline{\varphi}^{-1}$ de $\mathcal{F}$ sur lui-même. On pose alors $\varphi(\theta) = \overline{\varphi} \circ \theta \circ \varphi^{-1}$.

Dans ces conditions, $\mathcal{E}$ s'identifie canoniquement à *l'espace des isomorphismes affines $\mathcal{E}' \to \mathcal{F}$ induisant l'identité sur E*: à $m \in \mathcal{E}$, on associe l'isomorphisme $\theta \mapsto \theta(m)$ de $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{F}$.

3.2 Sous-groupes d'ordre 7 et 21 . Soit $f \in \mathcal{G}$ tel que $\overline{f}$ soit d'ordre 7. Alors 1 n'est pas valeur propre donc f a un unique point fixe $m \in \mathcal{E}$. La surjection canonique $\mathcal{G} \to G$ induit un isomorphisme $\langle f \rangle \sim \langle \overline{f} \rangle$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{Q}$ des sous-groupes d'ordre 7 de $\mathcal{G}$ en posant pour tout $(M, m) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}$

$$[M, m] = \Big(h \in \mathcal{G} \mid h(m) = m \text{ et } \overline{h} \in M\Big)$$

Soit f un générateur de $[M, m]$. Pour tout g du normalisateur $N[M, m]$, $gfg^{-1} \in [M, m]$. Comme gfg^{-1} admet $g(m)$ pour point fixe, $m = g(m)$ car gfg^{-1}, générateur de $[M, m]$, admet m pour unique point fixe. L'application $g \mapsto \overline{g}$ induit donc un isomorphisme entre les normalisateurs $N[M, m] \to N(M)$. On a donc

$$N[M, m] = (g \in \mathcal{G} \mid g(m) = m \ \ et \ \overline{g} \in N(M))$$

3.3 Sections du groupe linéaire vers le groupe affine . Soit A, B deux groupes de $\mathcal{F}$, a, b deux points de $\mathcal{E}$. Si les couples (A, a) et (B, b) sont distincts, les groupes $[A, a]$ et $[B, b]$ sont distincts. L'application $g \mapsto \overline{g}$ induit des isomorphismes $N[A, a] \to N(A)$ et $N[B, b] \to N(B)$. Par ce qui précède, on a

$$N[A, a] \cap N[B, b] = (g \in \mathcal{G} \mid g(a) = a \ , \ g(b) = b \ , \ \overline{g} \in N(A) \cap N(B))$$

Si les couples (A, a) et (B, b) sont distincts, $N[A, a] \cap N[B, b]$ n'est pas réduit à l'identité dans les trois cas suivants:

- $A = B$ et $a \neq b$: Soit γ l'unique rotation vectorielle d'ordre 3 reliée à A telle que $\gamma(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab}$ (Cf. 2.1, prop.3). Soit $g \in \mathcal{G}$ tel que $\overline{g} = \gamma$ et $g(a) = a$. Il est clair que $\langle g \rangle = N[A, a] \cap N[B, b]$.
- $A \neq B$ et $a = b$: Soit γ tel que $\langle \gamma \rangle = N(A) \cap N(B)$ et g tel que $\overline{g} = \gamma$ et $g(a) = a$. Il est clair que $\langle g \rangle = N[A, a] \cap N[B, b]$.
- Supposons $A \neq B$ et $a \neq b$. Pour que $g \in N[A, a] \cap N[B, b]$, il faut et il suffit que $g(a) = a$, $g(b) = b$ et $\overline{g} \in N(A) \cap N(B)$. On pourra prendre g distincte de l'identité si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ab}$ au sens de la structure affine définie sur $\mathcal{F}$ en 2.3.

Une première classe de sections est formées des $s_a : f \mapsto f_a$ où $a \in \mathcal{E}$, f_a étant l'application affine de point fixe a et d'application linéaire associée f.

Il existe 8 isomorphismes affines $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ induisant l'identité sur l'espace E des vecteurs. Ils se déduisent les uns des autres par des translations. On détermine l'un d'eux θ en fixant l'image $A = \theta(a) \in \mathcal{F}$ d'un point $a \in \mathcal{E}$. Pour tout $m \in \mathcal{E}$, $M = \theta(m)$ est donné par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{am}$. Considérons la section canonique (Cf.2.3) de G vers le groupe affine de $\mathcal{F}$ associant à $f \in G$ l'application affine

$$\widetilde{f} : F \to \mathcal{F},\ \mathcal{M} \mapsto f\ \mathcal{M}\ f^{-1}$$

L'application $\sigma_\theta : f \mapsto \theta^{-1} \circ \widetilde{f} \circ \theta$ constitue une section appartenant à une autre famille de 8 sections.

Réciproquement, soit une section $s : G \to \mathcal{G}$. Considérons deux sous-groupes A, B distincts de $\mathcal{F}$. Alors $N(A) \cap N(B) = \langle \gamma \rangle$ où γ est d'ordre 3. On a $s(A) = [A, a]$ et $s(B) = [B, b]$ où (A, a) et (B, b) sont dans $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$, ensemble des sous-groupes d'ordre 7 de $\mathcal{G}$ et $s(\gamma) = g \in N[Aaa] \cap N[B, b]$. D'après ce qui précède, ou bien $a = b$, ou bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ab}$.

Supposons que s n'est pas du type s_a. Il existe A, B dans $\mathcal{F}$ tels que $a \neq b$. Soit alors $M \in \mathcal{F}$ distincts de A et B et $s(M) = [M, m]$. Si on avait $m = a$, on aurait $m \neq b$, donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{bm} = \overrightarrow{ba} = \overrightarrow{BA}$ ce qui est impossible car $M \neq A$. Ainsi, m est distinct de a, b et on a $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{AM}$ pour tout $M \in \mathcal{F}$.

La section s induit donc un isomorphisme $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $m \mapsto M$ induisant l'identité sur l'espace E des vecteurs. On voit alors que $s = \sigma_\theta$ car s et σ_θ concident en les éléments d'ordre 3 ou 7 qui engendrent le groupe G.

Les espaces affines isomorphes $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{E}'$ ont mm̂e espace vectoriel E, donc mm̂e groupe linéaire G et mm̂e ensemble $\mathcal{F}$. Les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ jouent le mm̂e rle l'un par rapport à l'autre. En revanche, le groupe affine $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ne s'identifie pas canoniquement au groupe affine de $\mathcal{F}$. Par exemple, on a 8 isomorphismes du groupe affine $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sur le groupe affine de $\mathcal{F}$ de la forme $f \mapsto \theta f \theta^{-1}$ où $\theta \in \mathcal{E}'$.

3.4 L'ensemble $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ comme $\mathbf{F_2}$-espace affine de dimension 4. Soit $\mathcal{T}_1$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{G}$ induisant l'identité sur $\mathcal{T}$ et sur $G = \mathcal{G}/\mathcal{T}$. Ë tout $\overrightarrow{v} \in E$, on associe l'automorphisme intérieur $\widehat{t}_{\overrightarrow{v}} : \varphi \mapsto t_{\overrightarrow{v}} \circ \varphi \circ t_{\overrightarrow{v}}$. On a ainsi une inclusion $t_{\overrightarrow{v}} \mapsto \widehat{t}_{\overrightarrow{v}}$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}_1$.

Soit $s : G \hookrightarrow \mathcal{G}$ une section. On en déduit une bijection du produit ensembliste $E \times G$ sur $\mathcal{G}$, $(\overrightarrow{v}, f) \mapsto t_{\overrightarrow{v}} \circ s(f)$. Pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ dans E et f, g

dans G, on a

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}} \circ s(f) \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ s(g) = t_{\overrightarrow{u}} \circ \left(s(f) \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ s(f^{-1}) \right) \circ s(f) \circ s(g) \\ = t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{f(\overrightarrow{v})} \circ s(fg) \end{aligned}$$

En transportant la structure de groupe de $\mathcal{G}$ sur l'ensemble $E \times G$ par cette bijection, on obtient la loi de groupe sur l'ensemble $E \times G$

$$\left(\overrightarrow{u}, f\right)\left(\overrightarrow{v}, g\right) = \left(\overrightarrow{u} + f(\overrightarrow{v}), fg\right)$$

où l'image du sous-groupe $(s(G)$ (resp. $\mathcal{T}$) est le sous-groupe des $(\overrightarrow{0}, f)$ (resp. le sous-groupe distingué des $(\overrightarrow{v}, I_E)$).

Un automorphisme Φ de $\mathcal{G}$ induisant l'identité sur le sous-groupe $\mathcal{T}$ et sur le quotient $G = \mathcal{G}/\mathcal{T}$ se traduit par un automorphisme de $E \times G$ de la forme

$$(\overrightarrow{v}, f) \mapsto (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\varphi}(f), f)$$

Le fait qu'il s'agit d'un automorphisme se traduit pour l'application $\overrightarrow{\varphi} : G \to E$ par la propriété

$$\forall (f, g) \in G \times G \ , \ \overrightarrow{\varphi}(fg) = f\left(\overrightarrow{\varphi}(g)\right) + \overrightarrow{\varphi}(f)$$

L'application $\Phi \mapsto \overrightarrow{\varphi}$ est bijective de $\mathcal{T}_1$ sur l'ensemble E_1 des applications $G \to E$ ayant cette propriété. La structure de $\mathbf{F_2}$-espace vectoriel de E induit une structure de $\mathbf{F_2}$-espace vectoriel sur E_1: l'addition de E_1 est définie ainsi:

$$\forall (\overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\psi}) \in E_1 \times E_1 \ , \ \forall f \in G \ , \ \left(\overrightarrow{\varphi} + \overrightarrow{\psi}\right)(f) = \overrightarrow{\varphi}(f) + \overrightarrow{\psi}(f)$$

On vérifie aussi que la bijection $\Phi \mapsto \overrightarrow{\varphi}$ de $\mathcal{T}_1$ sur E_1 est un isomorphisme de groupes, d'où la commutativité de $\mathcal{T}_1$. L'inclusion $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}_1$ se traduit par une inclusion $E \hookrightarrow E_1$: au vecteur $\overrightarrow{v}$ est associée l'application $f \mapsto \overrightarrow{v} - f(\overrightarrow{v})$ de G vers E.

La commutativité de $\mathcal{T}_1$ permet de voir que cet isomorphisme $\mathcal{T} \to \mathcal{E}_1$, $\Phi \mapsto \overrightarrow{\varphi}$ est *canonique*, i.e. indépendant de la section $s : G \hookrightarrow \mathcal{G}$ choisie pour le définir.

Le groupe $\mathcal{T}_1$ opère simplement transitivement sur l'ensemble des sections $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$: pour $s \in \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ et $\Phi \in \mathcal{T}_1$, on pose $\Phi(s) = \Phi \circ s$.

L'ensemble $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ apparait alors comme un $\mathbf{F_2}$-espace affine de dimension 4, d'espace vectoriel E_1, de groupe des translations $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ étant les deux hyperplans parallèles de direction E.

Le quotient $E_1/E \sim \mathcal{T}_1/\mathcal{T}$, non trivial car de cardinal 2, est le premier groupe de cohomologie $H^1_\psi(G,E)$, ψ étant l'isomorphisme $G \to Aut(E)$ induit par l'opération de G sur E.

4. $\mathbf{F_2}$-espaces affines de dimensions supérieures

4.1 Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbf{F_2}$-espace affine de dimension $n \geq 4$, de groupe affine $\mathcal{G}$, de groupe linéaire G, d'espace vectoriel asscoié E. Alors le cardinal de G est égal au nombre de bases, i.e.

$$\begin{aligned} G &= (2^n-1)(2^n-2)\cdots(2^n-2^{n-1}) \\ &= = (2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots(2^2-1)2^{1+2+\cdots+(n-1)} \\ &= (2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots(2^2-1)2^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ \mathcal{G} &= 2^nG = (2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots(2^2-1)2^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

Supposons qu'*il existe une section $s : G \to \mathcal{G}$ non du type s_a*. Montrons alors que $s(G)$ *agit transitivement sur $\mathcal{E}$.*

Considérons l'extension $\mathbf{F_2} \hookrightarrow \mathbf{F_{2n}}$. Dans le groupe cyclique $\mathbf{F_{2n}^\times}$ existe un élément d'ordre 2^n-1 de polynme minimal $P(X)$ irréductible sur $\mathbf{F_2}$ de degré n. Il existe donc dans G des applications d'ordre 2^n-1 de polynme minimal $P(X)$. Comme 1 n'est pas valeur propre de f, tout relèvement de f dans $\mathcal{G}$ a un unique point fixe dans $\mathcal{E}$. Il existe donc $a \in \mathcal{E}$ tel que $s(f) = f_a$ et les deux orbites du groupe cyclique $\langle f_a \rangle$ sont $\{a\}$ et $\mathcal{E} \setminus \{a\}$. Comme $\{a\}$ n'est pas une orbite pour $s(G)$, l'action de $s(G)$ est bien transitive.

4.2 Cas $n = 4$. On a dans G deux sortes d'applications d'ordre 3 selon que le polynme minimal est X^3-1 ou X^2+X+1. On s'intéresse aux groupes cycliques du deuxième type. On raisonne dans l'espace projectif $P = P(E)$ de dimension 3 et de cardinal $16-1=15$. Un tel groupe γ définit $5 = \frac{15}{3}$ orbites sur P qui sont des droites disjointes.

On considère les triplets γ, D_1, D_2 où D_1, D_2 sont deux orbites de γ. La donnée de D_1, D_2 et de deux permutations circulaires sur D_1, D_2 détermine γ. deux droites disjointes D_1, D_2 correspondent deux permutations circulaires sur chaque droite, donc deux groupes ayant D_1, D_2 pour orbites.

L'ensemble des droites de $P(E)$ est de cardinal $\frac{1}{3}C^2_{15} = \frac{14\times 15}{6} = 35$. L'ensemble des paires de droites est de cardinal $C^2_{35} = 17\times 35$. On a 15 plans projectifs dans $P(E)$ et dans chacun d'eux 7 droites, donc $C^2_7 = 21$ paires de droites. On a donc $15\times 21 = 9\times 35$ paires de droites coplanaires. On a donc $(17-9)\times 35 = 8\times 35 = 280$ paires de droites disjointes. D'où

$280 \times 2 = 560$ triplets $(\gamma, D_1, D_2) = (\gamma, D_2, D_1)$. Pour chaque groupe γ, on a 5 orbites, donc $C_5^2 = 10$ paires D_1, D_2. On en déduit que le nombre de groupes γ est $\frac{560}{10} = 56$.

Comme 1 n'est pas valeur propre de ces applications d'ordre 3, tout groupe γ se relève en un groupe γ_m où $m \in \mathcal{E}$. S'il existait une section $s : G \to \mathcal{G}$ sans point fixe, les 16 stabilisteurs pour l'action de $s(G)$ seraient tous conjugués. Comme 16 ne divise pas 56, il est impossible que les groupes γ se répartissent équitablement entre les 16 points de $\mathcal{E}$.

Ainsi, *le théorème est démontré dans le cas* $n = 4$. Ceci permet d'envisager une récurrence.

4.3 Groupes de Klein de transvections . Soit $\overrightarrow{\varepsilon} \in E$ et $u \in E^*$, non nuls tels que $u(\overrightarrow{\varepsilon}) = 0$. La transvection vectorielle $t_{\overrightarrow{\varepsilon},u}$ est définie par

$$t_{\overrightarrow{\varepsilon},u} \colon \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x} + u(\overrightarrow{x})\overrightarrow{\varepsilon}$$

Elle induit l'identité sur $\ker u$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{\varepsilon}$ sur l'hyperplan affine des $\overrightarrow{x}$ tels que $u(\overrightarrow{x}) = 1$. Elle est involutive.

On a deux classes de conjugaison de sous-groupes commutatifs de transvections de G de cardinal 2^{n-1}:

- à $u \in E^*$, on associe $T_u = \{t_{\overrightarrow{\varepsilon},u} \mid \overrightarrow{\varepsilon} \in E \ et \ u(\overrightarrow{\varepsilon}) = 0\}$
- à $\overrightarrow{\varepsilon} \in E$, on associe $T_{\overrightarrow{\varepsilon}} = \{t_{\overrightarrow{\varepsilon},u} \mid u \in E^* \ et \ u(\overrightarrow{\varepsilon}) = 0\}$

On vérifie que :

$$\forall u \in E^* \ , \ \forall(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) \in E \times E \ , \ t_{\overrightarrow{\varepsilon_1},u} \circ t_{\overrightarrow{\varepsilon_2},u} = t_{\overrightarrow{\varepsilon_1}+\overrightarrow{\varepsilon_2},u}$$
$$\forall \overrightarrow{\varepsilon} \in E \ , \ \forall(u_1, u_2) \in E^* \times E^* \ , \ t_{\overrightarrow{\varepsilon},u_1} \circ t_{\overrightarrow{\varepsilon},u_2} = t_{\overrightarrow{\varepsilon},u_1+u_2}$$

Les applications affines admettant la transvection vectorielle $t_{\overrightarrow{\varepsilon},u}$ pour application linéaire associée ne sont en général pas involutives. Celles qui le sont sont d'un des deux types suivants:

- les 2 transvections affines du type $t_{\overrightarrow{\varepsilon},A}$ induisant l'identité sur un hyperplan affine A de direction $\ker u$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{\varepsilon}$ sur l'hyperplan parallèle,

- les $2^{n-1}-2$ relèvements affines involutifs sans points fixes $t_{A,\overrightarrow{\alpha};B,\overrightarrow{\beta}}$ où A et B sont les hyperplans de direction $\ker u$ et $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\varepsilon}$, induisant sur les hyperplans affines A et B les translations de vecteurs $\overrightarrow{\alpha}$ et $\overrightarrow{\beta}$.

On a deux types de groupes de Klein de transvections vectorielles:

$$K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v,w}=\left\{I_E,t_{\overrightarrow{\varepsilon},u},t_{\overrightarrow{\varepsilon},v},t_{\overrightarrow{\varepsilon},w}\right\}\quad \textit{où}\quad u+v+w=0$$
$$K_{\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\zeta},u}=\left\{I_E,t_{\overrightarrow{\xi},u},t_{\overrightarrow{\eta},u},t_{\overrightarrow{\zeta},u}\right\}\quad \textit{où}\quad \overrightarrow{\xi}+\overrightarrow{\eta}+\overrightarrow{\zeta}=\overrightarrow{0}$$

4.4 Lemme fondamental . *Soit u,v,w des formes linéaires distinctes vérifiant $u+v+w=0$, $\overrightarrow{\varepsilon}$ un vecteur non nul, $s:G\hookrightarrow\mathcal{G}$ une section, $\Gamma=s\left(K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v,w}\right)$. Alors, si la dimension est $n\geq 4$, les éléments de Γ distincts de l'identité sont des transvections affines d'hyperplans concourants.*

Le système de formes linéaires (u,v,w) se relève de 8 faons en un système de formes affines de somme constante sur $\mathcal{E}$. On note encore (u,v,w) un des 4 relèvements de formes affines de somme identiquement nulle sur $\mathcal{E}$. Considérons les 8 hyperplans affines

$$\begin{aligned}
U_0&=\left\{m\in\mathcal{E}\mid u(m)=0\right\}\quad, & U_1&=\left\{m\in\mathcal{E}\mid u(m)=1\right\}\\
V_0&=\left\{m\in\mathcal{E}\mid v(m)=0\right\}\quad, & V_1&=\left\{m\in\mathcal{E}\mid v(m)=1\right\}\\
W_0&=\left\{m\in\mathcal{E}\mid w(m)=0\right\}\quad, & W_1&=\left\{m\in\mathcal{E}\mid w(m)=1\right\}
\end{aligned}$$

Supposons Γ formé des relèvements affines

$$t_u=t_{U_0,\overrightarrow{u_0};U_1,\overrightarrow{u_1}}\ ,\ t_v=t_{V_0,\overrightarrow{v_0};V_1,\overrightarrow{v_1}}\ ,\ t_w=t_{W_0,\overrightarrow{w_0};W_1,\overrightarrow{w_1}}$$

$$\text{avec}\qquad \begin{aligned}
\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{u_1}&=\overrightarrow{\varepsilon}\ \text{dans}\ \ker u\\
\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_1}&=\overrightarrow{\varepsilon}\ \text{dans}\ \ker v\\
\overrightarrow{w_0}+\overrightarrow{w_1}&=\overrightarrow{\varepsilon}\ \text{dans}\ \ker w
\end{aligned}$$

On a les deux séries d'égalités

$$\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{\alpha}$$
$$\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{\beta}$$

avec $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\varepsilon}$. L'hyperplan affine $U_0=(U_0\cap V_0\cap W_0)\cup(U_0\cap V_1\cap W_1)$ est stable par t_u.

- *a*) Supposons qu'il existe $m\in U_0\cap V_0\cap W_0$ tel que $t_u(m)=m+\overrightarrow{u_0}\in U_0\cap V_1\cap W_1$. Alors $\overrightarrow{u_0}\notin \ker v\cup\ker w$ et $v(\overrightarrow{u_0})=w(\overrightarrow{u_0})=1$. On a

$$m+\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_1}=(t_v\circ t_u)(m)=t_w(m)=m+\overrightarrow{w_0}$$

donc $\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{\varepsilon}$.

- *b*) Supposons qu'il existe $m\in U_0\cap V_0\cap W_0$ tel que $t_u(m)=m+\overrightarrow{u_0}\in U_0\cap V_0\cap W_0$. Alors $\overrightarrow{u_0}\in\ker u\cap\ker v\cap\ker w$ et $v(\overrightarrow{u_0})=w(\overrightarrow{u_0})=0$. On a

$$m+\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_0}=(t_v\circ t_u)(m)=t_w(m)=m+\overrightarrow{w_0}$$

donc $\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\varepsilon}$.

Comme la dimension est $n>3$, $\dim\ker u\geq 3$. Il existe donc une forme linéaire non nulle $v'\neq u$ telle que le plan vectoriel $\{\overrightarrow{0},\overrightarrow{\varepsilon},\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{u_1}\}$ soit contenu dans $\ker v'$, donc aussi dans $\ker w'$ où $w'=u+v'$. Le sous-groupe $\Gamma'=s\left(K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v',w'}\right)$ vérifie la condition *b*). Comme $K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v,w}$ est conjugué de $K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v',w'}$ dans G, $\Gamma'=s\left(K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v',w'}\right)$ et $\Gamma=s\left(K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v,w}\right)$ sont conjugués dans $s(G)$. Ainsi, Γ vérifie la condition *b*).

Les sous-espaces affines $U_0\cap V_0\cap W_0$ sont donc stables par t_u. En faisant varier les formes linéaires v et w, on voit finalement que les droites de U_0 sont toutes stables par t_u, donc que $\overrightarrow{u_0}=\overrightarrow{\varepsilon}$, $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{0}$, d'où t_u est la transvection affine d'hyperplan U_0 de vecteur $\overrightarrow{\varepsilon}$.

Comme toute transvection vectorielle appartient à un groupe du type $K_{\overrightarrow{\varepsilon},u,v,w}$, on déduit du lemme le corollaire ci-dessous:

Corollaire *L'image d'une transvection vectorielle par une section $s: G\hookrightarrow\mathcal{G}$ est une transvection affine.*

Dans la suite, pour montrer le théorème, on suppose la dimension $n\geq 5$, l'hypothèse de récurrence étant que le théorème est supposé vrai en dimension $n-1$. On donne une section $s: G\hookrightarrow\mathcal{G}$. Il s'agit de montrer qu'elle est du type s_a où $a\in\mathcal{E}$.

4.5 Le groupe S_u où $u \in E^*$. Soit $u \in E^*$ un forme linéaire non nulle. On forme le sous-groupe de G

$$S_u = \{f \in G \mid u \circ f = u\}$$

Alors S_u opère sur les hyperplans stables vectoriel et affine

$$F_{u,0} = \ker u = \{\overrightarrow{x} \in E \mid u(\overrightarrow{x}) = 0\}\ ,\ F_{u,1} = \{\overrightarrow{x} \in E \mid u(\overrightarrow{x}) = 1\}$$

L'action de S_u sur $F_{u,1}$ permet d'identifier S_u au groupe affine. Alors $F_{u,0}$ s'identifie à l'espace des vecteurs de $F_{u,1}$. L'application $S_u \to F_{u,0}$ associant à $f \in S_u$ sa restriction à $F_{u,0}$ est la surjection canonique du groupe affine sur le groupe linéaire. Le noyau T_u, groupe des transvections d'hyperplan $F_{u,0}$, s'identifie au groupe des translations de l'espace affine $F_{u,1}$, la transvection $t_{\overrightarrow{\varepsilon},u}$ s'identifiant à la translation de vecteur $\overrightarrow{\varepsilon}$.

L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que les sections $GL(F_{u,0}) \hookrightarrow S_u$ envoient $GL(F_{u,0})$ en des sous-groupes de S_u de la forme

$$G_{\overrightarrow{\delta},u} = \{f \in S_u \mid f(\overrightarrow{\delta}) = \overrightarrow{\delta}\} = \{f \in G \mid f(\overrightarrow{\delta}) = \overrightarrow{\delta} \ et\ u \circ f = u\}$$

Soit A, B les deux hyperplans de $\mathcal{E}$ de direction $F_{u,0}$.

Pour qu'une application affine ait son application linéaire associée dans S_u, il faut et il suffit que les hyperplans A et B, ou bien soient stables, ou bien soient échangés. Ces applications affines forment un sous-groupe $\mathcal{K}_\sqcap$ admettant pour sous-groupe d'indice 2 le sous-groupe $\mathcal{H}_\sqcap$ des applications affines laissant A et B stables.

Montrons que S_u n'a pas de sous-groupes d'indice 2. Comme les groupes linéaires sont simples en dimension au moins 3, les $G_{\overrightarrow{\delta},u}$ sont contenus dans tout sous-groupe d'indice 2 de S_u. Il suffit de montrer que S_u est engendré par les sous-groupes $G_{\overrightarrow{\delta},u}$.

Soit $\overrightarrow{\varepsilon} \in F_{u,0}$, $\overrightarrow{\delta} \notin F_{u,0}$, $\overrightarrow{\delta_1} = \overrightarrow{\delta} + \overrightarrow{\varepsilon}$. Soit $f \in G_{\overrightarrow{\delta},u}$ et $f_1 \in G_{\overrightarrow{\delta_1},u}$ de mm̂e application linéaire associée g. Alors $f_1 \circ f^{-1}$ envoie $\overrightarrow{\delta}$ en $g(\overrightarrow{\delta}) + \overrightarrow{\varepsilon}$ donc est la transvection de vecteur $g(\overrightarrow{\delta}) + \overrightarrow{\delta} + \overrightarrow{\varepsilon}$. Comme $g(\overrightarrow{\delta})$ peut ̂tre pris quelconque dans $F_{u,1}$, toute transvection est dans le sous-groupe engendré par les $G_{\overrightarrow{\delta},u}$.

La section s envoie donc S_u dans le sous-groupe $\mathcal{H}_\sqcap$ des applications affines laissant les hyperplans parallèles A et B stables. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les groupes affines de A et B. En prenant les restrictions à A et B des $s(f)$

où $f \in S_u$, on a des morphismes $S_u \to \mathcal{A}$ et $S_u \to \mathcal{B}$ dont les noyaux ne sont formés que de transvections. Pour tout $\overrightarrow{\delta} \in F_{u,1}$, les restrictions de ces morphismes à $G_{\overrightarrow{\delta},u}$ donnent des morphismes injectifs $G_{\overrightarrow{\delta},u} \hookrightarrow \mathcal{A}$ et $G_{\overrightarrow{\delta},u} \hookrightarrow \mathcal{B}$ qu'on peut considérer comme des sections du groupe linéaire dans le groupe affine en dimension $n-1$. L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ fixes par tout $s(g)$ où $g \in G_{\overrightarrow{\delta},u}$.

Ainsi, *pour toute section $s : G \hookrightarrow \mathcal{G}$ et tout sous-groupe $G_{\overrightarrow{\delta},u} \subset G$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{\delta}$ et que $s(G_{\overrightarrow{\delta},u})$ soit le sous-groupe $G_{a,b,u} \subset \mathcal{G}$ des applications affines de $\mathcal{E}$ laissant fixes les points a et b, stables les hyperplans $A = a + F_{u,0}$ et $B = b + F_{u,0}$.*

4.6 Lemme *Soit $s : G \hookrightarrow \mathcal{G}$ une section et $u \in E^*$ une forme linéaire non nulle. Il existe un unique point $a \in \mathcal{E}$ fixe pour toutes les applications de $s(S_u)$.*

Soit $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ dans $F_{u,0}$, $\overrightarrow{\delta}$ et $\overrightarrow{\delta_1} = \overrightarrow{\delta} + \overrightarrow{\varepsilon_1}$ dans $F_{u,1}$, on a $G_{\overrightarrow{\delta_1},u} = t_{\overrightarrow{\varepsilon_1},u} G_{\overrightarrow{\delta},u} t_{\overrightarrow{\varepsilon_1},u}$. Par 4.4, $s(t_{\overrightarrow{\sigma},u})$ est une transvection de vecteur $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et d'hyperplan A ou B. Posant $s(G_{\overrightarrow{\delta},u}) = G_{a,b,u}$ et $s\left(G_{\overrightarrow{\delta_1},u}\right) = G_{a_1,b_1,u}$, par conjugaison, la transvection affine $s(t_{\overrightarrow{\varepsilon_1},u})$ envoie a et b en a_1 et b_1. On a donc ou bien $a_1 = a$ et $b_1 = b + \overrightarrow{\varepsilon_1}$, ou bien $a_1 = a + \overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $b_1 = b$.

Soit $\overrightarrow{\varepsilon_2} \neq \overrightarrow{\varepsilon_1}$ dans $F_{u,0}$ et $\overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\delta_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2}$, $s(G_{\overrightarrow{\delta_2},u}) = G_{a_2,b_2,u}$. Supposons $\overrightarrow{bb_1} = \overrightarrow{\varepsilon_1}$. Alors $\overrightarrow{bb_2} = \overrightarrow{bb_1} + \overrightarrow{b_1b_2} = \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{b_1b_2}$ est égal à $\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2}$. Comme $\overrightarrow{b_1b_2}$ vaut $\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{\varepsilon_2}$, la seule possibilité est $\overrightarrow{b_1b_2} = \overrightarrow{\varepsilon_2}$ et $\overrightarrow{bb_2} = \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2}$. On a alors $a = a_1 = a_2$. Les groupes $s(G_{\overrightarrow{\delta},u})$ sont donc tous de la forme $G_{a,b,u}$ où $a \in A$ est indépendant de $\overrightarrow{\delta}$. Comme les $s(G_{\overrightarrow{\delta},u})$ engendrent $s(S_u)$, a est bien point fixe de toutes les applications de $s(S_u)$.

On obtient l'unicité de a ainsi. Soit $\overrightarrow{\delta}$ et $\overrightarrow{\delta_1}$ distincts dans $F_{u,1}$, $f \in G_{\overrightarrow{\delta},u}$ (resp. $f_1 \in G_{\overrightarrow{\delta_1},u}$) admettant $\overrightarrow{\delta}$ (resp. $\overrightarrow{\delta_1}$) pour unique vecteur fixe. Alors $s(f)$ (resp. $s(f_1)$) admet a et $b = a + \overrightarrow{\delta}$ (resp. a et $b_1 = a + \overrightarrow{\delta_1}$) pour seuls points fixes. Comme $b \neq b_1$, a est l'unique point fixe commun aux $s(g)$ où g décrit S_u. Ce point a dépendant à priori de u, on le note a_u.

4.7 Fin de la preuve Supposons que la section $s : G \hookrightarrow \mathcal{G}$ ne soit pas du type s_a. Par 4.1, l'action de $s(G)$ sur $\mathcal{E}$ serait transitive. Tout point de $\mathcal{E}$ serait d'au moins une faon de la forme a_u où $u \in E^*$, $u \neq 0$. C'est impossible car il n'existe que $2^n - 1$ formes linéaires non nulles et 2^n points dans $\mathcal{E}$.

References

[1] Arnaudiès J. M., Bertin J. *Groupes, Algèbres et Géométrie*, Ellipses, (1993).

[2] Coxeter H. S. M., *Introduction to geomtry* (J. Wiley and Sons, (1989).

[3] Dieudonné J., *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, (1968).

[4] Hilbert D. et Cohn-Vossen S. *Geometry and the imagination*, Chelsea, (1952).

[5] Mac Lane S. *Homology*, Springer-Verlage, (1963).

[6] Perrin D., *Cours d'algèbre*, Ellipses, (1996).

[7] Samuel P., *Géométrie projective*, PUF, (1986).

Remi Goblot
UFR de Mathématiques
Université de Lille I
59655 Villeneuve D'Ascq Cedex
France
e-mail : goblot@math.univ-lille1.fr