Proyecciones
Vol. 26, N^o 2, pp. 207-218, August 2007.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile
DOI: 10.4067/S0716-09172007000200004

SUR LES ALGÈBRES NUCLEÁIRES II

JOÃO DA MOTTA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC, BRASIL

ARTIBANO MICALI
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II, FRANCE

Received : June 2006. Accepted : June 2007

Abstract

This paper is the continuation of a precedent one (cf. [2]). We decompose a subclass of semi-simples nuclear algebras as direct sum of simples ideals and we give a Wedderburn decomposition for these algebras.

KEY WORDS : *Power-associative algebras, idempotents, Peirce decomposition, Wedderburn decomposition.*

1991 AMS Subject classification : *17.*

Cet article est la suite d'un article précédent (cf. [2]). Nous décomposons une sous-classe d'algèbres nucléaires semi-simples comme somme directe d'idéaux simples et nous établissons un théorème de Wedderburn pour ces algèbres.

1. ALGÈBRES SEMI-SIMPLES.

Par la suite, on montrera que toute algèbre de la classe des algèbres alt-nucléaires à puissances associatives vérifiant le théorème 4.4 de [2] et semi-simples se décompose comme somme directe d'idéaux simples, résultat analogue à celui des algèbres alternatives.

Soient U une F-algèbre de dimension finie à puissances associatives, où F est un corps commutatif, et R son nilradical. On dit que son nilradical est **héréditaire** si pour tout idéal I de U, le nilradical $R(I)$ de I vérifie l'identité $R(I) = R \cap I$.

Lemme 1.1. *Soit U une F-algèbre alt-nucléaire de dimension finie à puissances associatives telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de T est un nilidéal de T. Alors, le nilradical R de U est héréditaire. En particulier, si U est semi-simple, tout idéal I de l'algèbre U est une sous-algèbre semi-simple.*

Considérons un idéal I $(\neq \{0\}, U)$ de U. Si I est un nilidéal, il est évident que $R(I) = R \cap I$. Sinon, I possède un élément idempotent principal e. En effet, si I n'est pas un idéal à élément unité, l'assertion est une conséquence de la proposition 3.3 de [4] et du théorème 3.1 de [2]. Soient $U = \bigoplus_{i,j} U_{ij}$ et $I = \bigoplus_{i,j} I_{ij}$ $(i, j = 0, 1)$ les décompositions de Peirce de U et I, respectivement, relatives à l'idempotent e. C'est évident que $I_{ij} = I \cap U_{ij}$ $(i, j = 0, 1)$. Ainsi, quels que soient les éléments x et a dans le nilradical $R(I)$ de I et dans U, respectivement, et ses décompositions de Peirce $x = \sum_{i,j=0}^{1} x_{ij}$ et $a = \sum_{i,j=0}^{1} a_{ij}$ dans U, les éléments $x_{11}(= exe)$, $x_{10}(= ex - x_{11})$, $x_{01}(= xe - x_{11})$, $x_{00}(= x - x_{11} - x_{10} - x_{01})$ et $a_{11}(= eae)$, $a_{10}(= ea - a_{11})$, $a_{01}(= ae - a_{11})$ appartiennent à l'idéal I. Il s'ensuit que $x = \sum_{i,j=0}^{1} x_{ij}$ est la décomposition de Peirce de x dans I. Ainsi, les éléments $a_{ij}x_{kl}$ et $x_{kl}a_{ij}$ $(i, j, k, l = 0, 1)$ appartiennent au nilradical $R(I)$ de I, l'ensemble des éléments propement nilpotents dans I. Donc, les éléments ax et xa sont nilpotents, soit $R(I) \subseteq R \cap I$, c'est-à-dire, $R(I) = R \cap I$.

Lemme 1.2. *Soit U une F-algèbre alt-nucléaire. Pour tout ensemble*

d'idempotents $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de U, deux à deux orthogonaux, les identités suivantes sont vérifiées:
(i) $(x, (\sum_{r\in J} e_r)y, \sum_{r\in J} e_r) = -(x, \sum_{r\in J} e_r, y)(\sum_{r\in J} e_r)$,
(ii) $(\sum_{r\in J} e_r)(x, \sum_{r\in J} e_r, y) = -(\sum_{r\in J} e_r, x(\sum_{r\in J} e_r), y)$,
quels que soient les éléments x et y dans U et pour tout sous-ensemble J de $\{1, \ldots, n\}$.

Théorème 1.3. *Soit U une F-algèbre alt-nucléaire de dimension finie à puissances associatives et semi-simple telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de T est un nilidéal de T. Alors, l'algèbre U est une somme directe $U = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$, d'idéaux simples non nuls W_i $(i = 1, \ldots, n)$.*

Considérons un idéal B $(\neq \{0\}, U)$ de U. D'après les hypothèses du théorème et la proposition 3.3 de [4], B possède un idempotent f. Si l'idempotent f n'est pas l'élément unité de B, d'après le lemme 1.1 et le théorème 4.8 de [2], B possède un élément unité g. Par conséquent, $B = Ug = gU$ et l'idempotent g est dans le centre de U. En effet, quels que soient les éléments x, y dans U on a $(xg)y = (g(xg))y = g(x(gy)) = x(gy)$, d'après le lemme 1.2. Donc, $(g, x, y) = (x, g, y) = (x, y, g) = 0$, d'après le lemme 2.2 de [2]. D'autre part, on a aussi $xg = g(xg) = (gx)g = gx$, c'est-à-dire, $[x, g] = 0$ donc g est dans le centre de U. Réciproquement, pour tout élément g dans le centre de U, le sous-espace vectoriel $B = Ug$ est un idéal. En effet, $UB = U(Ug) \subseteq (UU)g \subseteq Ug = B$ *et* $BU = (Ug)U \subseteq U(gU) \subseteq U(Ug) = UB \subseteq B$. Il s'ensuit que pour tout idéal B $(\neq \{0\}, U)$ de U, il existe un idéal complémentaire D $(\neq \{0\}, U)$ tel que $U = B \oplus D$. En effet, si $B = Ug$ comme g est une unité de B, alors g est un idempotent dans le centre de U. Ainsi, $h = 1 - g$ est aussi un idempotent dans le centre de U et $D = Uh$. Observons que B et D sont des idéaux semi-simples orthogonaux et que tout idéal I de B (ou de D) est aussi un idéal de l'algèbre U. Ainsi, si B n'est pas un idéal simple, B possède un idéal I $(\neq \{0\}, B)$ donc B est une F-algèbre alt-nucléaire qui vérifie les conditions du théorème 4.4 de [2]. Ceci montre que, à partir des hypothèses du théorème et de ce que l'on a vu ci-dessus, cette décomposition peut se répéter. Comme la dimension de U est finie, ce processus s'arrête dès que les idéaux sont simples. Ainsi, l'algèbre U se décompose en une somme directe d'idéaux simples non nuls.

Lemme 1.4. *Soit U une F-algèbre à élément unité alt-nucléaire de dimension finie et à puissances associatives telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idem-*

potent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de T est un nilidéal de T. Si $\{[u_1], \ldots, [u_t]\}$ est un ensemble d'idempotents non nuls, deux à deux orthogonaux dans l'algèbre quotient U/R, il existe un ensemble d'idempotents $\{e_1, \ldots, e_t\}$, deux à deux orthogonaux dans U, et vérifiant $[e_i] = [u_i]$ $(i = 1, \ldots, t)$. De plus, si $[1] = \sum_{i=1}^{t} [u_i]$, alors $1 = \sum_{i=1}^{t} e_i$.

Pour démontrer ce lemme, on procède par récurrence sur t. Pour $t = 1$, si $[u_1]$ est un idempotent dans U/R, alors tout représentant u_1 de $[u_1]$ est non nilpotent. Il s'ensuit que la sous-algèbre de U engendrée par l'élément u_1 est une non nilalgèbre, donc elle possède un idempotent $e_1 = \sum_i \alpha_i u_1^i$, $\alpha_i \in F$, vérifiant $[e_1] = \alpha[u_1]$, $\alpha \in F$, $\alpha = \sum_i \alpha_i$. Comme $e_1 \notin R$, il s'ensuit que $[e_1] \neq [0]$ et $[e_1] = \alpha[e_1]$, donc $\alpha = 1$ et $[e_1] = [u_1]$. D'ailleurs, si $[1] = [u_1]$, alors $[1] = [e_1]$ et $1 - e_1 \in R$. Comme $(1 - e_1)^2 = 1 - e_1$, nécessairement $1 = e_1$. Supposons que pour un entier $t \geq 1$ le lemme soit encore vrai. Alors, quel que soit l'ensemble d'idempotents non nuls $\{[u_1], \ldots, [u_{t+1}]\}$ dans U/R, deux à deux orthogonaux, il existe, d'après l'hypothèse de récurrence, un ensemble d'idempotents $\{e_1, \ldots, e_t\}$ deux à deux orthogonaux, vérifiant $[e_i] = [u_i]$ $(i = 1, \ldots, t)$. Considérons les décompositions de Peirce $U = \oplus_{i,j} U_{ij}$ $(i, j = 0, \ldots, t)$ *et* $U/R = \oplus_{i,j}(U/R)_{ij}$ $(i, j = 0, \ldots, t)$, relatives aux idempotents $e = \sum_{i=1}^{t} e_i$ et $[e] = \sum_{i=1}^{t} [e_i]$, respectivement. Il s'ensuit que

$$(1.1) \qquad U_{00} = fUf \quad \textit{et} \quad (U/R)_{00} = [f](U/R)[f],$$

où $f = 1 - e$ est l'élément unité de U_{00}.

Observons encore que $R \cap U_{00}$ est le nilradical de U_{00}, d'après le corollaire 4.6 de [2], donc

$$(1.2) \quad (U/R)_{00} = [f](U/R)[f] = (U_{00} + R)/R \cong U_{00}/(R \cap U_{00}).$$

Comme $[u_{t+1}] \in (U/R)_{00}$, on peut supposer, d'après (1) que $u_{t+1} \in U_{00}$. Ainsi, deux cas sont envisagés:
(i) Si l'unique idempotent non nul de U_{00} est l'élément unité f, il est évident que $u_{t+1} + (R \cap U_{00}) = f + (R \cap U_{00})$, ce qui nous montre que $[u_{t+1}] = [f]$, d'après (2). On pose alors $e_{t+1} = f$.
(ii) Si U_{00} est une sous-F-algèbre alt-nucléaire et donc vérifiant les conditions du théorèoreme 4.4 de [2], en appliquant le cas $t = 1$ à la classe résiduelle $u_{t+1} + (R \cap U_{00})$ dans $U_{00}/(R \cap U_{00})$ on obtient un idempotent $e_{t+1} \in U_{00}$ vérifiant $e_{t+1} + (R \cap U_{00}) = u_{t+1} + (R \cap U_{00})$, donc $[e_{t+1}] = [u_{t+1}]$. Comme $e_{t+1} \in U_{00}$, les idempotents de l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_t, e_{t+1}\}$ sont

deux à deux orthogonaux.

Finalement, si $[1] = \sum_{i=1}^{t}[u_i]$, alors $1 - \sum_{i=1}^{t} e_i \in R$ donc $1 = \sum_{i=1}^{t} e_i$.

Lemme 1.5. *Soit U une F-algèbre alt-nucléaire de dimension finie et à puissances associatives telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de T est un nilidéal de T et soit R son nilradical. Alors, la F-algèbre quotient U/R est de dimension finie, à puissances associatives et telle que pour toute sous-F-algèbre S de U/R à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de S est un nilidéal de S. De plus, si U/R possède un idempotent $[e]$ $(\neq [0],[1])$, alors U/R est aussi une algèbre alt-nucléaire.*

Comme conséquence du théorème 1.3 et des lemmes 1.4 et 1.5, on a le résultat suivant:

Théorème 1.6. *Soit U une F-algèbre alt-nucléaire de dimension finie à puissances associatives telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de T est un nilidéal de T. Alors, la F-algèbre quotient U/R est une somme directe $U/R = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$, d'idéaux simples non nuls W_i $(i = 1, \ldots, n)$. De plus, ces idéaux sont à élément unité dans lesquels l'unité est l'unique idempotent non nul ou des idéaux alternatifs.*

Si l'unique idempotent non nul de U/R est l'unité, U/R ne possède pas d'éléments nilpotents non nuls donc U/R est une algèbre simple, d'après le lemme 1.5 et le lemme 4.3 de [2]. Si l'algèbre U/R possède un idempotent $[e]$ $(\neq [0],[1])$, alors U/R est une algèbre vérifiant les conditions du théorème 1.3 et est donc une somme directe d'idéaux simples non nuls. De plus, d'après le théorème 2 de [3], tout idéal W_i $(1 \leq i \leq n)$ non nul et simple qui possède un idempotent $[e]$ $(\neq [0],[1])$ est un idéal alternatif.

2. DÉCOMPOSITION DE WEDDERBURN.

Dans ce paragraphe on donne des conditions suffisantes pour que la sous-classe des algèbres alt-nucléaires, vérifiant le théorème 4.4 de [2], possède une décomposition de Wedderburn.

Soit U une F-algèbre de dimension finie à puissances associatives, où F est un corps commutatif, et R son nilradical. On dit que l'algèbre U possède une **décomposition de Wedderburn**, si U possède une sous-algèbre $\sigma \cong U/R$ telle que $U = \sigma + R$.

Théorème 2.1. *Soit U une F-algèbre à élément unité 1, alt-nucléaire de dimension finie et à puissances associatives telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de T est un nilidéal de T. Si la F-algèbre quotient U/R contient une algèbre de matrices M_s de degré s avec élément unité [1], alors l'algèbre U contient une algèbre de matrices m_s de degré s avec 1 comme élément unité et M_s est l'image de m_s par le morphisme canonique $U \longrightarrow U/R$, $x \longmapsto [x]$.*

En effet, compte tenu des hypothèses du lemme, M_s possède un ensemble d'éléments $\{[u_{ij}] \mid (i,j = 1,\ldots,s)\}$ vérifiant la table de multiplication

$$[u_{ij}][u_{kl}] = \delta_{jk}[u_{il}] \ (i,j,k,l = 1,\ldots,s), \tag{2.1}$$

où $[1] = [u_{11}] + \ldots + [u_{ss}]$. D'après le lemme 1.4, il y a un ensemble d'idempotents $\{e_{11},\ldots,e_{ss}\}$ dans U, deux à deux orthogonaux, tels que $[e_{ii}] = [u_{ii}]$ $(i = 1,\ldots,s)$ et $1 = e_{11} + \ldots + e_{ss}$. Considérons la décomposition de Peirce $U = \bigoplus_{i,j} U_{ij}$ $(i,j = 0,\ldots,s)$, relative à l'ensemble d'idempotents $\{e_{11},\ldots,e_{ss}\}$. On peut supposer que $u_{11} = e_{11}$ et $u_{i1} \in U_{i1}$ $(i = 2,\ldots,s)$, d'après l'identité $[u_{i1}] = [e_{ii}][u_{i1}][e_{11}]$ $(i = 2,\ldots,s)$ et, de même, $u_{1j} \in U_{1j}$ $(j = 2,\ldots,s)$. Ainsi, d'après (1), il résulte que $u_{1j}u_{j1} = e_{11} + a_j$ $(j = 2,\ldots,s)$ avec $a_j \in R \cap U_{11}$ $(j = 2,\ldots,s)$.

Lemme Auxiliaire 2.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, considérons la suite d'éléments de U, $P_{1,j} = (e_{11}+a_j^2)((e_{11}-a_j)u_{1j})$ et $P_{n,j} = (e_{11}+a_j^{2^n})P_{n-1,j}$, pour $n \geq 2$ et $j = 2,\ldots,s$. Alors, $P_{n,j}u_{j1} = e_{11} - a_j^{2^{n+1}}$ et $[P_{n,j}] = [u_{1j}]$, pour tout entier $n \geq 1$ et $j = 2,\ldots,s$.*

Pour la démonstration, on procède par récurrence sur n. Ainsi, pour $n = 1$, $P_{1,j}u_{j1} = ((e_{11}+a_j^2)((e_{11}-a_j)u_{1j}))u_{j1} = (e_{11}+a_j^2)(((e_{11}-a_j)u_{1j})u_{j1}) = (e_{11}+a_j^2)(e_{11}-a_j^2) = e_{11} - a_j^{2^2}$.

Supposons que pour un entier $n \geq 1$, le lemme soit encore vrai. Alors, $P_{n+1,j}u_{j1} = ((e_{11}+a_j^{2^{n+1}})P_{n,j})u_{j1} = (e_{11}+a_j^{2^{n+1}})(P_{n,j}u_{j1}) = (e_{11}+a_j^{2^{n+1}})(e_{11}-a_j^{2^{n+1}}) = e_{11} - a_j^{2^{n+2}}$. De même, pour l'autre identité.

Revenons à la démonstration du lemme 2.1.

Considérons un entier $r \geq 1$ tel que $a_j^{2^{r+1}} = 0$ $(j = 2,\ldots,s)$ et les éléments dans U, $e_{1j} = P_{r,j}$ et $e_{i1} = u_{i1}$ $(i,j = 2,\ldots,s)$. Alors, e_{1j} est dans U_{1j}, e_{i1} est dans U_{i1} et on obtient

$$e_{1j}e_{j1} = e_{11} \ (j = 1,\ldots,s). \tag{2.2}$$

En effet, le cas $j = 1$ est évident et pour $j \neq 1$, on a $e_{1j}e_{j1} = P_{r,j}u_{j1} = e_{11} - a_j^{2^{r+1}} = e_{11}$, compte tenu du fait que e_{11} est l'élément unité de U_{11} et d'après le lemme auxiliaire 2.2. Définissons

$$e_{ij} = e_{i1}e_{1j} \ (i, j = 2, \dots, s;\ i \neq j) \tag{2.3}$$

dans U_{ij}. Comme $[e_{i1}] = [u_{i1}]$ et $[e_{1j}] = [P_{r,j}] = [u_{1j}]$, alors $[e_{ij}] = [u_{ij}]$. Observons que (5) est valable si $i = 1$ ou $j = 1$. De même, pour $i = j$, car $(e_{i1}e_{1i})^2 = (e_{i1}e_{1i})(e_{i1}e_{1i}) = e_{i1}(e_{1i}(e_{i1}e_{1i})) = e_{i1}((e_{1i}e_{i1})e_{1i}) = e_{i1}e_{1i}$, d'après l'identité (4), le corollaire 2.3 de [2] et $[e_{i1}e_{1i}] = [u_{ii}] = [e_{ii}]$. Ainsi, si l'élément unité e_{ii} est l'unique idempotent non nul de U_{ii}, le résultat est évident. Dans le cas où U_{ii} est une sous-F-algèbre alt-nucléaire, il résulte du lemme 1.4 appliqué à U_{ii}. Par conséquent, l'identité (2.3) est établie pour $i, j = 1, \dots, s$.

Ensuite, observons que

$$e_{ij}e_{kl} = 0,\ \textit{si}\ j \neq k \ (i, j, k, l = 1, \dots, s), \tag{2.4}$$

d'après le lemme 2.2. de [2]. D'autre part, on a

$$e_{1j}e_{jk} = e_{1k} \quad \textit{et} \quad e_{ij}e_{j1} = e_{i1} \ (i, j, k = 1, \dots, s). \tag{2.5}$$

En effet, pour $k = 1$ c'est une conséquence de l'identité (2.2). Par contre, pour $k \neq 1$, on a $e_{1j}e_{jk} = e_{1j}(e_{j1}e_{1k}) = (e_{1j}e_{j1})e_{1k} - (e_{1j}, e_{j1}, e_{1k}) = e_{1k} - (e_{1k}e_{1j})e_{j1} + e_{1k}(e_{1j}e_{j1}) = e_{1k}$. De même, pour l'autre identité.

Les identités de (2.5) nous permettent de démontrer que

$$e_{ij}e_{jk} = e_{ik} \ (i, j, k = 1, \dots, s). \tag{2.6}$$

En effet, $e_{ij}e_{jk} = (e_{i1}e_{1j})e_{jk} = e_{i1}(e_{1j}e_{jk}) + (e_{i1}, e_{1j}, e_{jk}) = e_{ik} + (e_{1j}, e_{jk}, e_{i1}) = e_{ik} + e_{1k}e_{i1} - e_{1j}(e_{jk}e_{i1})$. Si $i = k$, on a $e_{ij}e_{ji} = e_{ii} + e_{11} - e_{1j}e_{j1} = e_{ii}$; si $i \neq k$, on a $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$, d'après (2.4). Ainsi, d'après les identités (2.4) et (2.6), on conclut que la sous-algèbre m_s de U munie de la base $\{e_{ij} \mid (i, j = 1, \dots, s)\}$ est une algèbre de matrices.

Théorème 2.3. *Soit U une F-algèbre alt-nucléaire de dimension finie à puissances associatives telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des* *éléments nilpotents de T est un nilidéal de T. Si R est le nilradical de U et la F-algèbre quotient U/R est une algèbre de Cayley avec des diviseurs de zéro, alors U possède une décomposition de Wedderburn.*

En effet, compte tenu du théorème 5.2 de [2], on peut supposer que U soit une algèbre à élément unité et prendre l'algèbre U/R sous la forme $U/R = M_2 + [w]M_2$, dont les éléments s'écrivent $[q_1] + [w][q_2]$, où $[q_i] \in M_2$ $(i = 1, 2)$, $[w]^2 = [1]$ et la multiplication de U/R est donnée par le lemme 3.16 de [4], avec un évident changement de notation. D'après le lemme 2.1, U contient une algèbre de matrices m_2 de degré deux telle que 1 est l'élément unité de m_2 et si $\{e_{ij} \mid (i, j = 1, 2)\}$ est la base canonique de m_2, alors $\{[e_{ij}] \mid (i, j = 1, 2)\}$ est la base canonique de M_2. Observons encore que $\overline{[q]} = [\overline{q}]$ pour tout q dans m_2, $\overline{e_{ii}} = e_{jj}$ et $\overline{e_{ij}} = -e_{ij}$ $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$. Considérons la décomposiion de Peirce $U = \bigoplus_{i,j} U_{ij}$ $(i, j = 0, 1, 2)$, relative aux idempotents e_{11} et e_{22}. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer l'existence d'un élément $v \notin m_2$ vérifiant les propriétés suivantes: (i) $v^2 = 1$; (ii) $qv = v\overline{q}$, pour tout $q \in m_2$. En effet, d'après cette dernière condition, on vérifie que: (iii) $p(vq) = v(\overline{p}q)$; (iv) $(vp)q = v(qp)$; (v) $(vp)(vq) = q\overline{p}$, quels que soient p et q dans m_2, d'après le corollaire 2.3 de [2], donc $m_2 + vm_2$ est une sous-algèbre de U avec multiplication donnée par le lemme 3.16 de [4]. Ainsi, écrivons

$$[f_{ij}] = [w][e_{jj}]\ (i, j = 1, 2;\ i \neq j). \tag{2.7}$$

On peut prendre $f_{ij} \in U_{ij}$, car
$[e_{ii}]([f_{ij}][e_{jj}]) = [e_{ii}]([w][e_{jj}]^2) = [w](\overline{[e_{ii}]}[e_{jj}])$
$= [w][\overline{e_{ii}}e_{jj}] = [w][e_{jj}] = [f_{ij}]$. D'autre part, $[e_{ji}][f_{ij}] = [e_{ji}]([w][e_{jj}]) = -[w]([e_{ji}][e_{jj}]) = [0]$, ce qui nous amène à

$$e_{ji}f_{ij} = c_j\ (i, j = 1, 2;\ i \neq j), c_j \in R \cap U_{jj}.$$

Ecrivons

$$h_{ij} = f_{ij} - e_{ij}c_j\ (i, j = 1, 2;\ i \neq j).$$

Alors, $h_{ij} \in U_{ij}$, $[h_{ij}] = [f_{ij}]$ et

$$e_{ji}h_{ij} = h_{ij}e_{ji} = 0. \tag{2.8}$$

En effet, $e_{ji}h_{ij} = c_j - e_{ji}(e_{ij}c_j) = c_j - (e_{ji}e_{ij})c_j = 0$. De plus, $e_{ij}c_j = e_{ij}(e_{ji}f_{ij}) = (e_{ij}e_{ji})f_{ij} - (e_{ij}, e_{ji}, f_{ij}) = f_{ij} + (f_{ij}e_{ji})e_{ij} - f_{ij} = (f_{ij}e_{ji})e_{ij}$ et donc $h_{ij}e_{ji} = f_{ij}e_{ji} - ((f_{ij}e_{ji})e_{ij})e_{ji} = 0$. Comme,

$[h_{ij}][h_{ji}] = [f_{ij}][f_{ji}] = [e_{ii}]\overline{[e_{jj}]} = [e_{ii}]$, alors

$$h_{ij}h_{ji} = e_{ii} + a_i,\ a_i \in R \cap U_{ii}(i = 1, 2).$$

Lemme Auxiliaire 2.4. *Pour tout entier $n \geq 1$, considérons la suite d'éléments de U, $P_1 = (e_{11} + a_1^2)((e_{11} - a_1)h_{12})$ et $P_n = (e_{11} + a_1^{2^n})P_{n-1}$, pour $n \geq 2$. Alors, $P_n h_{21} = e_{11} - a_1^{2^{n+1}}$ et $[P_n] = [h_{12}]$, pour tout entier $n \geq 1$.*

Pour la démonstration on procède par récurrence sur n. Ainsi, pour $n = 1$, $P_1 h_{21} = ((e_{11} + a_1^2)((e_{11} - a_1)h_{12}))h_{21} = (e_{11} + a_1^2)((e_{11} - a_1)(h_{12}h_{21})) = (e_{11} + a_1^2)((e_{11} - a_1)(e_{11} + a_1)) = (e_{11} + a_1^2)(e_{11} - a_1^2) = e_{11} - a_1^{2^2}$. Supposons que pour un entier $n \geq 1$, le lemme soit encore vrai. Alors, $P_{n+1}h_{21} = ((e_{11} + a_1^{2^{n+1}})P_n)h_{21} = (e_{11} + a_1^{2^{n+1}})(P_n h_{21}) = (e_{11} + a_1^{2^{n+1}})(e_{11} - a_1^{2^{n+1}}) = e_{11} - a_1^{2^{n+2}}$. De même, on démontre l'autre identité.

Lemme Auxiliaire 2.5. *Pour tout entier $n \geq 1$, $a_1^n h_{12} = h_{12} a_2^n$ et $a_2^n h_{21} = h_{21} a_1^n$.*

En effet, par récurrence sur n, on a: pour $n = 1$, $a_1 h_{12} = (h_{12}h_{21} - e_{11})h_{12} = (h_{12}h_{21})h_{12} - e_{11}h_{12} = h_{12}(h_{21}h_{12}) - h_{12}e_{22} = h_{12}(h_{21}h_{12} - e_{22}) = h_{12}a_2$. Supposons que pour un entier $n \geq 1$, le lemme soit encore vrai. Alors, $a_1^{n+1}h_{12} = a_1^n(a_1 h_{12}) = a_1^n(h_{12}a_2) = (a_1^n h_{12})a_2 = (h_{12}a_2^n)a_2 = h_{12}a_2^{n+1}$. De même, pour l'autre identité.

Lemme Auxiliaire 2.6. *Pour tout entier $n \geq 1$, $P_n h_{21} = e_{11} - a_1^{2^{n+1}}$ et $h_{21}P_n = e_{22} - a_2^{2^{n+1}}$.*

En effet, $P_n h_{21} = e_{11} - a_1^{2^{n+1}}$ est une conséquence du lemme auxiliaire 2.4 et on démontre que $h_{21}P_n = e_{22} - a_2^{2^{n+1}}$ par récurrence sur n. Ainsi, pour $n = 1$ on a

$$\begin{array}{rclcl}
h_{21}P_1 & = & h_{21}((e_{11} + a_1^2)((e_{11} - a_1)h_{12})) & = & (h_{21}(e_{11} + a_1^2))((e_{11} - a_1)h_{12}) \\
& = & ((e_{22} + a_2^2)h_{21})((e_{11} - a_1)h_{12}) & = & (e_{22} + a_2^2)((h_{21}(e_{11} - a_1))h_{12}) \\
& = & (e_{22} + a_2^2)((e_{22} - a_2)(h_{21}h_{12})) & = & (e_{22} + a_2^2)(e_{22} - a_2^2) \\
& = & e_{22} - a_2^{2^2}. & &
\end{array}$$

Supposons que pour un entier $n \geq 1$, le lemme soit encore vrai. Alors,

$$\begin{array}{rclcl}
h_{21}P_{n+1} & = & h_{21}((e_{11} + a_1^{2^{n+1}})P_n) & = & (h_{21}(e_{11} + a_1^{2^{n+1}}))P_n \\
& = & ((e_{22} + a_2^{2^{n+1}})h_{21})P_n & = & (e_{22} + a_2^{2^{n+1}})(h_{21}P_n) \\
& = & (e_{22} + a_2^{2^{n+1}})(e_{22} - a_2^{2^{n+1}}) & = & e_{22} - a_2^{2^{n+2}}.
\end{array}$$

Lemme Auxiliaire 2.7. *Pour tout entier $n \geq 1$, considérons les suites suivantes:*

(i) $L_1 = (e_{11} + a_1^2)(e_{11} - a_1)$ *et* $L_n = (e_{11} + a_1^{2^n})L_{n-1}$, *pour* $n \geq 2$;
(ii) $Q_1 = (e_{22} + a_2^2)(e_{22} - a_2)$ *et* $Q_n = (e_{22} + a_2^{2^n})Q_{n-1}$, *pour* $n \geq 2$.

Alors, $P_n = L_n h_{12} = h_{12} Q_n$, *pour tout* $n \geq 1$.

La démonstration se fait par récurrence sur n et on utilise le lemme auxiliaire 2.5.

On revient à la démonstration du théorème 2.3. Considérons un entier $r \geq 1$ tel que $a_i^{2^{r+1}} = 0$ $(i = 1, 2)$ et les éléments de U,

$$p_{12} = P_r \quad et \quad p_{21} = h_{21}.$$

A partir des lemmes auxiliaires 2.4 et 2.6, on a: (i) $p_{ij} \in U_{ij}$ et $[p_{ij}] = [f_{ij}]$ $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$; (ii) $p_{ij} p_{ji} = e_{ii}$ $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$. D'après le lemme auxiliaire 2.7 et les identités (2.8) on a $e_{ij} p_{ji} = p_{ji} e_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$. Ecrivons

$$v = p_{12} + p_{21}.$$

Alors, $[v] = [f_{12}] + [f_{21}] = [w]$ entraîne $v \notin m_2$ et $v^2 = (p_{12} + p_{21})^2 = p_{12} p_{21} + p_{21} p_{12} = e_{11} + e_{22} = 1$. D'autre part, $e_{ii} v = e_{ii}(p_{ij} + p_{ji}) = (p_{ij} + p_{ji}) e_{jj} = v e_{jj}$ et $(e_{ij} + p_{ij})^2 = e_{ij} p_{ij} + p_{ij} e_{ij} = 0$ donc $e_{ij} v = e_{ij}(p_{ij} + p_{ji}) = e_{ij} p_{ij} = -p_{ij} e_{ij} = -(p_{ij} + p_{ji}) e_{ij} = -v e_{ij}$. Par conséquent, $qv = v\overline{q}$, pour tout q dans m_2 et cela nous dit que U possède une sous-algèbre $\sigma \cong U/R$ telle que $U = \sigma + R$.

Comme conséquence des théorèmes 1.6, 2.1 et 2.3, on a le résultat suivant:

Théoréme 2.8. *Soit F un corps et U une F-algèbre alt-nucléaire de dimension finie à puissances associatives telle que pour toute sous-F-algèbre T de U à élément unité dans laquelle l'unité est l'unique idempotent non nul, l'ensemble des éléments nilpotents de T est un nilidéal de T. Si la F-algèbre quotient U/R est une somme directe d'idéaux simples non nuls isomorphes à des algèbres de matrices M_s de degré s sur F ou à des algèbres de Cayley avec diviseurs de zéro sur F, alors l'algèbre U possède une décomposition de Wedderburn.*

Observons, tout d'abord, que on peut supposer que l'algèbre U est une algèbre à élément unité 1, d'après le théoréme 5.2 de [2]. Encore, on peut se borner au cas où $U/R = W_i$ $(1 \leq i \leq n)$. En effet, d'après le lemme

1.4, il existe un esemble d'idempotents $\{e_1, \ldots, e_s\}$ dans U, deux à deux orthogonaux, vérifiant $1 = e_1 + \ldots + e_n$ et tels que les idempotents $[e_i]$ ($i = 1, \ldots, n$) soient les éléments unité de W_i. En considérant la décomposition de Peirce $U = \bigoplus_{i,j} U_{ij}$ ($i, j = 0, \ldots, n$), relative à l'ensemble d'idempotents $\{e_1, \ldots, e_n\}$, le nilradical de U_{ii} est $R \cap U_{ii}$ ($i = 1, \ldots, n$), d'après le corollaire 4.6 de [2], et $W_i \cong U_{ii}/R \cap U_{ii}$ ($i = 1, \ldots, n$). De la décomposition de Wedderburn pour $U_{ii} = \sigma_i + R \cap U_{ii}$, si $\sigma_i \cong W_i$ ($i = 1, \ldots, n$), la somme des sous-F-algèbre σ_i de U est une somme directe $\sigma = \sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n \cong U/R$. Ainsi, si U/R est isomorphe à une algèbre de matrices M_s de degré s sur F, d'après le théorème 2.1, l'algèbre U contient une algèbre de matrices m_s de degré s avec l'élément unité 1 et telle que $m_s \cong U/R$. Par contre, si U/R est une algèbre de Cayley avec diviseurs de zéro sur F, le théorème 2.3 nous dit que U possède une décomposition de Wedderburn.

References

[1] Albert, A. A. - Structure of Algebras, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, Vol. 24, New York (1939).

[2] da Motta Ferreira, J. C. et Micali, A. - Sur les algèbres nucléaires, Indagationes Mathematicae 7 (3), pp. 331-342 (1996).

[3] Rich, M. - Rings with idempotents in their nuclei, Trans. Amer. Math. Soc. 208, pp. 81-90 (1975).

[4] Schafer, R. D. - An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, New York and London (1966).

[5] Schafer, R. D. - The Wedderburn principal theorem for alternative algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 55, pp. 604-614 (1949).

[6] Zhevlakov, K. A.; Slin'ko, A. M.; Shestakov, I. P. and Shirshov, A. I. - Rings that are nearly associative, Inst. Math. Acad. Sci. of the U.S.S.R., Siberian Branch Novosibirsk, U. S. S. R., Academic Press, New York and London (1982).

João Carlos DA MOTTA FERREIRA
Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
09210-170 Santo André
SP - Brasil
e-mail : joao.cmferreira@ufabc.edu.br

and

Artibano MICALI
Université Montpellier II
Département des Sciences Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier, France
e-mail : micali@univ.montp2.fr