Proyecciones
Vol. 27, N^o 3, pp. 219–236, December 2008.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile
DOI: 10.4067/S0716-09172008000300001

COMPACTIFICATION ℓ-ADIQUE DE R

JEAN–FRANÇOIS JAULENT
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX - FRANCIA

Received : December 2007. Accepted : October 2008

Abstract

Résumé. *Nous construisons un groupe topologique compact $\mathbf{R}_\ell$, qui contient naturellement comme sous-groupes denses à la fois le groupe additif réel $\mathbf{R}$ et le groupe ℓ-adique $\mathbf{Q}_\ell$ pour un premier donné ℓ, et nous en étudions quelques unes des propriétés. En appendice, nous montons que cela donne une description arithmétique du solénoïde ℓ-adique S_ℓ classiquement défini en termes de feuilletages.*

Abstract. *For a given prime number ℓ, we construct a compact topological group $\mathbf{R}_\ell$ which contains both the real additive group $\mathbf{R}$ and the ℓ-adic one $\mathbf{Q}_\ell$ as dense subgroups; thus we study some of its properties. This construction gives an arithmetic description of the so-called ℓ-adic solenoid S_ℓ classically defined in terms of foliations.*

Introduction

Soit ℓ un nombre premier et $R_\ell = \{0, 1, \ldots, \ell-1\}$ l'ensemble des entiers naturels inférieurs à ℓ. Il est bien connu que toute série de la forme

$$\sum_{n_0}^{+\infty} a_n \, \ell^n,$$

où les a_n sont pris dans $\mathbf{R}_\ell$ et n_0 dans $\mathbf{Z}$, converge dans le complété ℓ-adique $\mathbf{Q}_\ell$ du corps des rationnels ; et qu'inversement tout nombre ℓ-adique q s'écrit de façon unique comme somme d'une telle série.

De façon semblable, toute série de la forme

$$\sum_{-\infty}^{n_0-1} a_n \, \ell^n,$$

converge dans le corps des réels $\mathbf{R}$; et inversement tout réel positif r s'écrit comme somme d'une telle série, laquelle est même unique ds lors que les a_n ne sont pas ultimement égaux à $\ell - 1$.

On peut donc demander s'il est possible de construire un espace topologique convenable, contenant de façon naturelle $\mathbf{Q}_\ell$ ainsi que $\mathbf{R}$, équipé de surcroît de lois prolongeant celles de $\mathbf{Q}_\ell$ et de $\mathbf{R}$, dans lequel donner un sens univoque à l'expression

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \, \ell^n,$$

indépendamment de la césure utilisée pour la calculer en l'écrivant formellement :

$$\sum_{-\infty}^{n_0-1} a_n \, \ell^n + \sum_{n_0}^{+\infty} a_n \, \ell^n.$$

On s'aperçoit aisément qu'il n'est pas raisonnable d'espérer prolonger continûment la multiplication dans un tel espace, puisque les suites de terme général ℓ^n et ℓ^{-n} convergeant vers 0 dans $\mathbf{Q}_\ell$ et dans $\mathbf{R}$ respectivement, leur produit, qui est constant et égal à 1, devrait alors converger également vers 0, ce qui est évidemment absurde. Il faut donc renoncer à obtenir un anneau topologique.

L'objet du présent travail est ainsi de construire très simplement un groupe topologique abélien et compact que nous notons $\mathbf{R}_\ell$, qui contient naturellement à la fois $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}_\ell$ comme sous-groupes denses, et qui permet de donner un sens précis à chaque somme $q + r$ d'un nombre ℓ-adique q et d'un nombre réel r, donc finalement à toute somme infinie du type précédent.

Nous verrons en appendice que le groupe obtenu $\mathbf{R}_\ell$ s'identifie canoniquement au solénoïde ℓ-adique S_ℓ défini classiquement en termes de feuilletages et qui intervient naturellement dans des questions liées à l'étude de certains systèmes dynamiques où de probabilités.

1. Rappels sur R et sur $\mathbf{Q}_\ell$; construction du groupe $\mathbf{R}_\ell$

Rappelons d'abord brièvement comment sont construits usuellement les complétés du corps $\mathbf{Q}$ des rationnels relativement à ses diverses valeurs absolues.

On sait, par le théorème d'Ostrowski (cf. e.g. [3] ou [7]), que les topologies de $\mathbf{Q}$ qui sont définies par des valeurs absolues non triviales sont :

(i) la topologie réelle, qui correspond à la valeur absolue usuelle définie par :
$$|\, x \,|_\infty = \max\{x, -x\} \ ;$$

(ii) les topologies ℓ-adiques, donnes par les valeurs absolues définies par :
$$|\, x \,|_\ell = \ell^{-\nu_\ell(x)},$$

où $\nu_\ell(x)$ désigne l'exposant du premier ℓ dans la factorisation du rationnel $x \neq 0$.

Dans tous les cas, le procédé de complétion, valable d'ailleurs pour tout espace métrique E (cf. e.g. [9]), permet de regarder $\mathbf{Q}$ comme un sous-espace topologique dense d'un espace complet, qui est évidemment $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$ dans le premier cas et $\mathbf{Q}_\ell$ dans le second. Dans le contexte qui nous intéresse, la méthode algébrique standard consiste à prendre l'anneau des suites de Cauchy de rationnels (pour la métrique considérée) et à le quotienter par l'idéal maximal formé des suites qui convergent vers 0. On obtient ainsi un corps commutatif sur lequel la valeur absolue se prolonge de façon naturelle, ce qui en fait un espace métrique complet (et même localement compact) qui contient $\mathbf{Q}$ comme sous-espace dense.

Faisons choix maintenant d'un nombre premier arbitaire ℓ. Nous avons alors :

Théorème 00. *Soit $\ell \in \mathbf{N}$ un nombre premier et $R_\ell = \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$. Alors :*

(i) Tout réel r s'écrit : $r = \pm\sum_{-\infty}^{n_0-1} a_n\,\ell^n$, avec les a_n dans R_ℓ et n_0 dans $\mathbf{Z}$; cette écriture est unique si les a_n ne sont pas ultimement égaux à $\ell - 1$.

(ii) Tout nombre ℓ-adique q s'écrit de façon unique : $q = \sum_{m_0}^{+\infty} a_n\,\ell^n$, avec les a_n dans R_ℓ ; et on a : $|\,q\,|_\ell = \ell^{-m_0}$, si a_{m_0} est son premier chiffre non nul.

(iii) Dans chaque cas, les sommes finies $z = \pm\sum_{m_0}^{n_0} a_n\,\ell^n$ décrivent le sous-groupe $\mathbf{Z}[1/\ell]$, lequel est dense dans le groupe $\mathbf{Q}_\ell$ comme dans $\mathbf{R}$.

Nous allons plonger $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}_\ell$ dans groupe topologique abélien en les recollant suivant le sous-groupe dense $\mathbf{Z}[1/\ell]$. Comme indiqué dans l'introduction, le point essentiel de notre construction est que toute somme finie $\sum_{n_0+1}^{m_0} a_n\ell^n$ doit avoir même image qu'elle soit regardé dans $\mathbf{Q}_\ell$ ou dans $\mathbf{R}$. Cette observation nous amène donc poser :

Définition 01. Nous appelons *ℓ-adifié du groupe additif* $\mathbf{R}$ le groupe abélien $\mathbf{R}_\ell$ quotient de la somme directe du groupe ℓ-adique $\mathbf{Q}_\ell$ et du groupe additif réel $\mathbf{R}$ par l'image diagonale du sous-groupe $\mathbf{Z}[1/\ell]$ des rationnels ℓ-entiers :

$$\mathbf{R}_\ell = (\mathbf{Q}_\ell \oplus \mathbf{R})/\mathbf{Z}[1/\ell].$$

Le groupe $\mathbf{R}_\ell$ est un groupe divisible qui contient canoniquement $\mathbf{Q}_\ell$ et $\mathbf{R}$.

L'application naturelle de $\mathbf{R}$ (respectivement de $\mathbf{Q}_\ell$) dans $\mathbf{R}_\ell$ étant évidemment injective, nous identifierons un réel r et un nombre ℓ-adique q avec leurs images respectives dans $\mathbf{R}_\ell$, de sorte que nous avons ainsi par construction :

$$\mathbf{Q}_\ell \cap \mathbf{R} = \mathbf{Z}[1/\ell].$$

De façon semblable nous noterons $q+r$ la somme dans le groupe abélien $\mathbf{R}_\ell$ du nombre ℓ-adique q et du réel r, somme qui n'est autre que la classe dans $\mathbf{R}_\ell$ du couple (q, r) de $\mathbf{Q}_\ell \oplus \mathbf{R}$. Un tel nombre sera dit un *réel-ℓ-adique*.

Remarque. Les groupes additifs $\mathbf{Q}_\ell$ et $\mathbf{R}$ étant tous deux divisibles, le quotient $\mathbf{R}_\ell$ l'est aussi. On prendra garde cependant au fait que $\mathbf{R}_\ell$ n'est pas *uniquement* divisible ; ainsi on a bien, par exemple :

$$q + r = n\,(q/n + r/n),$$

pour tout entier naturel $n > 1$; mais (avec les mêmes conventions d'écriture) :

$$1/n + 0 \;\neq\; 0 + 1/n,$$

dès que n est étranger avec ℓ, puisque $1/n$ n'est pas alors dans l'anneau $\mathbf{Z}[1/\ell]$. Plus généralement, pour $k = 0, \cdots, n-1$, les n éléments x_k donnés par :

$$x_k = (q+k)/n + (r-k)/n$$

sont alors distincts dans $\mathbf{R}_\ell$ mais vérifient tous l'identité : $nx_k = q + r$.

Il suit de là que le groupe $\mathbf{R}_\ell$ contient des éléments de torsion. Nous verrons plus loin que ceux-ci constituent même un sous-groupe dense de $\mathbf{R}_\ell$.

L'écriture $x = r + q$ n'étant pas unique du fait de notre construction, il est intéressant de disposer néanmoins d'une écriture *standard* d'un réel-ℓ-adique x :

Théorème 02 (Lemme de représentation). *Tout réel-ℓ-adique x s'écrit de façon unique :*

$$x = [x] + \{x\}, \quad \textit{avec } [x] \in \mathbf{Z}_\ell \textit{ et } \{x\} \in [0,1[.$$

Nous disons que l'entier ℓ-adique $[x]$ est la partie entière et que le réel $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x. En d'autres termes, nous avons :

$$\mathbf{R}_\ell = \mathbf{Z}_\ell \oplus [0,1[.$$

Preuve. Partons d'un réel-ℓ-adique $x = q + r$; écrivons $q = \sum_{n_0}^{+\infty} a_n \ell^n$ la représentation canonique de sa partie ℓ-adique q ; puis notons $q' = \sum_{n_0}^{-1} a_n \ell^n \in \mathbf{N}[1/\ell]$ la partie non entière de q et $z = \sum_0^{+\infty} a_n \ell^n$ sa partie entière. Nous avons ainsi : $x = z + r'$ avec $r' = r + q' \in \mathbf{R}$ et $z \in \mathbf{Z}_\ell$. Ecrivant alors $x' = [x'] + \{x'\}$ la décomposition du réel x' comme somme de sa partie entière $[x] \in \mathbf{Z}$ et de sa partie fractionnaire $\{x'\} \in [0,1[$, nous obtenons comme attendu :

$$x = (z + [x']) + \{x'\} \in \mathbf{Z}_\ell + [0,1[,$$

ce qui établit l'existence de la décomposition annoncée.

L'unicité résulte immédiatement de l'identité :

$$\mathbf{Z}_\ell \cap [0,1[= \mathbf{Z}_\ell \cap \mathbf{Z}[1/\ell] \cap [0,1[= \mathbf{Z} \cap [0,1[= \{0\}.$$

Remarque. Dans la décomposition directe précédente, le sous-groupe réel $\mathbf{R}$ et le sous-groupe ℓ-adique $\mathbf{Q}_\ell$ s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z} \oplus [0,1[\qquad \text{et} \qquad \mathbf{Q}_\ell = \mathbf{Z}_\ell \oplus [0,1[_\ell,$$

où $[0,1[_\ell$ désigne l'ensemble des rationnels ℓ-entiers de l'intervalle $[0,1[$.

Corollaire 03. *Tout réel-ℓ-adique x s'écrit de façon unique comme somme*

$$\sum_{0}^{+\infty} a_n\,\ell^n \;+\; \sum_{-\infty}^{-1} a_n\,\ell^n,$$

d'un entier ℓ-adique $q = \sum_0^{+\infty} a_n\,\ell^n \in \mathbf{Z}_\ell$ et d'un réel $r = \sum_{-\infty}^{-1} a_n\,\ell^n \in [0,1[$, où les a_n sont pris dans R_ℓ et non ultimement égaux à $\ell - 1$ pour $n \ll 0$.

Corollaire 04. *Soit $a \in \mathbf{Z}$ un entier relatif fix. Tout réel-ℓ-adique x s'écrit alors de façon unique :*

$$x = [x]_a + \{x\}_a, \quad \textit{avec } [x]_a \in \ell^a\mathbf{Z}_\ell \textit{ et } \{x\}_a \in [0,\ell^a[.$$

En d'autres termes, nous avons la décomposition directe :

$$\mathbf{R}_\ell = \ell^a\mathbf{Z}_\ell \oplus [0,\ell^a[.$$

2. Propriétés topologiques du groupe $\mathbf{R}_\ell$

Nous allons maintenant définir une distance sur $\mathbf{R}_\ell$ en faisant choix d'une valeur absolue $|\ \ |$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Pour éviter toute confusion, nous notons :

(i) $|r|_\infty = \max\{r,-r\}$, la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{R}$, et

(ii) $|q|_\ell = \ \ell^{-\nu_\ell(q)}$, la valeur absolue normalisée sur $\mathbf{Q}_\ell$.

Cela étant, la *valeur absolue* sur $\mathbf{R}_\ell$ peut être définie de la façon suivante :

Définition 05. *Nous appelons valeur absolue d'un réel-ℓ-adique $x = q + r$ la quantité :*

$$|q+r| = \inf_{z \in \mathbf{Z}[1/\ell]} \max\{\ |q+z|_\ell\ ,\ |r-z|_\infty\},$$

laquelle est encore donnée par la formule :

$$|x| = \min\{\max\{\ |[x]|_\ell\ ,\ |\{x\}|_\infty\}\ ,\ \max\{\ |[x]+1|_\ell\ ,\ |1-\{x\}|_\infty\}\}.$$

Preuve. Il s'agit de vérifier que les deux formules sont équivalentes, autrement dit que la borne inférieure dans la première formule est atteinte pour la valeur de z qui correspond á la décomposition *standard* $x = [x] + \{x\}$ donnée par la proposition 2, où pour la même valeur augmentée de 1, ce qui correspond à la décomposition $x = ([x] + 1) + (\{x\} - 1)$.

Or l'existence même de la décomposition *standard* $x = [x] + \{x\}$ entraîne :

$$|x| \leq \max\{\ |[x]|_\ell\ ,\ |\{x\}|_\infty\} \leq 1\ ;$$

de sorte que la borne inférieure doit être recherchée parmi les décompositions $x = (q+z)+(r-z)$ qui vérifient simultanément $|q+z|_\ell \leq 1$ et $|r-z|_\infty \leq 1$, i.e. $q + z \in \mathbf{Z}_\ell$ et $r - z \in [-1, +1]$; ce qui ne laisse guère que les deux possibilités annoncées.

Remarque. La valeur absolue $|\ |$ ainsi définie coïncide donc avec la valeur absolue normalisée $|\ |_\ell$ sur $\mathbf{Z}_\ell$ et avec la valeur absolue usuelle $|\ |_\infty$ sur $]-1/2, +1/2\,[$.

Théorème 06. *L'application* $(x, y) \mapsto |x - y|$ *est une distance sur* $\mathbf{R}_\ell$ *qui est invariante par translation ; elle fait de* $\mathbf{R}_\ell$ *un groupe topologique contenant à la fois* $\mathbf{Q}_\ell$ *et* $\mathbf{R}$ *comme sous-groupes denses.*

Preuve. Vérifions d'abord que nous avons bien là une distance : L'équivalence

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

étant immédiate, compte tenu de l'expression de la valeur absolue, ainsi que l'identité $|x| = |-x|$, seule pose problème l'inégalité triangulaire. Or, si $x = q + r$ est une décomposition d'un réel-ℓ-adique x donnant sa valeur absolue (en ce sens qu'on a : $|x| = \max\{\ |q|_\ell\ ,\ |r|_\infty\}$) et $x' = q' + r'$ une décomposition analogue pour x', il vient :

$$|x + x'| \leq \max\{\,|q + q'|_\ell, |r + r'|_\infty\} \leq \max\{\,|q|_\ell, |r|_\infty\} + \max\{\,|q'|_\ell, |r'|_\infty\}\ ;$$

ce qui donne, comme attendu :

$$|x + x'| \leq |x| + |x'|\ .$$

En résumé, il suit de là que $\mathbf{R}_\ell$ est bien un groupe topologique.

Ce point acquis, l'invariance par translation provient directement de la définition même de la distance. Enfin, le sous-groupe $\mathbf{Z}$ étant dense dans $\mathbf{Z}_\ell$ et l'ensemble $[-1/2, 1/2[_\ell := \mathbf{Z}[1/\ell] \cap [-1/2, 1/2[$ l'étant dans $[-1/2, 1/2[$, il résulte de la remarque précédant le théorème que le sous-groupe

$$\mathbf{Z}[1/\ell] = \mathbf{Z} \oplus [-1/2, 1/2[_\ell$$

est lui-même dense dans :

$$\mathbf{R}_\ell = \mathbf{Z}_\ell \oplus [-1/2, 1/2[.$$

En particulier, il suit comme annoncé que $\mathbf{Q}_\ell$ et $\mathbf{R}$ sont denses dans $\mathbf{R}_\ell$.

Nous pouvons maintenant établir la compacité du groupe $\mathbf{R}_\ell$, qui justifie le titre de cette note :

Théorème 07. *Le groupe topologique $\mathbf{R}_\ell$ est compact et connexe. Nous disons que c'est le compactifié ℓ-adique du groupe additif réel $\mathbf{R}$.*

Preuve. Pour voir que $\mathbf{R}_\ell$ est compact, considérons la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{\iota} \mathbf{R}_\ell \xrightarrow{\pi} \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

induite par l'injection canonique ι de $\mathbf{Z}_\ell$ dans $\mathbf{R}_\ell$. D'un coté, l'expression de la valeur absolue donnée plus haut montre que ι est isométrique ; de l'autre, la décomposition canonique $\mathbf{R}_\ell = \mathbf{Z}_\ell \oplus [0, 1[$ montre que son conoyau s'identifie (comme groupe topologique) au tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. La compacité de $\mathbf{R}_\ell$ résulte donc de celle des deux groupes $\mathbf{Z}_\ell$ et $\mathbf{T}$.

Ce point acquis, la connexité est immédiate : en effet, le sous-groupe dense $\mathbf{R}$ étant bien enchaîné (pour sa métrique naturelle donc, *a fortiori*, pour la métrique de $\mathbf{R}_\ell$), l'espace $\mathbf{R}_\ell$, qui est simultanément compact et bien enchaîné, est connexe.

Comme tout groupe compact (et, plus généralement, tout groupe localement compact), le groupe $\mathbf{R}_\ell$ admet donc une mesure de Haar :

Corollaire 08. *Le groupe $\mathbf{R}_\ell$ admet une unique mesure positive μ de masse 1 qui est invariante par translation ; celle-ci est caractérisée sur les compacts élémentaires $\ell^n\mathbf{Z}_\ell \oplus [\alpha, \beta]$ (avec $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$) par la formule :*

$$\mu(\ell^n\mathbf{Z}_\ell \oplus [\alpha, \beta]\,) \;=\; \ell^{-n} \times (\beta - \alpha).$$

En particulier les sous-groupes $\mathbf{Q}_\ell$ et $\mathbf{R}$ sont μ-négligeables dans $\mathbf{R}_\ell$.

Proposition 09. *Pour tout x_0 de $\mathbf{R}_\ell$, la composante connexe par arcs de x_0 dans $\mathbf{R}_\ell$ (i.e. l'ensemble des extrémités des chemins dans $\mathbf{R}_\ell$ d'origine x_0) est la droite affine $x_0 + \mathbf{R}$ passant par x_0. En particulier, l'espace $\mathbf{R}_\ell$ n'est pas connexe par arcs.*

Preuve. Translatons par $1/2$ la décomposition donnée par le théorème 2 ; puis écrivons :

$$\mathbf{R}_\ell = \mathbf{Z}_\ell \oplus [-1/2, 1/2\,[,$$

et notons ici $x = z + r$ la décomposition correspondante d'un réel-ℓ-adique x. Par définition de la distance sur $\mathbf{R}_\ell$, pour tout x de $\mathbf{R}_\ell$, la boule ouverte de centre x et de rayon $1/\ell$ est caractérisée par :

$$B(x, 1/\ell) = x \ + \ \ell\mathbf{Z}_\ell + \,]-1/\ell, 1/\ell\,[.$$

Soit alors $X \mid t \mapsto x(t)$ un chemin dans $\mathbf{R}_\ell$, d'origine $x_0 = x(0)$ et d'extrémité $x_1 = x(1)$. La continuité uniforme de X sur le segment $I = [0, 1]$ nous fournit un $\eta > 0$ tel que pour toute η-chaîne $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ de $[0, 1]$, les points $x_k = x(t_k)$ vérifient les inégalités : $|x_k - x_{k-1}| < 1/\ell$, pour $k = 1, \ldots, m$.

En particulier, sur chaque intervalle $I_k = I \cap \,]x_k - \eta, x_k + \eta[$ la fonction $x(t)$ prend ses valeurs dans la boule $B(x_k, 1/\ell)$, ce qui permet d'écrire localement :

$$x(t) = x_k + z_k(t) + r_k(t), \text{ avec } z_k(t) \in \ell\mathbf{Z}_\ell \text{ et } r_k(t) \in]-1/\ell, 1/\ell\,[.$$

Cela étant, l'application $t \mapsto z_k(t)$, qui est continue de I_k dans $\mathbf{Z}_\ell$, est évidemment constante, puisque I_k est connexe tandis que $\mathbf{Z}_\ell$ est totalement discontinu. Il suit de là que $x(t) - x_k$ est réel pour $t \in I_k$; et finalement que $x(t) - x_0$ est à valeurs dans $\mathbf{R}$ pour tout $t \in I$.

Réciproquement, pour tout $x_1 = x_0 + r \in x_0 + \mathbf{R}$, l'application $X \,|\, t \mapsto x(t) = x_0 + t\,r$ est clairement un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x_1.

Remarque. Convenons de dire qu'une partie C de $\mathbf{R}_\ell$ est *convexe* lorsque pour tout couple (a, b) d'éléments de C on a simultanément :

$$b - a \in \mathbf{R}, \quad \text{ainsi que l'inclusion} \quad [a, b] = \{a + t(b - a) \,|\, t \in [0, 1]\} \subset C.$$

Avec ces conventions, la composante connexe par arcs d'un élément x de $\mathbf{R}_\ell$ est tout simplement le plus grand convexe contenant x.

3. Sous-groupe de torsion $\mathbf{R}_\ell^{tor}$ et sous-groupes fermés de $\mathbf{R}_l$

Précisons d'abord la structure du sous-groupe de torsion de $\mathbf{R}_\ell$:

Proposition 010. *L'ensemble $\mathbf{R}_\ell^{tor}$ des éléments de torsion de $\mathbf{R}_\ell$ est un sous-groupe dénombrable dense de $\mathbf{R}_\ell$ et s'identifie au quotient $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}[1/\ell]$ via le morphisme τ qui un rationnel $s \in \mathbf{Q}$ associe la classe $\tau(s)$ dans $\mathbf{R}_\ell$ du couple $(s, -s) \in \mathbf{Q}_\ell \oplus \mathbf{R}$.*

En particulier, il vient :

Corollaire 011. *Pour tout entier naturel $m > 0$ étranger à ℓ, le groupe $\mathbf{R}_\ell$ possède un unique sous-groupe de cardinal m : il est cyclique et c'est le noyau ${}_m\mathbf{R}_\ell$ de la multiplication par m ; et c'est aussi l'image par τ du sous-groupe $(1/m)\mathbf{Z}[1/\ell]$ de $\mathbf{Q}$.*

Preuve. Soit $x = q + r$ un élément de m-torsion dans $\mathbf{R}_\ell$, i.e. vérifiant $mx = 0$, pour un $m > 0$ de $\mathbf{N}$. De l'égalité $mx = mq + mr = 0$ dans $\mathbf{R}_\ell$, nous concluons :

$$mq = -mr \in \mathbf{Z}[1/\ell],$$

disons :

$$mq = -mr = n/\ell^a \text{ avec } n \in \mathbf{Z} \text{ et } a \in \mathbf{N} \ ;$$

ce qui montre que $q = -r$ est un nombre rationnel. En d'autres termes, l'application :

$$\tau \quad | \quad \mathbf{Q} \ni s \mapsto s - s \in \mathbf{R}_\ell,$$

qui à un rationnel s associe la classe du couple $(s, -s)$ dans $\mathbf{R}_\ell$, est un épimorphisme du groupe additif $\mathbf{Q}$ sur le sous-groupe de torsion $\mathbf{R}_\ell^{tor}$. Comme son noyau est clairement $\mathbf{Z}[1/\ell]$, nous obtenons par passage au quotient l'isomorphisme annoncé :

$$\mathbf{R}_\ell^{tor} \simeq \mathbf{Q}/\mathbf{Z}[1/\ell].$$

En particulier, pour tout m étranger à ℓ, le sous-groupe de m-torsion de $\mathbf{R}_\ell$ est le groupe cyclique :

$${}_m\mathbf{R}_\ell = \tau((1/m)\mathbf{Z}[1/\ell]) \simeq (1/m)\mathbf{Z}[1/\ell]/\mathbf{Z}[1/\ell] \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Enfin, la densité de $\mathbf{R}_\ell^{tor}$ dans $\mathbf{R}_\ell$ résulte de celle de $\mathbf{Q}$ dans le produit $\mathbf{Q}_\ell \times \mathbf{R}$.

Corollaire 012. *Le sous-groupe de torsion $\mathbf{R}_\ell^{tor}$ ne possédant pas d'élément d'ordre ℓ, il suit en particulier que $\mathbf{R}_\ell$ lui-même est* uniquement ℓ*-divisible, i.e. que l'on a :*

$$\forall x \in \mathbf{R}_\ell \quad \exists!\ y \in \mathbf{R}_\ell \quad x = \ell y.$$

On retrouve là le fait que $\mathbf{R}_\ell$ est naturellement un module sur l'anneau $\mathbf{Z}[1/\ell]$.

Intéressons nous maintenant aux sous-groupes *compacts* de $\mathbf{R}_\ell$.

Il est bien connu que les sous-groupes fermés G de $\mathbf{R}$ autres que $\mathbf{R}$ lui-même, sont discrets et de la forme $a\mathbf{Z}$ pour un a de G. Il en résulte que

les sous-groupes fermés du tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, autres que $\mathbf{T}$ lui-même, sont les sous-groupes cycliques discrets $\mathbf{T}_m = (1/m)\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, pour $m \geq 1$.

D'un autre côté, on sait que les sous-groupes fermés de $\mathbf{Q}_\ell$, autres que $\mathbf{Q}_\ell$ lui-même, sont le sous-groupe nul, qu'il est commode d'écrire $\ell^\infty\mathbf{Z}_\ell$, et les groupes compacts $\ell^a\mathbf{Z}_\ell$, pour $a \in \mathbf{Z}$, lesquels sont isomorphes à $\mathbf{Z}_\ell$. Ces sous-groupes ne sont plus *algébriquement* monogènes, comme dans le cas réel (ils ne sont pas isomorphes $\mathbf{Z}$), mais le restent *topologiquement* (car fermetures respectives de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$).

Théorème 013. *Les sous-groupes compacts du groupe topologique* $\mathbf{R}_\ell$ *sont :*

(i) Les sous-groupe triviaux : le sous-groupe nul 0 *et le groupe* $\mathbf{R}_\ell$ *lui-même.*

(ii) Les sous-groupes finis ${}_m\mathbf{R}_\ell$ *de* $\mathbf{R}_\ell^{tor}$*, cycliques d'ordre* m *étranger à* ℓ*.*

(iii) Les sous-groupes compacts $\ell^a\mathbf{Z}_\ell$ *de* $\mathbf{Q}_\ell$*, procycliques et isomorphes à* $\mathbf{Z}_\ell$*.*

(iv) Les produits ${}_m\mathbf{R}_\ell \times \ell^a\mathbf{Z}_\ell$*, avec* ℓm *et* $a \in \mathbf{Z}$*, lesquels sont procycliques donc topologiquement monogènes.*

Preuve. Soit donc G un sous-groupe fermé non trivial de $\mathbf{R}_\ell$ et $G_\ell = G \cap \mathbf{Q}_\ell$ son intersection avec $\mathbf{Q}_\ell$.

Le sous-groupe G_ℓ n'est pas dense de $\mathbf{Q}_\ell$, puisqu'il serait alors dense dans $\mathbf{R}_\ell$, ce qui entraînerait $G = \mathbf{R}_\ell$, contrairement à l'hypothèse. C'est donc que nous avons $G_\ell \subset \ell^b\mathbf{Z}_\ell$ pour un b de $\mathbf{Z}$. Et comme la topologie sur le groupe compact $\ell^b\mathbf{Z}_\ell$ est induite aussi bien par celle de $\mathbf{Q}_\ell$ que par celle de $\mathbf{R}_\ell$, il suit de là que G_ℓ est un sous-groupe compact de $\ell^b\mathbf{Z}_\ell$. En fin de compte, nous avons donc soit $G_\ell = \{0\}$, soit $G_\ell = \ell^a\mathbf{Z}_\ell$ pour un a de $\mathbf{Z}$. Examinons successivement ces deux éventualités :

(i) Si G_ℓ est nul, le groupe G rencontre trivialement $\mathbf{Z}_\ell$ de sorte que la restriction à G de la projection canonique π de $\mathbf{R}_\ell$ sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}_\ell/\mathbf{Z}_\ell$ est un isomorphisme de G sur $\pi(G)$. Le groupe G s'identifie alors à un sous-groupe fermé de $\mathbf{T}$, c'est à dire soit à $\mathbf{T}$ lui-même, soit à l'un de ses sous-groupes finis $\mathbf{T}_m$. Mais, si $\pi(G)$ était égal à $\mathbf{T}$, la représentation standard des éléments de G ferait intervenir toutes les parties fractionnaires possibles ; de sorte que G contiendrait en particulier un élément de la forme $z + 1/\ell$ avec $z \in \mathbf{Z}_\ell$ et $1/\ell \in [0, 1[$, que nous pouvons aussi bien écrire $(z + 1/\ell) + 0$

avec $z + 1/\ell \in \mathbf{Q}_\ell \setminus \{0\}$, puisque $1/\ell$ est dans $\mathbf{Z}[1/\ell]$, ce qui est exclu, G étant supposé renconter trivialement $\mathbf{Q}_\ell$. Il suit donc : $\pi(G) = \mathbf{T}_m$ pour un $m \geq 1$, comme annoncé. Ainsi G est alors fini, et c'est le sous-groupe de m-torsion ${}_m\mathbf{R}_\ell$.

(*ii*) Si G_ℓ n'est pas nul, nous avons $G_\ell = \ell^a\mathbf{Z}_\ell$ pour un a de $\mathbf{Z}$; écrivons :

$$\mathbf{R}_\ell = \ell^a\mathbf{Z}_\ell \oplus [0, \ell^a[,$$

et π_a la projection canonique de $\mathbf{R}_\ell$ sur le quotient $\mathbf{R}_\ell/\ell^a\mathbf{Z}_\ell \simeq \mathbf{R}/\ell^a\mathbf{Z} \simeq \mathbf{T}$. Ici encore, l'image $\pi_a(G)$ est un sous-groupe compact de $\mathbf{T}$, et ce n'est pas $\mathbf{T}$ car le groupe G contiendrait alors en particulier un élément de la forme $z + \ell^{-(a+1)}$, pour un z de $\ell^a\mathbf{Z}_\ell$, c'est dire $(z + \ell^{-(a+1)}) + 0$, avec $z + \ell^{-(a+1)} \in G_\ell \setminus \ell^a\mathbf{Z}_\ell$, ce qui est absurde. Ainsi donc, l'image $\pi_a(G)$ est cyclique d'ordre, disons, m ; de sorte que dans la décomposition ci-dessus de $\mathbf{R}_\ell$, le sous-groupe G est donné par :

$$G = \ell^a\mathbf{Z}_\ell \oplus \{0, \ell^a/m, \ldots, (m-1)\ell^a/m\}.$$

En fin de compte, G est alors le produit direct du sous-groupe compact $\ell^a\mathbf{Z}_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell$ et du sous-groupe fini $\ell^a({}_m\mathbf{R}_\ell) = {}_m\mathbf{R}_\ell$. Il suit de là que m n'est pas un multiple de ℓ et que G n'est autre que la préimage de $\ell^a\mathbf{Z}_\ell$ par la multiplication par m :

$$G = \tfrac{1}{m}\,\ell^a\mathbf{Z}_\ell := \{x \in \mathbf{R}_\ell \mid mx \in \ell^a\mathbf{Z}_\ell\}.$$

En particulier :

Corollaire 014. *Les sous-groupes fermés infinis de $\mathbf{R}_\ell$ sont $\mathbf{R}_\ell$ et les préimages de $\mathbf{Z}_\ell$ dans les multiplications par les éléments de $\mathbf{Z}[1/\ell]$.*

Corollaire 015. *Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}_\ell$ sont les sous-groupes finis ${}_m\mathbf{R}_\ell$.*

Preuve. Un tel sous-groupe est fermé donc compact et, par conséquent, fini.

Corollaire 016. *Soit $G = \mathbf{Z}\,x$ un sous-groupe monogène non nul de $\mathbf{R}_\ell$. Alors :*

(i) Si x est d'ordre m dans $\mathbf{R}_\ell^{tor}$, G est le groupe cyclique discret ${}_m\mathbf{R}_\ell$.

(ii) Si x s'écrit $\zeta + q$ avec ζ d'ordre m dans $\mathbf{R}_\ell^{tor}$ et $q \neq 0$ dans $\mathbf{Q}_\ell$, de ℓ-valuation $a \in \mathbf{Z}$, le goupe G est dense dans le produit direct du groupe cyclique discret ${}_m\mathbf{R}_\ell$ et du groupe compact infini $\ell^a\mathbf{Z}_\ell$.

(iii) Enfin, si x n'est pas dans $\mathbf{R}_\ell^{tor} + \mathbf{Q}_\ell$, le sous-groupe G est dense dans $\mathbf{R}_\ell$.

Preuve. Cela résulte de la classification des sous-groupes fermés de $\mathbf{R}_\ell$ donnée par le Théorème : si G n'est pas dense dans $\mathbf{R}_\ell$, sa fermeture $\overline{G}$ est alors un sous-groupe propre compact de $\mathbf{R}_\ell$, ce qui montre que x s'écrit alors $\zeta + q$, avec ζ dans $\mathbf{R}_\ell^{tor}$ et q dans $\mathbf{Q}_\ell$. Soit alors m l'ordre de ζ et $a \in \overline{\mathbf{Z}}$ la ℓ-valuation de q.

(i) Si q est nul, G est évidemment le groupe cyclique discret ${}_m\mathbf{R}_\ell$.

(ii) Sinon, G contient $\mathbf{Z}\, mq$, qui est dense dans $\ell^a\mathbf{Z}_\ell$, d'où le résultat annoncé.

4. Endomorphismes de $\mathbf{R}_\ell^{tor}$ et dualité de Pontrjagin.

Considérons maintenant le dual de Pontrjagin du groupe $\mathbf{R}_\ell$, i. e. le groupe

$$\widehat{\mathbf{R}}_\ell = Hom_{\text{cont}}(\mathbf{R}_\ell, \mathbf{T})$$

des morphismes continus de $\mathbf{R}_\ell$ dans le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{R}_\ell/\mathbf{Z}_\ell$.

Si $\chi \in \widehat{\mathbf{R}}_\ell$ est un caractère continu sur $\mathbf{R}_\ell$, son image $Im\chi$ est alors un sous-groupe compact du tore $\mathbf{T}$ et son noyau $Ker\chi$ un sous-groupe compact de $\mathbf{R}_\ell$.

Si χ n'était pas surjectif, son image $Im\chi$ serait un sous-groupe fini $\mathbf{T}_m$ du tore $\mathbf{T}$, et il suivrait :

$$(\mathbf{R}_\ell : Ker\chi) = \mid Im\chi \mid = m,$$

contrairement à la classification des sous-groupes fermés de $\mathbf{R}_\ell$ donnée plus haut.

Ainsi χ est surjectif, son image $Im\chi = \mathbf{T}$ est connexe par arcs ; et comme $\mathbf{R}_\ell$ ne l'est pas, son noyau $Ker\chi$ est non donc trivial. Or s'il était fini, nous aurions :

$$\mathbf{T} = Im\chi \simeq \mathbf{R}_\ell/{}_m\mathbf{R}_\ell \simeq \mathbf{R}_\ell,$$

ce qui est encore exclu, pour des raisons de connexité par arcs. Il vient donc :

$$Ker\chi = \tfrac{1}{m}\,\ell^a\mathbf{Z}_\ell, \text{ pour un } a \text{ de } \mathbf{Z} \text{ et un } m \geq 1,$$

d'où, par factorisation, le diagramme commutatif où toutes les flêches sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_\ell/\frac{1}{m}\ell^a\mathbf{Z}_\ell & \xrightarrow{\overline{\chi}} & \mathbf{R}_\ell/\mathbf{Z}_\ell \simeq \mathbf{T} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi} & \nearrow & \\ \mathbf{R}_\ell/\mathbf{Z}_\ell \simeq \mathbf{T} & & \end{array}$$

Dans celui-ci l'isomorphisme ϕ est induit par la multiplication par l'élément m/ℓ^a de $\mathbf{Z}[1/\ell]$; et comme le groupe des automorphismes du tore $\mathbf{T}$ se réduit à $\{\pm 1\}$, il suit de là que le caractère χ est induit par la multiplication par $\pm m/\ell^a$.

En d'autres termes, nous avons donc :

Théorème 017. *Le groupe $\widehat{\mathbf{R}}_\ell = Hom_{\mathrm{cont}}(\mathbf{R}_\ell, \mathbf{T})$ des caractères continus de $\mathbf{R}_\ell$ s'identifie au groupe additif discret $\mathbf{Z}[1/\ell]$.*

Remarque. La suite exacte courte canonique de modules discrets :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\hat{\pi}} \mathbf{Z}\,[1/\ell] \xrightarrow{\hat{\imath}} \mathbf{T}_{\ell^\infty} = \mathbf{Z}\,[1/\ell]\,\mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

peut ainsi être regardée comme duale de la suite exacte courte de modules compacts :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{\iota} \mathbf{R}_\ell \xrightarrow{\pi} \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Corollaire 018. *Les endomorphismes continus non triviaux du groupe topologique $\mathbf{R}_\ell$ sont les applications ϕ :*

$$x \mapsto \pm m/\ell^\nu\, x \quad \textit{avec} \quad \pm m/\ell^\nu \in \mathbf{Z}[1/\ell].$$

En d'autres termes, ce sont les homothéties pour sa structure de $\mathbf{Z}[1/\ell]$-module.

En particulier, l'image de ϕ est $\mathbf{R}_\ell$ et son noyau le sous-groupe fini ${}_m\mathbf{R}_\ell$.

Preuve. Soit ϕ un endomorphisme continu non nul du groupe topologique $\mathbf{R}_\ell$. Puisque $\mathbf{R}_\ell$ est uniquement ℓ-divisible, ϕ est en particulier un $\mathbf{Z}[1/\ell]$-morphisme.

Or, d'un côté, l'image $\phi(\mathbf{R})$ du sous-groupe connexe par arcs $\mathbf{R}$ est alors un sous-groupe connexe par arcs (donc contenu dans $\mathbf{R}$) et il est non nul (sans quoi ϕ serait nul sur un sous-groupe dense) ; de sorte qu'il vient : $\phi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Posant $\rho = \phi(1) \in \mathbf{R}$, nous concluons que $\phi(z)$ coïncide avec ρz pour tout $z \in \mathbf{Z}[1/\ell]$.

Et d'un autre côté, le compositum $\chi = \pi \circ \phi$ de ϕ avec la surjection canonique π de $\mathbf{R}_\ell$ sur $\mathbf{T}$ est alors un caractère continu de $\mathbf{R}_\ell$, donc de la forme : $x \mapsto \rho_0 x$ modulo $\mathbf{Z}_\ell$, pour un $\rho_0 \in \mathbf{Z}[1/\ell]$, en vertu du théorème ci-dessus.

Rassemblant ces deux résultats, nous obtenons $(\rho - \rho_0)z \in \mathbf{Z}_\ell$ pour tout $z \in \mathbf{Z}[1/\ell]$; d'où, comme attendu : $\rho = \rho_0 \in \mathbf{Z}[1/\ell]$. Et ϕ, qui coïncide avec la multiplication par ρ sur la partie dense $\mathbf{Z}[1/\ell]$, est l'homothétie de rapport ρ.

Scolie 019. *Avec les conventions d'écriture données dans la section 1, la préimage d'un réel-ℓ-adique $x = q + r$ de $\mathbf{R}_\ell$ (avec $q \in \mathbf{Q}_\ell$ et $r \in \mathbf{R}$) par l'endomorphisme ϕ : $z \mapsto \pm m/\ell^a\, z$ est formée des m éléments :*

$$x_k = \pm\Big((q\ell^\nu + k)/m + (r\ell^\nu - k)/m\Big), \text{ pour } k = 1, \cdots, m-1.$$

Remarque. La construction du compactifié de $\mathbf{R}$ peut bien évidemment être menée en prenant simultanément plusieurs nombres premiers $\ell_1, \cdots, \ell_n$. L'exemple le plus éclairant eu égard à la numération usuelle, est ainsi celui du compactifié décimal $\mathbf{R}_{10}$, *i.e.* du produit amalgamé de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{Q}_{10} = \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_5$ au-dessus de l'anneau des décimaux $\mathbf{D} = \mathbf{Z}[1/10]$. Dans ce cas, les endomorphismes continus du groupe $\mathbf{R}_{10}$ sont les homothties pour sa structure de $\mathbf{D}$-module.

Bien entendu, il est aussi possible de faire intervenir simultanément toutes les places de $\mathbf{Q}$. Dans ce cas, le groupe obtenu $\widehat{\mathbf{R}}$, qui est le produit amalgamé de $\mathbf{R}$ et de $\widehat{\mathbf{Q}} \simeq \prod_\ell \mathbf{Q}_\ell$ au-dessus de $\mathbf{Q}$, s'identifie au dual de Pontrjagin de $\mathbf{Q}$.

5. Appendice : lien avec le solénoïde ℓ-adique

Pour étudier la dynamique d'une application continue f sur un espace topologique X, il est classique d'introduire la limite du système projectif :

$$Y = \varprojlim \left(X \xleftarrow{f} X \xleftarrow{f} X \xleftarrow{f} \ldots \right)$$

défini par les itérées de f (*cf. e.g.* [4], Ch. 11). Dans le cas particulier où X est le cercle unité $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ du plan complexe, et f l'application $z \mapsto z^\ell$, l'espace obtenu est le *solénoïde ℓ-adique* :

$$S_\ell = \{(y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{U}^{\mathbf{N}} \mid y_n = y_{n+1}^\ell \quad \forall n \in \mathbf{N}\}.$$

Maintenant, en identifiant le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ au cercle unité $\mathbf{U}$ via l'application exponentielle $t \mapsto \exp(2i\pi t)$, on obtient l'isomorphisme de groupes topologiques :

$$S_\ell \simeq \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{T}^{\mathbf{N}} \mid x_n = \ell x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N}\}.$$

Et, sous cette dernière forme, il est aisé de reconnaitre le compactifié $\mathbf{R}_\ell$ de $\mathbf{R}$ défini plus haut :

Proposition 020. *L'application qui à un réel-ℓ-adique $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\ell^n \in \mathbf{R}_\ell$ associe la famille des troncatures $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k\ell^{n-k} + \mathbf{Z} \in \mathbf{T}$, composée avec l'exponentielle complexe $t \mapsto \exp(2i\pi t)$, réalise un isomorphisme de groupes topologiques φ du compactifié $\mathbf{R}_\ell$ de $\mathbf{R}$ sur le solénoïde ℓ-adique S_ℓ.*

$$\varphi \ : \ \mathbf{R}_\ell \ni x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\ell^n \mapsto \Big(\exp\Big(2i\pi \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k\ell^{k-n}\Big)\Big)_{n\in\mathbf{N}} \in S_\ell$$

Preuve. Observons que φ prend bien ses valeurs dans la limite projective $S_\ell \subset \mathbf{U}^{\mathbf{N}}$ et que c'est un morphisme de groupes. La condition de projectivité $x_n = \ell x_{n+1}$ montre que les chiffres a_k (pour $k \in \mathbf{Z}$) associés à une famille cohérente $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{T}^{\mathbf{N}}$ sont bien définis et qu'ils sont uniques ; en d'autres termes que φ est bijective. Enfin, il est clair que φ est continue pour les topologies naturelles de $\mathbf{R}_\ell$ et de S_ℓ , donc bicontinue puisque les espaces de départ et d'arrivée sont compacts, $\mathbf{R}_\ell$ d'après le théorème 7 et S_ℓ par le théorème de Tychonov.

On retrouve ainsi le fait que le compactifié ℓ-adique $\mathbf{R}_\ell$ est connexe mais non connexe par arcs, plus précisément qu'il est localement isomorphe comme tout solénoïde au produit d'un espace euclidien (en l'occurrence $\mathbf{T}$) et d'un espace totalement discontinu (en l'occurrence $\mathbf{Z}_\ell$) ; ce qu'affirme explicitement le Lemme de représentation donné dans la section 1 (Th. 2).

Coda. Donnons pour conclure quelques illustrations simples de cette interprétation arithmétique du solénoïde ℓ-adique :

(i) Transporté par φ le plongement canonique $x \mapsto 0 + x$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_\ell$, introduit dans la section 1, devient le morphisme continu et injectif

$$x \mapsto (\exp((2i\pi x/\ell^n))_{n\in\mathbf{N}},$$

de $\mathbf{R}$ dans S_ℓ usuellement considéré en analyse harmonique (*cf. e.g.* [5]) ou en théorie des probabilités (*cf. e.g.* [6]).

(ii) L'étude algébrique des endomorphismes continus de $\mathbf{R}_\ell$ effectuée dans la section 4 montre directement que le noyau $Ker\phi$ d'un tel endomorphisme est toujours d'ordre étranger à ℓ ; ceci généralise notamment le résultat d'imparité donné dans [1] dans le cas $\ell = 2$.

(iii) La représentation explicite des *racines n-ièmes* d'un élément $\varphi(x)$ du solénoïde p-adique proposée dans [2] peut s'obtenir en transportant par φ les points de n-division de x dans $\mathbf{R}_\ell$:

- si le réel-ℓ-adique x s'écrit $x = q + r$ avec $q \in \mathbf{Z}_\ell$ et $r \in \mathbf{R}$, et si n est étranger à ℓ, ce sont les images par φ des n points de n-division de x définis par $x_k = (q + k)/n + (r - k)/n$, pour $k = 1, \cdots, n-1$, avec les conventions d'écriture expliquées dans la section 1 ;
- si n s'écrit $n = m\ell^\nu$ avec ℓm, ce sont les images des m points distincts $x_k = (q\ell^{-\nu}+k)/m+(r\ell^{-\nu}-k)/m$, pour $k = 1, \cdots, m-1$, puisque le groupe additif $\mathbf{R}_\ell$ est *uniquement* ℓ-divisible.

Remerciements. L'auteur remercie tout particulièrement C. Deninger (Munster) et H.W. Lenstra (Leiden) pour leurs commentaires éclairants sur la version préliminaire de ce travail.

Références

[1] J. M. Aarts & R. J. Fokkink, *Mappings on the dyadic solénoïde*, Comment. Math. Univ. Carolinae **44**, pp. 697–699, (2003).

[2] P. Becker-Kern, *Explicit representation of roots on p-adic solénoïde and non-uniqueness of embeddability into rational one-parameter subgroups*, Proc. Indian Acad. Sci. (àparaître).

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique - Algbre commutative*, Hermann (1964).

[4] A. Candel & L. Conlon, *Foliations* I, Graduate Studies in Math. **23** (2000).

[5] E. Hewitt & K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis* I, Springer (1963).

[6] H. Heyer, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer (1977).

[7] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag (2002).

[8] K. Mahler, *Introduction to p-adic Numbers and their functions*, Cambridge University Press (1981).

[9] L. Schwartz, *Topologie et Analyse fonctionnelle*, Hermann (2000).

Jean-François Jaulent
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
Francia
e-mail : jaulent@math.u-bordeaux1.fr