DOI: 10.22199/S07160917.1982.0002.00009

INTRODUCCIÓN A LA TEORIA DE JUEGOS

ARNOLDO PRADO CAMPOS

INTRODUCCIÓN.

La teoría cuyos fundamentos se exponen, aborda el problema (cuando es posible) de la determinación de la mejor "decisión" que puede adoptar un analista cuando se ve enfrentado a la incertidumbre sobre el resultado de su acción. El marco referencial incluye los siguientes elementos:

- Conjunto de analistas con intereses en conflicto.

- Conjunto de espacios de acciones o estrategias a disposición de cada analista.

- Conjunto de reglas de decisión a disposición de cada analista.

- Conjunto de consecuencias de cada decisión.

A este marco referencial hay que agregar la presencia de un conjunto de condiciones externas al proceso de decisión y un criterio de racionalidad, válido para cada analista; en general, se supone que un analista procura optimizar su decisión.

En este contexto se inscribe la teoría de juegos. Ciertamente las especificaciones de cada elemento constitutivo originará las distintas situaciones particulares o tipos generales de juego.

Los criterios clasificadores, en forma no exhaustiva, son los siguientes:

- Según el número de jugadores, pueden existir juegos bipersonales, juegos n-personales y juegos contra la naturaleza. Es posible concebir un juego unipersonal pero ciertamente no ofrece ningún interés teórico.

- Según el número de veces que puede decidir cada analista existen juegos monoetápicos y multietápicos.

- Según el número de alternativas para decidir, los juegos se clasifican en infinitos y finitos.

- En fin, en este orden general de ideas, son muchas las posibilidades de clasificación. Sin embargo, desde el orden de las estructuras, los juegos pueden ser de tres tipos o formas: forma extensiva, forma normal y forma según una función característica. Las definiciones de estas formas se presentarán en los párrafos siguientes.

<u>Forma extensiva</u>: Comprende los siguientes elemen-

tos constitutivos:

- $\{1, \ldots., n\}$ conjunto de jugadores a los cuales se agrega el "jugador azar".

- Un conjunto de puntos, denominados vértices, nodos o posiciones del juego.

- Una participación de los vértices en conjuntos S_o, $S_1, \ldots, S_n$ denominados conjuntos de vértices de los jugadores para $i = 1, 2, \ldots n$. S_o se denomina conjunto de vértices del azar.

- Particiones de los conjuntos $S_i\,(i \neq 0)$, en subconjuntos S_i^j, llamados conjuntos de información.

- Una asignación de probabilidad sobre los nodos o vértices siguientes a los vértices del conjunto S_o.

- Una función definida para conjuntos S_i^j que asigna a cada vértice de S_i^j uno de los vértices siguientes.

La forma como estos elementos constitutivos especifican los juegos extensivos requiere algunas precisiones y nuevos elementos:

1. Un vértice distinguido, llamado punto de inicio del juego.

2. Un conjunto de vértices, llamados terminales del juego.

3. Una relación de precedencia para los vértices, de modo que el punto de inicio no es precedido por ningún vértice y los puntos terminales no son precedentes de otros vértices. La relación de precedencia es un orden transitivo simple.

- Un conjunto de pares de vértices consecutivos denominados arcos o alternativas.

Con estos conceptos básicos se caracterizan los siguientes conceptos generales:

- Jugada es una sucesión de arcos con punto inicial el punto de inicio y punto final, un punto terminal y de modo que cada vértice tiene un único precesor.

- Cada jugada tiene en común a lo sumo un vértice con cada conjunto de información.

- Cada vértice de un conjunto de información específico tiene el mismo número de arcos. No hay vértices consecutivos en cada conjunto de información. Una elección es un conjunto de arcos, uno por cada vértice de un conjunto de información.

- Cada vértice terminal tiene asignado un vector $n-$dimensional con componentes reales. Se denomina vector de pagos, y cada componente el pago correspondiente al jugador del mismo orden en la $n-$upla. Se llama función de pago del jugador i a la función que asigna a cada terminal el pago correspondiente al jugador i.

- Para cada jugador una estrategia es una función que asigna a cada conjunto de información, una elección. El espacio de estrategias del jugador i se anota $\sum_i = \{\sigma_i\}$.

- Un resultado de un juego es el par formado por un vértice terminal y el vector de pagos asociado.

- Si P_o es una distribución de probabilidad sobre las posibles elecciones para los vértices de los conjuntos del azar, entonces se denomina pago esperado por un jugador i a la esperanza de su función de pago con respecto a esa distribución y para $n-$uplas de estrategias σ_j $(j = 1, \ldots, n)$. Se anota $\pi_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Forma normal de un juego extensivo. Se denomina así a la

Función definida por el conjunto de pares de la forma $(\sigma^{(j)}, \pi^{(j)})$ donde $\sigma^{(j)}$ es una $n-$upla genérica cuyas componentes son en orden respectivo, estrategias de los jugadores y $\pi^{(j)}$el correspondiente vector de pagos esperados. Obviamente la forma normal se podrá disponer en un arreglo rectangular $n-$dimensional definido por el espacio producto $\sum_1 x \sum_2 - \sum_n$ donde cada celda del arreglo es el vector de pagos esperados.

Así por ejemplo para el caso finito, es decir cuando la "longitud" de cada jugada es finita, con $n = 2$, el arreglo consistirá en tantas filas como estrategias disponga un jugador y tantas columnas como las que disponga su contrincante. Cada celda de este arreglo es un vector bidimensional.

<u>Juegos extensivos con información perfecta</u>. Se dirá que un juego es de <u>información perfecta</u> cuando cada conjunto de información consta de un solo vértice. Ciertamente un juego puede no ser de información perfecta y sin embargo algunos jugadores pueden disponer de una información perfecta.

Es claro que en el caso de información perfecta, cada estrategia se puede caracterizar mediante un conjunto de arcos elegidos, cada uno, para cada conjunto de información.

Algunas veces se dice que los conjuntos que constan de in sólo vértice son "<u>elegibles</u>". Es deseable que en un juego los conjuntos del azar sean elegibles, pues en tal caso del proceso de aleatorización conduce a resultados con mucho mayor sentido intuitivo.

Kuhn el año 53 introdujo el concepto de recordación perfecta, para caracterizar analíticamente la posibilidad de que un jugador recuerde exactamente lo que realizó con anterioridad. Formalmente esto se expresa de la siguiente forma: si u y v son conjuntos de información de un jugador i, entonces los vértices de v son exactamente los sucesores de los vértices de u para una misma elección.

Ahora si se supone que el criterio de racionalidad de los jugadores comprende también la capacidad de recordar exactamente todo el desarrollo del juego en cada instante en que decide, entonces todo juego es de recordación perfecta. Por otro lado, implícita en la idea de recordación perfecta, subyace la idea de un dinamismo en el juego, de modo que el jugador no decide a priori toda su gama de elecciones sino que procede en cada conjunto de información a decidir su elección. Si bien es cierto que de no existir recordación perfecta, en un juego con este dinamismo, cada jugador no sabe en cual vértice de sus conjuntos de información se encuentra en cada instante, sólo sabe que está en él, pero no exactamente en qué vértice.

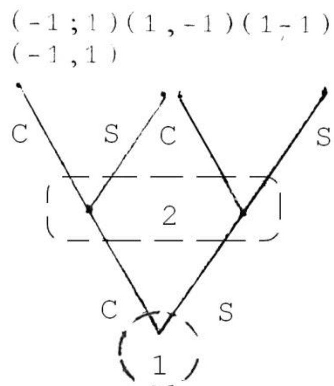
Puntos de equilibrios para la forma normal. La hipótesis de racionalidad supone que cada jugador trata de optimizar el resultado del juego y el modo de lograrlo es a través de la elección de una estrategia óptima considerando para ello todos los intereses en conflicto. Estas ideas conducen a la siguiente definición general.

Definición: Sean $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*$ la n-upla de estrategias elegidas, cada una, por el respectivo jugador, tal que se cumple que:

$(\forall i)\ (\forall\, \sigma_i\, \mathcal{E} \sum_i)\ \left(n_i\,(\sigma_1^*, \ldots\,,\ \sigma_i^*, \ldots,\ \sigma_n^*\ \geq\ \pi_i\,(\sigma_1^*\,, \ldots\,,\ \sigma_i ..\ \sigma_n^*)\right)$

entonces $\sigma_1^*,\ \sigma_2^*, \ldots, \sigma_1^* \ldots\ \sigma_n^*$ se dirá que es un <u>punto de equilibrio</u> en estrategias "puras".

Es posible mostrar algunos ejemplos en los cuales no existe un punto de equilibrio. Así en el juego de par y non:



1 \ 2	C	S
C	(-1 , 1)	(1 , -1)
S	(1, -1)	(-1 , 1)

C	C	-1	1
C	S	1	-1
S	C	1	-1
S	S	-1	1

Así pues en general no se puede garantizar la existencia de puntos de equilibrio sin embargo, en algunas situaciones particulares si existen. El teorema siguiente así lo prueba.

<u>Teorema</u>: Si un juego es de información perfecta siempre existe al menos un punto de equilibrio.

La demostración de esta proposición se basa en la descomponibilidad de un juego con información perfecta en subjuegos y en la propiedad que tienen los puntos de equilibrio de estos subjuegos de extenderse, bajo ciertas condiciones, a punto de equilibrio del juego original.

JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CERO Y EL TEOREMA DE MINIMAX

INTRODUCCION.

Los comienzos de la teoría de juegos se remontan a principios de este siglo y al parecer fue Emil Borel en el año 1923 quien formalizó algunos aspectos de los fundamentos vigentes a la fecha. Posteriormente John von Neumann y Oscar Morgenstern, en la obra "Teoría de Juegos y Comportamiento Económico", del año 1944, estructuró definitivamente la teoría de los juegos bipersonales de suma cero; enunció y demostró el teorema fundamental de la teoría, conocido como el teorema del minimax; asentó las bases de los juegos cooperativos y definió los juegos en la forma de funciones características. Todo estos conceptos con el transcurso de los años se han enriquecido y diversificado. En este sentido las contribuciones de Nash, Finetti, Harsanyi, Aubin, Shapley, Pareto y otros han marcado hitos en el desarrollo de la teoría.

Definición. Un juego bipersonal se dice que es de suma cero si $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = -\pi_2(\sigma_1, \sigma_2), \forall (\sigma_1, \sigma_2)\, \varepsilon \sum_1 \times \sum_2$. Si el juego es finito entonces el juego queda bien caracterizado por una matriz de orden $m \times n$, donde m y n son los números de estrategias a disposición de cada jugador. Los elementos de la matriz, anotados a_{ij}, representan el pago del jugador I cuando él elige la estrategia i y II elige la estrategia j. Obviamente el pago de II será $-a_{ij}$.

Punto de silla. El valor a^*_{ij} (o valores) se dirá que es un punto de silla si y sólo si

$$a^*_{ij} = \min_j (a_{ij}) \text{ y } a^*_{ij} = \max_i (a_{ij})$$

Es evidente que si existe un punto de silla entonces el par de extrategias (σ_1^*, σ_2^*) correspondiente al valor a_{ij^*}, es un punto de equilibrio. Pues, si las estrategias del jugador I se escriben genéricamente i y las de II, j, entonces se tiene:

$\pi_1(i^*, j^*) = a_i^* *_j * = \min_j (a_{i*j}) = \max_i (a_{ij*})$. Luego i^* es óptima para el jugador I frente al a estrategia j^* de II. Análogamente:

$\pi_2(i^*, j^*) = -a_i^* *_j * = -\min_j (a_{i*j}) = \max_i (a_{i*j})$. Es decir, j^*, es óptima para II frente a la estrategia i^* de I.

Estrategia mixta. Se puede mostrar mediante ejemplos que no siempre existe un punto de silla. Por ejemplo el juego cuya matriz es: $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, no tiene ningún elemento que sea simultáneamente el menor de su fila y el máximo de su columna. Sin embargo, introduciendo un proceso de aleatorización sobre los conjuntos de estrategias de cada jugador siempre existe una distribución de probabilidad óptima en el sentido del punto de equilibrio, ciertamente, ahora definido para los pagos esperados.

Definición: Se denomina estrategia mixta del jugador i a un conjunto de números no negativos, uno por cada extrategia pura disposición del jugador y tal que la suma de ellos es uno. Así pues, si el jugador 1 cuenta con las estrategias $\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_m$ y el jugador 2 con las estrategias $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ entonces las estrategias mixtas respectivas son los elementos de los simplex euclidianos:

$P_1 = \{ p \mid p = (p_1, \dots p_m), p_k \geq 0, \sum_{k=1}^{m} p_k = 1 \}$ y,

$P_2 = \{ q \mid q = (q_1, \dots q_n), q_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} q_k = 1 \}$

<u>Teorema</u>: Sea $G = (\Sigma_1, \Sigma_2 ; \pi)$ un juego bipersonal de suma cero, finito. Sea $G' = (P_1, P_2 ; \pi')$ el juego definido como extensión de G mediante la extensión de π al espacio P_1 x P_2 con la convención que identifica las estrategias puras σ_{1k} co el vector $e_k = (0, \dots, 1, \dots 0) \varepsilon \mathbb{R}^m$ y σ_{2h} con el vector $\sigma_{2h} = (0, \dots, 1, \dots 0) \varepsilon \mathbb{R}^n$. Donde la extensión π' es, $\pi'(p,q) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{h=1}^{n} \pi(\sigma_{1k}, \sigma_{2h}) P_k q_h$.

En estas condiciones existe un punto de equilibrio en estrategias mixtas.

Este enunciado es un caso particular de un teorema de Nash (1950) para cualquier número de jugadores y funciones de pagos π' distintas; el cual establece la existencia de un punto[i] de equilibrio en estrategias mixtas, a través de la demostración de la existencia de un punto fijo.

Es claro que π y π' pueden anotarse, con la salvedad indicada, con el mismo símbolo π.

Así pues, si p^* y q^* son coordenadas de un punto de equilibrio se debe cumplir que

$$\pi(p^*, q^*) \geq \pi(p, q^*) \quad \forall p \, \varepsilon \, P_1 \text{ y}$$

$$\pi(p^*, q^*) \leq \pi(p^*, q) \quad \forall p \, \varepsilon \, P_2$$

o bien para $\forall (p, q) \, \varepsilon \, P_1 \text{ x } P_2$ se tendrá:

$$\boxed{\pi(p, q^*) \leq \pi(p^*, q^*) \leq \pi(p^*, q)}$$

Esta situación particular constituye una de las versiones del teorema más relevante de la teoría de juegos bipersonales de suma cero, el teoream del minimax. Con este nombre fue enunciado y demostrado por J. von Neumann en la obra ya citada, "Teoría de Juegos y Comportamiento Económico".

Teorema del minimax. Sea $G = (P_1, P_2, \mathrm{A})$ un juego bipersonal de suma cero, con espacios de estrategias mixtas P_1 y P_2 y matriz de pagos para estrategias puras, la matriz $\mathrm{A} = (a_{ij})$

Sean $x = (x_1, \dots x_m) \, \varepsilon \, P_1$, $y = (y_1, \dots y_n) \, \varepsilon \, P_2$

Sean $\mathrm{A}(x, y) = \sum_i \sum_j x \, a_{ij} \, y_j = x \, \mathrm{A} y'$, el pago esperado.

Sean $v_1 = \text{máx}_x \quad \text{mín}_y \, \mathrm{A}(x, y)$

$v_2 = \text{mín}_y \quad \text{máx}_x \, \mathrm{A}(x, y)$

Entonces: $v_1 = v_2$. El valor común se denomina valor del juego, esto es $v =$

$$v = \text{máx}_x \ \text{mín}_y \quad \mathrm{A}(x,y) = \min_y \ \max_x \ \mathrm{A}(x,y).$$

La demostración de este teorema, según von Neumann, se apoya en nociones de la teoría de conjuntos convexos, tales como plano soporte, conos, etc...

Para los intereses de este cursillo bastará poner de relieve que el valor v_1 representa la mínima expectativa de ganancia del jugador 1 y v_2 la máxima expectativa de pérdida del jugador 2.

También interesa observar como la versión del teorema de Nash para este juego, conduce al mismo resultado.

Efectivamente,

$\forall\ (p,\ q)\ \big(\pi\,(p,q)\big)\ \geq\ \text{mín}_q\,\pi\,(p,q))$

$$\big(\forall_q\big) \qquad (\max_p \pi\,(p,q)\ \geq\ \max_p\ \ \min_q\ \pi\,(p,q)$$

$$\therefore\ ①\ \min_q\ \max_p\ \ \pi\,(p,q)\ \geq\ \text{máx}_p\ \ \min_q\ \pi\,(p,q)$$

Según el teorema de Nash, se tiene:

$\big(\forall_p\big)\ (\pi\,(p^*,q^*)\ \geq\ \pi\,(p\,,q^*))$

$\big(\forall_q\big)\ (\pi\,(p^*,q^*)\ \leq\ \pi\,(p^*,q))$

$$\therefore \qquad \pi\,(p^*,\ q^*) = \text{máx}_p\ \pi\,(p,q^*) \geq \min_q\ \max_p \pi\,(p,q)$$

$$\pi\,(p^*,\ q^*) = \min_q\ \pi\,(p^*,q)\ \leq \max_p\ \min_q\ \pi\,(p,q)$$

$$\therefore\ ②\ \max_p\ \min_q\ \ \pi\,(p,q)\ \ \geq\ \min_q\ \ \max_p\ \pi\,(p,q)$$

Luego de ① y ② se concluye la tesis.

<u>Comentario</u>. Ciertamente los teoremas anteriores garantizan la existencia del o los puntos de equilibrio en estrategias óptimas, pero no indican la forma como se determinan. Para este efecto existen algún técnicas específicas, por ejemplo para juegos bipersonales con dos estrategias puras para cada jugador. En general puede diseñarse métodos a partir de resultados de la programación lineal. Hay también algunas técnicas que permiten reducir el tamaño de los juegos mediante la eliminación de filas y columnas que son “dominadas” por otras. El concepto de dominancia es una consecuencia de la hipótesis de reacionali-

dad con que actúan los jugadores, la cual se traduce en una relación de preferencias entre las estrategias puras que disponen. Así pues si la fila l_1 con respecto a la fila l_2 satisface las relaciones:

$(\forall_j)\ (a_{l_1 j} \geq a_{l_2 j})$ y $(\exists_{j_o})\ \left(a_{l_1 j_o} > a_{l_{j_o}}\right)$, entonces la fila l_1 domina a la fila l_2. Análogamente para las columnas.

Ejemplo: (El dilema del prisionero).

1 \ 2	α_1	β_2
α_1	(4,4)	(0,10)
β_1	(10,0)	(2,2)

En este ejemplo la segunda fila domina a la primera con respecto al jugador 1 y la segunda columna domina a la primera con respecto al jugador 2. Luego el punto de equilibrio es (β_1, β_2). Se observa que no es lo más deseable para ambos jugadores.

Es claro que en el análisis para la determinación de las estrategias mixtas óptimas sólo entrarán aquellas filas o columnas no dominadas, equivalentemente, las filas y columnas dominadas tendrán asignadas a priori ponderación cero.

Otro método bastante general, es el método iterativo diseñado por J. Robinson. Se basa en el hecho que si un jugador en un juego que se repite indefinidamente, responde a su contrincante con la mejor respuesta a la estrategia mixta experimental, entonces ambas estrategias mixtas convergen al punto de equilibrio. La estrategia mixta experimental es la que se asigna a las estrategias puras la frecuencia relativa con que se usaron las estrategias puras en los juegos anteriores.

PARTE SEGUNDA; JUEGOS INFINITOS.

Definición: Genéricamente un juego se dice infinito cuando el número de estrategias puras a disposición de los jugadores es no finito.

De estos juegos tiene especial relevancia los juegos "sobre el cuadrado" en su versión bipersonal. En este caso la función de pago es una función $A(x,y)$ definida sobre el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Las estrategias mixtas en este caso se definen mediante runciones de distribución y los pagos esperados se definen mediante la integral de Stielges. Así pues si $E(x,G)$ representa el pago esperado cuando 1 usa la estrategia pura x y 2 la estrategia mixta G se tendrá:

$$E\ [x,\ G] = \int_0^1 A(x,y)\ dG(y)$$

Análogamente

$$E\ [F,\ y] = \int_0^1 A(x,y)\ dF(x)$$

También se tendrá:

$$E\ [F,\ G] = \int_0^1 \int_0^1 A(x,y)\ dF(x)\ dG(y).$$

Bajo ciertas condiciones las tres integrales existen y en tal caso

$$\mathrm{E}\ [F,\ G] = \int_0^1 \mathrm{E}\,(x, G)\ df(x) = \int_0^1 \mathrm{E}\ [F,\ y]\ dG\,(y).$$

Análogamente al caso finito se definen los números $v_1 = \sup_F \inf_y \mathrm{E}\ [F,\ y]$ y $v_2 = \inf_g \sup_x \mathrm{E}\ [x,\ G]$. Los cuales ciertamente tienen el significado de las expectativas óptimas minimax del caso finito. Incluso, como lo indica el teorema siguiente, no solamente existen sino que además los sup e inf pueden reemplazarse por máx y mín respectivamente, y lo que es mejor, ambos valores pueden ser iguales. En tal caso, nuevamente, el valor común se denomina valor del juego.

Efectivamente:

<u>Teorema</u>: Si la función A(x,y) es continua en [0,1] x [0,1] entonces las funciones $\mathrm{E}[F,y]$ y $\mathrm{E}[x,G]$ alcanzan sus máximos y sus mínimos en el dominio de definición.

La demostración es directa, pues A(x,y) es continua en ambos argumentos y por lo tanto $\mathrm{E}\ [F,y] = \int_0^1 A(x\,,y)\ dF\,(x)$ es continua sobre el concepto [0,1]. Así pues, $\mathrm{E}[F,y]$ alcanza su mínimo en [0,1] para todo F.

Por otro lado el conjunto de la funciones de distribución es compacto para la topología de la convergencia puntual y por lo tanto toda sucesión de tales funciones contiene una subsucesión convergente a una función que es de distribución casi en todas partes. Así pues si $v_1 = \text{máx}_F\ \text{mín}_y\, \mathrm{E}\ [\mathrm{F}, y]$ se tendrá, para cada n, que existe F_n tal que mín E $[F_n, y] > v_1 - \frac{1}{n}$. Luego existe $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots F_{n_k}$ que converge a un cierto F_0. Se prueba que F_0 satisface que $\int_0^1 A(x,y)\ dF_0(x)$ existe y además que por ser F_0 el límite de la subsucesión $F_{n_1}, F_{n_2} \ldots,$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1$

$A(x,y)\ dF_n(x) = \int_0^1 \quad A(x,y)\ dF_0(x)$ y por lo tanto como cada $\int_0^1 A(x,y)\, dF_n(n)$ no es menor que v_1, resulta que el máx_F $\left\{\int_0^1 A(x,y)\ dF_n\ (x_O)\right\}$ se alcanza dentro del conjunto de las funciones de distribución. Así pues efectivamente, sup inf E $[F, y]$ puede reemplazarse por máx_F mín_y E $[F, y]$.

Finalmente, se prueba, haciendo uso de los conceptos implicados en el teorema anterior que

$$v_1 = v_2$$

Hay un caso particularmente interesante para este juego, son los juegos cóncavos - convexos. En ellos la función $A(x,y)$ es cóncavos - convexa, es decir : $(\exists\, x_o)\left(\forall_y\right)$ $\left(A(x_o \pm \Delta\, x, y) \leq A(x_o, y)\right)$ Y

$(\exists\, y_o)\ (\forall_x)\ (A(X,\ y_o \pm \Delta\, y) > A(x,\ y_o)$. Es intuítivamente evidente que en tales juegos existirá un punto de silla en estrategias puras. Efectivamente así es, como lo indica el siguiente teorema.

<u>Teorema</u>: Si la función $A(x,y)$ de un juego cóncavo-convexo es continua entonces existe un punto de equilibrio en estrategias puras. Este punto es un punto de silla.

PARTE TECERA: ESTRATEGIAS CONDUCTUALES.

En las partes anteriores se mencionó que los procesos de aleatorización ocurren solamente en los conjuntos de información del azar. Sin embargo, el análisis se enriquece cuando las decisiones o elecciones se plantean en términos aleatorizados. Con esta finalidad se introducen los siguientes conceptos.

Estrategia local. Es una distribución de probabilidad sobre las elecciones factibles en cada conjunto de información. Se anota b_{iu}. El valor que b_{iu} asigna a la elección c se escribe $b_{iu}(c)$. El subíndice i indica al jugador i. Si U_i es el conjunto de los conjuntos de información de i, se tendrá para cada $u \varepsilon U_i$ que $b_{iu}(c) \geq o$ y $\sum_c b_{iu}(c) = 1$.

Estrategia conductual. Es una función b_i que asigna a cada $u \varepsilon U_i$ una estratefia local $b_i(u) = b_{iu}$. El conjunto de todas ellas se anota B_i.

Estrategia conductual pura. Es una función π_i que asigna a cada $u \varepsilon U_i$ una elección c. Esto es, es una estrategia conductual que asigna probabilidad 1 a una elección c en cada $u \varepsilon U_i$. El conjunto de estas estrategias se escribe π_i .

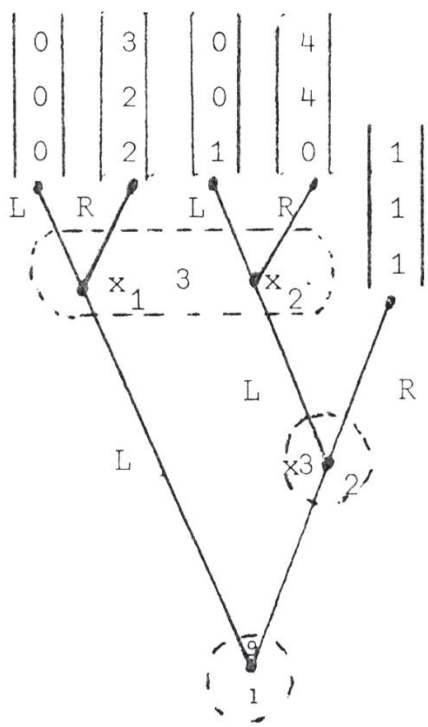
Estrategia Mixta. Es una distribución de probabilidad sobre π_i. Se escribe q_i . El conjunto de todas ellas se escribe Q_i, el cual será ciertamente un simplex euclidiano.

Mixtura de estrategias conductuales. Es una distribución de probabilidad sobre el espacio B_i, que asigna a un número finitos de elementos de B_i, probabilidad positiva y al resto probabilidad cero. Se anota s_i.

Combinación de mixtura. Es una $n-upla$ de mixturas, correspondiente a los jugadores. Se anota $s = (s_1, \ldots, s_n)$.

A partir de estos conceptos y los definidos anteriormente, se estructura una nueva versión de los juegos extensivos. Fundamentalmente se logra una metodología de análisis para los puntos de equilibrio que presentan algunas "anomalías" desde el punto de vista intuitivo.

Así por ejemplo:



Aquí se indica un juego entre tres jugadores. Cada uno con los conjuntos de información que se indican y con las elecciones L y R para cada uno.

Se prueba, si $P_1 = \text{Prob}\,(\text{R})$, que los puntos de equilibrio en estrategias conductuales, son elementos de dos tipos de conjuntos:

Tipo 1 : $P_1 = 1$; $P_2 = 1$; $0 \leq P_3 \leq 1/4$

Tipo 2 : $P_1 = 0$; $1/3 \leq P_2 \leq 1$; $P_3 = 1$

Si se supone por ejemplo un punto del tipo 2, entonces el jugador 2 debiera optar por R, si se alcanza su conjunto de información. Pero evidentemente no es la mejor opción para él puesto que en el supuesto que 3 opta por R, le conviene más optar por L.

Este ejemplo pone de manifiesto la inestabilidad de los puntos de equilibrios.

Para estas situaciones tiene especial relevancia un teorema debido a Kuhn (1953). En su demostración hace uso de algunos conceptos de clara base intuitiva. Así se define:

Probabilidad de realización. Para la $n-upla$ $s = (s_1, \dots, s_n)$ se define así la probabilidad $\rho(x,s)$ de alcanzar un vértice x del juego.

Con este concepto, aplicado a los vértices terminales del juego, el pago esperado con respecto a la $n-upla$ $s = (s_1, \dots, s_n)$ asumirá la forma:

$$H_i(s) = \sum_z \rho(z,s)\, h_i(z).$$

Se dirá también que dos mixturas de un mismo jugador son equivalentes en realización si las respectivas n-*uplas* que difieren sólo en las mixturas señaladas, asignan a cada vértice x la misma probabilidad de realización. Esto es $\rho(x, (s_1, \dots, s_i' \dots, s_n)) = \rho(x, (s_1, \dots, s_i'' \dots, s_n))$

Si s_i' y s_i'' son dos mixturas de jugador i tales que:

$H_i \ (s_1, \dots, s_i', \dots, s_n) = H \ (s_1, \dots, s_i'', \dots, s_n)$, entonces se dirpa que s_i' , s_i'' son equivalentes en pago.

Teorema (Kuhn, 1953). En un juego con recordación perfecta para cada mixtura s_i de un jugador i, existe una estrategia conductual b_i, equivalente en realización.

Como consecuencia inmediata se obtiene que cada mixtura puede reemplazarse por una estrategia conductual, equivalente en pago. Así pues el análisis de los puntos de equilibrio se puede realizar en término de estrategias conductuales en lugar de mixturas.

Sobre estas bases, Selten (1974) construye un modelo que permite el análisis de los puntos de equilibrio imperfectos. Con este fin introduce el concepto de subjuego regular, definido como el juego cuyos vértices son los vértices del juego original, definidos por un vértice dado y todos los siguientes de él, y de modo que todos los conjuntos de información del juego original que contienen al menos un vértice del subjuego, contienen todos sus vértices en el subjuego. Agrega a este concepto el concepto de $n-uplas$ de estrategias conductuales inducidas en un subjuego en la forma usual restringiendo los respectivos dominios.

Una $n-upla$ de estrategias conductuales se dirá que es un punto de equilibrio perfecto para los subjuegos si las correspondientes $n-uplas$ inducidas son puntos de equilibrio en cada subjuego.

Obviamente la imperfección de los puntos de equilibrio de un juego tienen su origen en que ni todo punto de equilibrio es un punto de equilibrio perfecto para los subjuegos. En el ejemplo anterior se ve claro que los puntos del tipo 2 son de equilibrio imperfecto: incluso, es evidente que el jugador 2 debe apartarse de la norma de racionalidad que impone el criterio del punto de equilibrio para aumentar sus espectativas de pago. Esta situación permite, en término generales, postular la existencia de una norma adicional para el abandono de la racionalidad. La forma que postula Selten consiste en asignar a cada conjunto de información una probabilidad ε_u de abandonar la hipótesis de racionalidad y una probabilidad $q_c > 0$ sobre cada elección en ese conjunto de información racional impone, se tendrá que la probabilidad efectiva sobre la elección c será:

$$\hat{p}_c = (1 - \varepsilon_u)\, p_c + \varepsilon_u\, q_c.$$

Es claro que ε_u y q_c pueden ser de naturaleza distinta, por ejemplo ε_u una probabilidad objetiva y q_c una probabilidad subjetiva. Cualquier hipótesis, en este sentido, tiene cabida.

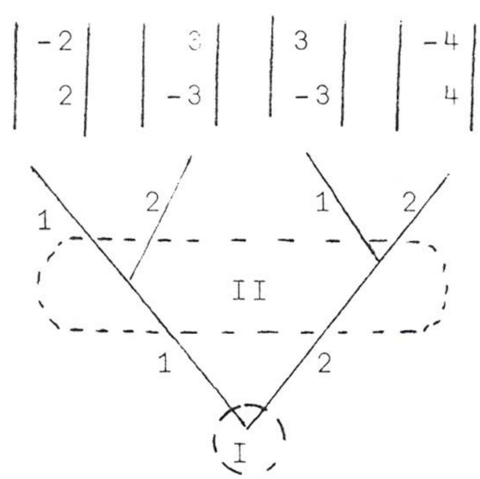
Así pues de estas ideas como primera conclusión se obtiene como caracterización de la "irracionalidad", el número $\varepsilon_u\, q_c$. Si $\eta_c = \varepsilon_u\, q_c$, entonces es dable concebir una función η que asigne a cada elección c de un conjunto de información μ la probabilidad μ_c. Como η es esencialmente una estrategia conductual, puede considerarse como elemento de un cierto espacio de funciones. Así cada determinación de η originará una particular distribución de probabilidades sobre las elecciones correspondientes a los conjuntos de información. En estas condiciones se define como una perturbación del juego G al par definido por (G,η). Este par se denomina también el juego G perturbado y se anota $\widehat{G} = (G,\eta)$.

Selten logra demostrar que si $\hat{G}^1, \hat{G}^2, \ldots$ es una sucesión de juegos perturbados, definidos por las funciones $\eta^1, \eta^2, \ldots$ tales que $(\forall c)$ $(\lim_{n\to\infty} \eta_c^k = 0)$, entonces si $\hat{b}^k$ es una $n-upla$ de estrategias conductuales en equilibrio para el juego perturbado G^k, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{b}^k = b^*$ es un punto de equilibrio del juego G.

PARTE CUARTA: ALGUNOS EJEMPLOS.

1°) El juego de la "morra" simplificado. Consiste en el enfrentamiento entre dos personas. Cada una puede mostrar independientemente uno o dos dedos. Si ambos muestran el mismo número el jugador 1 le paga 2 tantas unidades monetarias como la suma de los dedos mostrados. En caso contrario 2 le paga a uno.

La forma extensiva.



La forma normal.

I \ II	1	2
1	(-2,2)	(3,-3)
2	(3,-3)	(-4,4)

I \ II	1	2
1	-2	3
2	3	-4

No tiene punto de silla. Es decir no hay punto de equilibrio en estrategias puras.

Sea: $p\,("1") = p$

$q\,("1") = q$

Se muestra sin muchas dificultades que el punto de equilibrio en estrategias mixtas de la forma $(p^*,\, q^*)$ viene dado por $p^* = \frac{7}{12}\,, q^* = \frac{7}{12}$. Esto es:

$$\pi\,(p, q) = \,-2pq + 3p\,(1-p)q - 4\,(1-p)(1-2) =$$

$= -12pq + 7p + 7q - 4,$ satisface las siguientes condiciones:

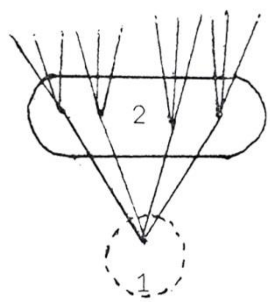
$\pi\,(p, 7/12)$ es máxima para $p =\, 7/12$ y

$\pi\,(7/12\,, q)$ es mínima para $q = 7/12.$

2°) Juego de la morra generalizado. En este caso se agrega la conjetura que hace cada jugador sobre el número de dedos que mostrará su contrario. El jugador que acierta la conjetura percibe el número de unidades monetarias dado por el número total de dedos mostrados. En caso que ambos acierten o ambos fallen el pago es cero.

Las estrategias puras de cada uno y los pagos correspondientes son las que se indican en la siguiente tabla:

1 \ 2	[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
[1,1]	(0,0)	(2,-2)	(-3,3)	(0,0)
[1,2]	(-2,2)	(0,0)	(0,0)	(3,-4)
[2,1]	(3,-3)	(0,0)	(0,0)	(-4,4)
[2,2]	(0,0)	(-3,3)	(4,-4)	(0,0)



1 \ 2	1	2	3	4
1	0	2	-3	0
2	-2	0	0	3
3	3	0	0	-4
4	0	-3	4	0

Este problema admite solución en estrategias mixtas, como puede verificar el lector.

3°) Sea $A(x,y) = 2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y$, la función de pago de un juego definido sobre el cuadro unitario.

Claramente $A(x,y)$ es continua y estrictamente cóncava-convexa pues $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -4 < 0$ y $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 2 > 0$. Así pues existe un único punto de silla.

$$A_x = -4x + 3y - 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{3y-1}{4}$$

Pero

$$x \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si } y \leq 1/3 \\ \frac{3y-1}{4} & \text{si } y \geq 1/3 \end{cases}$$

$$Ay = 2y + 3x - 2 = 0 \longrightarrow y = \frac{2-3x}{2}$$

Pero

$$y \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} y = 0 & \text{si x} \geq 2/3 \\ \frac{2-3x}{2} & \text{si x} \leq 2/3 \end{cases}$$

Ambas situaciones son compatibles sólo si:

$x = 4/17$

$y = 11/17$

Estos valore conducen al valor del juego.

$$v = A\,(4/17, \quad 11/17) = \frac{13}{17}$$

BIBLIOGRAFIA.

Owen, Guillermo : "Game Theory"
W.B. Saunders Company
Philadelphia, Pa. 1968.

Nash, John : "Non Cooperative Games"
Aunals of. Mathematics
Vol. 54. N°2. 1951.

Selten, Richard : "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games".

International Journal of Games Theory
Vol. 4 Issue 1. Physica Nulag
Vienna. 1974.