LA INVERSA GENERALIZADA

RODOLFO BAEZA VEGA

Sea $F_{m,n}$ el conjunto de las matrices $m \times n$ con entradas en F . Consideremos $A \in F_{m,n}$ y $B \in F_{m,1}$. Debemos encontrar $X \in F_{n,1}$ tal que $AX = B$. Es decir buscamos las soluciones del sistema lineal de m ecuaciones con n incognitas

$$AX = B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Observemos que :

1) Si $\rho(A) = \rho(A|B) = m = n$ entonces (*) tiene solución única y está dada por

$$X = A^{-1} B$$

donde A^{-1} es la inversa multiplicativa de A .

2) Si $\rho(A) = \rho(A|B) = n \neq m$ entonces existen ∞ soluciones que tambien queremos escribirlas como $X = A_1^{-1} B$.

3) Si $\rho(A) \neq \rho(A|B)$ no existe solución pero nos gustaría encontrar algun X que haga "mínima" la diferencia $AX - B$. En caso que hubiera varios de tales X nos interesa en

contrar aquellas que sean mas "pequeñas" (naturalmente, debemos hablar de algún tipo de métrica en las matrices). Tales X tambien queremos escribirlas de la forma $X = A_1 B$.

Las matrices A_1 que sirven para 2) y 3) tienen algunas propiedades parecidas a las de la inversa de A . Por tal razón se les llama de alguna manera como inversas de A , por ejemplo "Inversa generalizada", "seuda inversa", "inversa de Penrose" o "Inversa de Moore-Penrose".

El objetivo de estas notas es ilustrar su cálculo y aplicación en el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales. Tal análisis puede hacerse, sin aumentar los problemas, si $B \in F_{m,k}$ o sea si se trata de un conjunto de sistemas de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n incógnitas cada uno. En lo que sigue A^* representa la traspuesta de A (si $F = \mathbb{R}$) o bien la traspuesta conjugada de A (si $F = \mathbb{C}$).

1. Definición :

Sea $A \in F_{m,n}$ y $G \in F_{n,m}$ decimos que

- 1) G es (1) inversa de A si $AGA = A$
- 2) G es (2) inversa de A si $GAG = G$
- 3) G es (3) inversa de A si $(AG)^* = AG$
- 4) G es (4) inversa de A si $(GA)^* = GA$

1.1. Proposición : $\forall A \in F_{m,n} \exists G \in F_{n,m}$ tal que G es (1) inversa de A .

Demostración : Sean $P \in F_{m,m}$ y $Q \in F_{n,n}$ invertibles tal que

$$PAQ = D = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \text{forma canónica de}$$

la equivalencia de matrices. La matriz $G = QD^t P$ es (1) inversa de A .

1.2. Proposición 2 (*) tiene solución $\Leftrightarrow$ $AGB=B$, $\forall G$ (1) inversa de A .

Demostración : Sea $AX=B$ y sea G una (1) inversa de A entonces :

$AGB = AG(AX) = (AGA)X = AX = B$. Si $AGB=B$ entonces $X=GB$ es solución de (*)

1.3. Proposición 3 : Si (*) tiene solución entonces $X=GB + (I-GA)H$ es la solución general de (*) para G (1) inversa de A .

Demostración : Es claro que $GB + (I-GA)H$ es solución de (*). Si X es solución de (*) entonces haciendo $H = (I-GA)X$ tenemos que $X = GB + (I-GA)H$

Las tres proposiciones anteriores resuelven las partes (1) y (2) iniciales. Para analizar el problema de los sistemas inconsistentes utilizaremos la norma de una matriz $A = (a_{ij}) \in F_{m,n}$ definida por

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \text{tr} (A^* A)$$

2. Definición :

1) Se dice que X es una solución mínima cuadrática de (*) si $\|AX-B\|$ es minimal

2) La ecuación normal de (*) es $A^* AX = A^* B$. (**)

2.1. Proposición 1:

1) (**) siempre tiene solución

2) X es solución mínimo cuadrática de

$* \iff X$ es solución de (**)

Demostración : Sea G una (1) inversa de A^*A basta probar que $A^*AGA^*B = A^*B$ (por Proposición 1.2)

Como $A^*AGA^*A = A^*A$ entonces $(A^*AG-I)A^*A = 0$, luego $(A^*AG-I)A^*A (A^*AG-I)^* = 0$ De ahí tenemos que

$[(A^*AG-I)A^*]^* [(A^*AG-I)A^*]^* = 0$ y en consecuencia

$\|[(A^*AG-I)A^*]\|^2 = 0$ de donde $(A^*AG-I)A^* = 0$.

Luego $A^*AGA^* = A^*$ y por lo tanto $A^*AGA^*B = A^*B$.

2.2. Observaciones :

1) G es (1.3) inversa de $A \iff A^*AG = A^*$

2) Si G es (1.3) inversa de A entonces $X = GB$ es solución mínimo cuadrática de (*). Por esta razón la (1.3) inversas son llamadas Inversas-mínimo-cuadráticas. Nótese que las inversas mínimo cuadráticas de A son justamente una solución mínimo cuadrática de $AX=I$.

3) Si H es una (1) inversa de A^*A entonces $G=HA^*$ es (1,2,3) inversa de A .

Demostraciones :

1) $\Rightarrow$) $A^*AG = A^*$ $(AG) = A^*(AG)^* = (AGA)^* = A^*$

~~4~~) Como $(AGA)^* = A^*G^*A^* = (A^*AG)G^*(A^*AG) =$

$= (G^*A^*AG G^*A^*)^* = (G^* A^* A)^* = A^*$

entonces G es (1) inversa de A .

Como $(AG)^* = G^* A^* = G^* A^* AG = AG$ entonces G es (3) inversa de A .

2) Siendo G (1.3) inversa de A tenemos que $A^* AG = A^*$ luego $A^* AGB = A^*B$ $\therefore X = GB$ es solución de (**) y en consecuencia es solución mínimo cuadrática de (*).

3) Como H es (1) inversa de A^*A entonces $A^* AHA^* A = A^* A$ o equivalentemente: $A^* AH^* A^* A = A^* A$ luego $A^* A(HA^* A - H^* A^* A) = 0$ y por el argumento utilizado en la proposición (2.1.(a)) tenemos que $AHA^* A = AH^* A^* A$.

De modo análogo vemos que

$A^* AH^* A^* A = A^* A \Rightarrow A^* A (H^* A^* A - I) = 0$ de donde $A(H^* A^* A - I) = 0$, sea $AH^* A^* A = A$ o sea $AHA^* A = A$ $\therefore AGA = A$.

Además $GAG = HA^* AHA^* = H (A H^* A^* A)^* = HA^* = G$

Finalmente : $AHA^* A = AH^* A^* A \Rightarrow (AH - AH^*) A^* A = 0$ de donde $(AH - AH^*) A^* = 0$ o sea $AHA^* = AH^* A^*$, luego $(AG)^* = (AHA^*)^* = (AH^* A^*)^* = AHA^* = AG$.

3. Definición :

Sea X una solución de (*). Diremos que X es una solución de norma mínima si $\|X\|^2$ es minimal.

3.1 Proposición : Sea X una solución de (*).
Entonces :

X es solución de norma mínima de (*) $\Leftrightarrow$
($AH=0 \Rightarrow X^*H=0$)

3.2 Observaciones :

- 1) G es (1.4) Inversa de $A \Leftrightarrow AA^*G^* = A$.
- 2) Si G es (1.4) Inversa de A y (*) tiene solución, entonces $X = GB$ es una solución de norma mínima.

Demostraciones :

$$1) \Rightarrow) AA^*G^* = A (GA)^* = AGA = A$$

$$\Leftarrow) AGA = AG(A^*)^* = AG(GAA^*)^* = AGAA^*G^* =$$

$$= A(GAA^*) G^* = AA^*G^* = A \text{ y además:}$$

$$(GA)^* = A^*G^* = (GAA^*)G^* = G(AA^*G^*) = GA$$

2) Como G es (1) inversa de A y (*) tiene solución entonces $X = GB$ es una solución de (*). Además si $AH=0$ entonces $X^*H = (H^*X)^* = (H^*Gb)^* = [H^*G(AGb)]^* = [H^*(GA)Gb]^* = [H^*A^*G^*Gb]^* = b^*G^*GAH = b^*G^*G \cdot 0 = 0$

Es decir $AH=0 \Rightarrow X^*H=0$ y por proposición 3.1 se tiene que $X = Gb$ es solución de norma mínima.

4. Definición :

Una mejor solución de (*) es una solución mínima cuadrática de norma mínima.

4.1. Proposición : Existe una única mejor solución de (*)

Demostración: La existencia se debe a la proposición 2.1 y para ver la unicidad, supongamos que X e Y sean soluciones de (**) entonces : $A*AX = A*AY = A*b$ y de aquí obtenemos que $A*(X-Y) = 0$. Premultiplicando esta última igualdad por $(X-Y)^*$, obtenemos que $\|A(X-Y)\| = 0$ como $\|A\| \neq 0$, tenemos que $\|X-Y\| = 0$ y finalmente que $X = Y$.

4.2. Observaciones :

1) La mejor solución G de $AX = I$ es una $(1,2,3,4)$ inversa de A .

2) Si G es una $(1,2,3,4)$ inversa de A , entonces ella es única y es la mejor solución de $AX=I$.

Demostraciones:

1) Por ser G la mejor solución de $AX=I$, teremos que $A*AG = A*$ y por la observación 2.1 concluimos que G es $(1,3)$ inversa de A .

Como G es 1-inversa de A , entonces $A*(GA-I) = 0$ y ya que G es solución de norma mínima de $A*AG = A*$ podemos aplicar la proposición 2.1 con $H = GA-I$ obteniendo que $G*(GA-I) = 0$ o sea $G*GA = G*$.

Con esta última igualdad es inmediato probar que G es $(2,4)$ inversa de A , en efecto :
 $(GA)^* = A*G* = A*(G*GA) = (G*GA)^*A = GA$ y $GAG = (GA)G = (GA)^*G = (G*GA)^* = G$

2) Basta probar que G es la mejor solución de $AX = I$, pues en este caso la proposición 4.1. garantiza la unicidad. G es solución de $A*AX = A*$ porque $A*AG = A*(AG) = A*(AG)^* = (AGA)^* = A*$. Además si $A*AH = 0$ entonces $G*H = (GA)^*H = G*(GA)^*H = G*GAH = G*(GAG)AH = G*G(AG)AH = G*G(AG)^*AH = G*G G* A*AH = G G G* 0 = 0$ y por la proposición 3.1 se tiene que X es solución de norma mínima.

5. Definición :

La única $(1,2,3,4)$ inversa de A es llamada la MOORE-PENROSE inversa de A y se designa por: A^+

5.1. Proposición : La mejor solución de $AX=B$

es $X = A^+ B$

Demostración : Como A^+ es (1,3) inversa de A entonces por observación 2.2 se tiene que $X = A^+ B$ es solución mínimo cuadrática de (*). Además por ser A una (2,3,4) inversa de A tenemos que

$(A * A A^+ (A^+)^* A^+)^* = (A^+)^*$. Luego para cualquier H tal que $A * A H = 0$ es cierto que $(A^+ B)^* H = 0$ ya que $(A^+ B)^* H = B^* (A^+)^* H = B^* (A^+)^* A^+ (A^+)^* A * A H = B^* (A^+)^* A^+ (A^+)^* A * A H = 0$. En consecuencia, por proposición 3.1

$A^+ B$ es una solución de norma mínima de (**)

5.2. Observación : Para completar el estudio propuesto solo falta la metodología que nos permita calcular A^+ . Para ello disponemos de las siguientes técnicas :

1) Si A es una matriz de rango completo entonces

$A^+ = (A * A)^{-1} A^*$ si $\rho(A) = n$ y $A^+ = A^* (A A^*)^{-1}$ si $\rho(A) = m$

2) Si A es deficiente, sean $B = A A^*$ y r el menor entero tal que $a_r \neq 0$ donde

$$\sum_{i=1}^m a_i x^i,$$

es el polinomio característico de B . Sea

$$T = -\frac{1}{a_r} [a_{r+1} I + \dots + a_m B^{m-r-1}] \text{ entonces}$$

$$A^+ = A * T.$$

Demostraciones : En general para probar que G es (1,2,3,4) inversa de A basta probar que G satisface las igualdades $A * A G = A^*$ (observación 2.2.1.) y $G * G A = G^*$ (Demostración de la observación 4.2.1.).

1) Si $\rho(A) = n$ entonces $A^* A$ es invertible y si $G = (A^* A)^{-1} A^*$, entonces : $A^* AG = A^*$ y $GA = I_n$

Luego $G^* GA = G^*$. En caso que $\rho(A) = m$, la demostración es análoga.

2) Basta probar que $A^* AA^* T = A^*$ porque haciendo $G = A^* T$ tenemos que $A^* AG = A^*$ y en consecuencia G es (1,3) inversa de A . Como G es 1-Inversa de A entonces $G^* GA = T^* AGA = T^* A = G^*$

Por teorema de Cayley Hamilton tenemos

que $a_r B^r + \dots + a_m B^m = 0$ luego $B^r = B^{r+1} T$ o sea

$AA^* [(AA^*)^{r-1} - (AA^*)^r T] = 0$. Empleando el mismo argumento usado en la demostración de la proposición 2.1 obtenemos que

$$A^* [(AA^*)^{r-1} - (AA^*)^r T] = 0 \text{ es decir}$$

$$A^* A [(A^* A)^{r-2} A^* - (A^* A)^{r-1} A^* T] = 0 \text{ y, en consecuencia}$$

$$A [(A^* A)^{r-2} A^* - (A^* A)^{r-1} A^* T] = 0 \text{ , Hemos probado que}$$

$B^{r-1} = B^r T$. De ese modo es posible llegar a $B = B^2 T$ es decir $AA^* AA^* T = AA^*$ de donde $A^* A A^* T = A^*$.