ERRORES DE REDONDEO EN UN COMPUTADOR

JURGEN WEYER

A. NUMEROS DE UN COMPUTADOR.

Cada computador puede representar sólo números con una mantisa de k cifras, (k depende del modelo). Por eso los números de la máquina tienen la forma :

$$z = \pm . d_1 d_2 \dots d_k . 10^l$$

donde las cifras de la mantisa son $d_i \in \{ 0, 1, \dots, 9 \}$; l es el exponente. La representación siempre es normalizada, ó sea $d_1 \neq 0$ (Internamente el computador utiliza la base 2 en lugar de 10).

Si se quiere computarizar un número real arbitrario x , se tiene que aproximar este número por un número de la máquina. Las operaciones para aproximarlos son las siguientes :

- a) Normalizar x
- b) Redondear x a k cifras de la mantisa

El resultado de estas operaciones es :

$$\bar{x} = \text{rd}(x)$$

$\Delta x = \text{rd}(x) - x$ es el error absoluto del input

$\epsilon_x = \Delta x / x$ es el error relativo del input

Además :

$$\bar{x} = x(1 + \epsilon_x) \quad | \epsilon_x | \leq \text{eps}$$

$$\text{eps} = 10^{-k}$$

se llama exactitud del Computador.

B. OPERACIONES ELEMENTALES.

Para números a, b de la máquina las operaciones elementales $+$, $-$, $\cdot$, $/$, son calculados por el proceso siguiente :

- a) a, b son normalizados.
- b) El resultado $z = a + b, a - b, a \cdot b, a / b$, es calculado con 2_k cifras.
- c) z es normalizado.
- d) $\text{rd}(z)$ es calculado.

Estas operaciones se llaman floating-point-operations :

$$\text{fl}(a + b), \text{fl}(a - b), \text{fl}(a \cdot b), \text{fl}(a / b)$$

Estas operaciones no son asociativas ni distributivas.

El error relativo de estas operaciones satisface :

$$\left. \begin{aligned} \text{fl}(a \pm b) &= (a \pm b) (1 + \epsilon) \\ \text{fl}(a \cdot b) &= a \cdot b (1 + \epsilon) \\ \text{fl}(a / b) &= a / b (1 + \epsilon) \end{aligned} \right\} | \epsilon | \leq \text{eps}$$

C. PROPAGACION DE UN ERROR EN UN ALGORITMO.

Definamos un algoritmo como una secuencia de

operaciones elementales que prescribe como se puede calcular la solución de un problema, utilizando los datos del input.

Estudiamos como los datos alterados del input y las alteraciones en el cálculo influyen el resultado.

1. INPUT EXACTO, SOLO ALTERACIONES EN EL CALCULO.

Ejemplo : Producto interior

$$s = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \text{ donde } a_i, b_i \text{ son números de la máquina}$$

ALGORITMO

$$t_1 := a_1 \cdot b_1, s_1 := t_1$$

para $r = 2, \dots, n$

$$t_r := a_r \cdot b_r, s_r := s_{r-1} + t_r$$

$$s = s_n$$

Realización con floating-point-operation :

$$s'_1 = t'_1 = fl(a_1 \cdot b_1) = a_1 \cdot b_1 (1 + \mu_1)$$

$$t'_r = fl(a_r \cdot b_r) = a_r \cdot b_r (1 + \mu_r)$$

$$s'_r = fl(s'_{r-1} + t'_r) = \{ s'_{r-1} + a_r b_r (1 + \mu_r) \} \cdot (1 + \alpha_r)$$

$$\text{Donde } |\alpha_r|, |\mu_r| \leq \text{eps}$$

$$(*) \quad fl\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) = s' = \sum_{i=1}^n a_i b_i (1 + \epsilon_i), \text{ donde}$$

$$(1 + \epsilon_1) = (1 + \alpha_1) (1 + \alpha_2) (1 + \alpha_3) \dots (1 + \alpha_n)$$

$$(1 + \epsilon_r) = (1 + \mu_r) (1 + \alpha_r) (1 + \alpha_{r+1}) \dots (1 + \alpha_n), r=2, \dots, n$$

$$|(1 + \epsilon_r)| \leq (1 + \text{eps})^n = 1 + n \cdot \text{eps}$$

El error relativo en el resultado es menor que $n \cdot \text{eps}$. Interpretación de (*): Hemos calculado exactamente el producto escalar para un input, que es un poco alterado.

Datos del input :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 & (1 + \epsilon_1) \\ \vdots & \\ b_n & (1 + \epsilon_n) \end{pmatrix}$$

El resultado es aceptable.

2. INPUT ALTERADO, CALCULO EXACTO.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{sean los datos exactos del input}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \epsilon \mathbb{R}^n, \text{ sean los resultados deseados}$$

ψ sea un instrucción para calcular y .

Entonces : ψ es una aplicación

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \psi \in C^k, \psi(x) = y$$

$\bar{x}$ sea un aproximación de x (error en el input).

$$\text{Error absoluto : } \Delta x_i = \bar{x}_i - x_i, \Delta x = \bar{x} - x$$

$$\text{Error relativo : } \varepsilon_{xi} = \Delta x_i / x_i$$

$$y = \psi(x), \bar{y} = \psi(\bar{x})$$

Error en el resultado :

$$\Delta y_i = \bar{y}_i - y_i = \psi_i(\bar{x}) - \psi_i(x) =$$

$$= \sum \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \Delta x_j + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_p \partial x_q} \Delta x_p \Delta x_q + \dots$$

$$\Delta y \approx \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = D\psi(x) \cdot \Delta x$$

Δy es el error en el resultado en consecuencia de un input alterado.

$$\epsilon_{y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\psi_i(x)} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x_j} \epsilon_{x_j}$$

es el error relativo. Los números $\frac{x_j}{\psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ se llaman números de la condición. Cuando estos números son > 1 (< 1), el error en el input tiene gran (poca) importancia para el resultado.

EJEMPLOS :

$$\psi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad \epsilon_{\psi} = \epsilon_{x_1} + \epsilon_{x_2}$$

$$\psi(x_1, x_2) = x_1 / x_2 \quad \rightarrow \quad \epsilon_{\psi} = \epsilon_{x_1} - \epsilon_{x_2}$$

$$\psi(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2 \quad \epsilon_{\psi} = \frac{x_1}{x_1 \pm x_2} \epsilon_{x_1} \pm \frac{x_2}{x_1 \pm x_2} \epsilon_{x_2}$$

$$\psi(x) = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad \epsilon_{\psi} = \frac{1}{2} \epsilon_x$$

3. INPUT ALTERADO, ALTERACIONES EN EL CALCULO.

ANALISIS DIFERENCIAL PARA PROPAGACION DE ERRORES.

Sea $\psi : R^n \rightarrow R^m$ la aplicación, que describe nuestro problema del cálculo $\psi(x) = y$. Cada algoritmo está representado por una secuencia de operaciones elementales $\psi^{(i)}$.

Por eso descomponemos ψ en :

$$\psi = \psi^{(r)} \circ \psi^{(r-1)} \circ \dots \circ \psi^{(1)} \circ \dots \circ \psi^{(0)}$$

EJEMPLO :

$$\psi(a, b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\text{Algoritmo 1: } \psi^{(0)}(a, b) = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \end{bmatrix}, \quad \psi^{(1)}(a, b) = a - b$$

$$\text{entonces} \quad \psi = \psi^{(1)} \circ \psi^{(0)}$$

$$\text{Algoritmo 2: } \bar{\psi}^{(0)}(a, b) = \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi}^{(1)}(a, b) = a \cdot b$$

$$\text{entonces} \quad \psi = \bar{\psi}^{(1)} \circ \bar{\psi}^{(0)}$$

Se quiere elegir un algoritmo tal que el error en el resultado tenga poca importancia. Por eso se define las aplicaciones :

$$\phi^{(0)} = \psi \quad \phi^{(i)} = \psi^{(r)} \circ \dots \circ \psi^{(i)}$$

Estas funciones $\phi^{(i)}$ se llaman aplicaciones remanentes. Al calcular el resultado provisional

$\psi^{(i)}(x^{(i)})$ el computador, calcula $\psi^{(i)}(x^{(i)}) + \alpha_{i+1}$ en lugar de $\psi^{(i)}(x^{(i)})$; α_{i+1} es el error absoluto al aplicar $\psi^{(i)}$.

Ahora se puede interpretar α_{i+1} como el error del input para la aplicación remanente $\phi^{(i+1)}$.

La influencia de este error α_{i+1} para el resultado final es

$D \psi^{(i+1)} \cdot \alpha_{i+1}$ para el resultado final es $D \psi^{(1+1)} \cdot \alpha_{i+1}$.

El error total en el resultado final es :

$$\Delta y = D \phi^{(0)} \alpha_0 + D \phi^{(1)} \alpha_1 + \dots + D \phi^{(r)} \alpha_r + \alpha_{r+1}$$

$D \psi^{(0)} \alpha_0 = D \cdot \Delta x$ es el error a consecuencia del input falsificado.

$$\sum_{i=1}^r D \psi^{(i)} \cdot \alpha_i + \alpha_{r+1} \quad \text{son los errores a consecuencia}$$

del cálculo. Para todos los algoritmos, con los que se puede calcular ψ , la influencia del error del input $D \psi \cdot \Delta x$ es lo mismo. Un algoritmo se llama numéricamente estable si $D \psi \cdot \Delta x$ tiene el mismo orden de magnitud como

$$\sum_{i=1}^r D \psi^{(i)} \alpha_i + \alpha_{r+1} \quad \text{Para cada problema se tiene que}$$

elegir entre los algoritmos posibles un algoritmo estable.

Ejemplo :

PROBLEMA : Calcule $\cos(kx)$ $k \in \mathbb{N}$

Dato del input: $\cos x$ (se calcula $\cos x$ solo en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)

Algoritmo 1 :

$\cos(i+1) = 2\cos x \cdot \cos i x - \cos(i-1)x \rightarrow$
recursión :

$$C_{i+1} = 2 C_1 C_i - C_{i-1}$$

input : $C_0 = 1, C_1 = \cos x,$

$$C_i = \cos i x$$

Análisis del error

$$x \quad \frac{\psi_1}{C_1} \quad \frac{\psi_2}{C_2} \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_k$$

$\phi(i)$

$$C_i = \cos i x \quad x = \frac{1}{i} \arccos C_i$$

$$C_k = \phi^{(i)}(C_i) = \cos(kx) = \cos\left(\frac{k}{i} \arccos C_i\right) \Rightarrow$$

$$D \phi^{(i)}(i) = + \sin\left(\frac{k}{i} \arccos C_i\right) \cdot \frac{k}{i} \frac{1}{\sqrt{1 - C_i^2}}$$

$$= \frac{k}{i} \frac{\sin kx}{\sin ix} \quad i > 0$$

$$D \phi^{(0)} = -k \sin kx$$

$$\Delta C_k = -k \sin(kx) \Delta x + \sum_{i=1}^k \frac{k \sin kx}{i \sin ix} \alpha_i + \alpha_{k+1}$$

$$\text{Análisis para } x \approx 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{i \sin ix} = \frac{k^2}{i^2}$$

→ la influencia del error α_1 es $k^2 \alpha_1$. Para $k=1000$ el factor del refuerzo del error es 10^6 . Por eso perdimos 6 cifras correctas en el resultado.

Algoritmo 2.

$$\begin{aligned} dC_i &= \cos ix - \cos(i-1)x = 2\cos x \cdot \cos(i-1)x - \cos(i-1)x - \cos(i-2)x \\ &= 2\cos((i-1)x) [\cos x - 1] + dC_{i-1} \end{aligned}$$

$$\text{recursión doble : } C_i = C_{i-1} + dC_i, \quad dC_{i+1} = tC_i + dC_i$$

$$\text{input : } C_0 = 1 ; \quad dC_1 = \cos x - 1 = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right); \quad t = 2dC_1$$

Análisis diferencial muestra : Algoritmo 2 es estable. Generalmente se puede decir: recursiones dobles son

más estables o se prefiere iteraciones con 3 expresiones de la forma

$$C_{i+1} = f (x_i, C_{i-1}) .$$

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Wilkinson; Rounding : Error in Algebraic Processes,
Her Majesty's Stationary office,
London 1963.
- 2.- Wilkinson, Rundungsfehler, Heidelberger. Taschenbucher 44,
Springer 1969.
- 3.- Wilkinso, Error Analysis of floating-point-computation
Numer. Math 2. 319 - 340.
- 4.- Stoer, Einfuhrung in die Numerische
Mathematik I, Heidelberger
Taschenbucher 105 Springer 1973.