INTRODUCCION AL ANALISIS DE INTERVALO

MARIA DEL CARMEN LEAL RUBIO

1. INTRODUCCION.

El Análisis de Intervalo surge de las demandas del computador a través del tiempo, como una nueva estructura para calculos de aritmética finita. Desde su presentación hace 20 años atrás, ha tenido un rápido desarrollo. Es de gran utilidad para cálculos en los computadores. Al mismo tiempo ha crecido un gran interés en la rama de las Matemáticas que desarrolla las bases del Cálculo Numérico. El Análisis de Intervalo es una rama nueva y creciente de las Matemáticas Aplicadas. Es una aproximación a la computación que trata un intervalo como una nueva clase de números.

Quien use un computador ya sea en Ciencias Físicas, Ingeniería o en algún modelo económico, se ha preguntado seguramente acerca del efecto del error de redondeo y el error de propagación debido a datos iniciales inciertos ó valores inciertos de parámetros en modelos matemáticos.

El Análisis de Intervalo proporciona técnicas para el rastreo de errores, desarrolla algoritmos, prueba de con-vergencia para métodos iterativos en el computador, existen-cia o no existencia de soluciones para una variedad de ecua-ciones etc.

2. CONCEPTOS GENERALES.

Definición 1 :

Un conjunto cerrado acotado de números reales, se llama Intervalo, es decir :

$$[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$$

es un intervalo.

Se representa un intervalo mediante una letra ma - yúscula :

$$X = [\underline{x} , \bar{x}]$$

representa un intervalo cuyos extremos son $\underline{x} , \bar{x} \in \mathbb{R}$

También podemos representar un intervalo como un par ordenado de números reales a y b , al igual que un número racional se representa por un par ordenado de números enteros ó un número complejo, como un par ordenado de números reales.

Definición 2 :

Una n -upla ordenada de intervalos

$$(X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_n) \text{ representa un Vector}$$

Intervalo n -Dimensional. Así un vector bidimensional, tiene la forma :

$$V = (X_1 , X_2)$$

$$\text{donde } X_1 = [\underline{x}_1 , \bar{x}_1] \text{ y } X_2 = [\underline{x}_2 , \bar{x}_2]$$

Un vector bidimensional también representa un rectángulo de puntos (x_1 , x_2) , tal que

$$\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1 \quad \text{y} \quad \underline{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2$$

El INTERVALO DEGENERADO $[a, a]$ lo asociamos con el número real a .

Si el número real x está en el intervalo X , escribimos $x \in X$.

Similarmente si $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un vector real y $V = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un vector intervalo, escribimos $v \in V$ si $x_i \in X_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Decimos que dos intervalos son IGUALES si sus correspondientes puntos extremos son iguales, es decir

$$X = Y \text{ ssi } \underline{x} = \underline{y} \text{ y } \bar{x} = \bar{y}$$

La INTERSECCION de dos intervalos X y Y es vacía, $X \cap Y = \emptyset$ si $\underline{x} > \bar{y}$ (1) ó ; $\underline{y} > \bar{x}$ (2). En caso contrario la intersección de X y Y es otro intervalo y

$$X \cap Y = [\max(\underline{x}, \underline{y}); \min(\bar{x}, \bar{y})] \quad (3)$$

$$X \cap Y = \emptyset \quad (1)$$

$$X \cap Y = \emptyset \quad (2)$$

$$X \cap Y = [\underline{y}, \bar{x}] \quad (3)$$

La intersección de dos vectores intervalos es vacía si la intersección de cualquiera de sus componentes correspondientes es vacía.

En caso contrario para

$$V_1 = (X_1, X_2, \dots, X_n), \quad V_2 = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

tenemos

$$V_1 \cap V_2 = (X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2, \dots, X_n \cap Y_n)$$

el cual es nuevamente un vector intervalo.

Si dos intervalos X y Y tienen intersección no vacía, su unión $X \cup Y = [\min(\underline{x}, \underline{y}); \max(\bar{x}, \bar{y})]$ es nuevamente un intervalo.

La unión de dos vectores intervalo que se intersecan, no es generalmente, un vector intervalo.

La transitividad de la relación de orden "Menor que", aplicada a intervalos, nos dice que :

$$X < Y \quad \text{ssi} \quad \bar{x} < \underline{y}$$

Con la relación de orden "inclusión" tenemos que

$$X \subseteq Y \quad \text{ssi} \quad \underline{y} \leq \underline{x} \quad \text{y} \quad \bar{x} \leq \bar{y}$$

$$\text{Si } V_1 = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ y}$$

$$V_2 = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \text{ son vectores intervalos, tenemos:}$$

$$V_1 \subseteq V_2 \quad \text{si} \quad X_i \subseteq Y_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Definición 3 :

El ANCHO del intervalo $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ está dado por :

$$\omega(X) = \bar{x} - \underline{x}$$

Similarmente el ancho de un vector intervalo $V = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ está definido por :

$$\omega(V) = \max(\omega(X_1), \omega(X_2), \dots, \omega(X_n))$$

Definición 4 :

El VALOR ABSOLUTO de un intervalo X se encuentra por :

$$|X| = \max(|\underline{x}|, |\bar{x}|)$$

ssi $|x| \leq |X|$ para cada $x \in X$

Llamamos Norma de un Vector Intervalo a :

$$\|V\| = \max(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|).$$

Obtenemos el Punto Medio de un intervalo mediante la fórmula :

$$m(X) = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$$

Para un vector intervalo tenemos

$$m(V) = (m(X_1), m(X_2), \dots, m(X_n))$$

Definición 5 :

Una MATRIZ INTERVALO es una matriz cuyos coeficientes son intervalos.

Sea A una matriz intervalo con coeficiente A_{ij} , sea B una matriz de coeficientes reales b_{ij} tal que $b_{ij} \in A_{ij}$ para todo ij , entonces $B \in A$

La Norma de una Matriz Intervalo está dada por :

$$\| A \| = \max_i \sum_j | A_{ij} |$$

Si B es una matriz real y A es una matriz intervalo tal que $B \in A$, entonces $\| B \| \leq \| A \|$

El Ancho de una matriz intervalo está dado por :

$$\omega(A) = \max_{i,j} \omega(A_{i,j})$$

La matriz intervalo Punto Medio es :

$$(m(A))_{i,j} = m(A_{i,j})$$

Esta definición significa que $m(A)$ representa una matriz con coeficientes reales $(m(A))_{ij}$ elegidos como los puntos medios de los intervalos correspondientes a la matriz A.

3. ARITMETICA DE INTERVALOS

Definición 6 :

Podemos definir la Adición intervalo de dos maneras

1. Considerando los intervalos como números, tal que :

$$X + Y = Z, \text{ donde } Z = [\underline{z}, \bar{z}]$$

$$\text{con } \underline{z} = \underline{x} + \underline{y} ; \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

2. Sumando las siguientes inecuaciones

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

$$\underline{y} \leq y \leq \bar{y}$$

$$\underline{x} + \underline{y} \leq x + y \leq \bar{x} + \bar{y}$$

$$\text{Luego } X + Y = \{ x+y / x \in X ; y \in Y \}$$

Definición 7 :

Definimos el Intervalo Negativo por

$$-X = -[\underline{x}, \bar{x}] = [-\bar{x}, -\underline{x}]$$

Definición 8 :

La Diferencia de Intervalos la definimos por :

$$X - Y = X + (-Y) = \{ x-y / x \in X ; y \in Y \}$$

$$\text{ó } X - Y = [\underline{x} - \bar{y} ; \bar{x} - \underline{y}]$$

Definición 9 :

El Recíproco de un intervalo es :

$$1/X = \{ 1/x / x \in X \}$$

Si X es un intervalo que no contiene el número cero, entonces

$$1/X = [1/\bar{x} ; 1/\underline{x}] \rightarrow \underline{x} > 0 \text{ ó } \bar{x} < 0$$

Si X contiene al cero, es decir $\underline{x} \leq 0 \leq \bar{x}$, entonces si $x \in X$, tenemos que:

$$\text{ó } 1/x \geq 1/\bar{x} \text{ ó } 1/x \leq 1/\underline{x}$$

En este caso, el conjunto $1/X = \{ 1/x \mid x \in X \}$ es no acotado y no puede ser representado como un intervalo cuyos puntos extremos sean números reales.

Definición 10 :

El Producto de dos Intervalos está dado por :

$$X \cdot Y = \{ xy \mid x \in X; y \in Y \}$$

y calculamos sus extremos :

$$\underline{x \cdot y} = \min (\underline{x \cdot y}; \underline{x \cdot \bar{y}} ; \bar{x \cdot y} ; \bar{x \cdot \bar{y}})$$

$$\overline{x \cdot y} = \max (\underline{x \cdot y}; \underline{x \cdot \bar{y}} ; \bar{x \cdot y} ; \bar{x \cdot \bar{y}})$$

Podemos reducir el número de productos de las fórmulas anteriores. Simplemente analizando los puntos extremos de los intervalos dados, X e Y .

1. Si $0 \leq \underline{x} ; 0 \leq \underline{y} \rightarrow \underline{x \cdot y} = \underline{x \cdot y} ; \overline{x \cdot y} = \bar{x \cdot \bar{y}}$
2. Si $\underline{x} \leq 0 \leq \bar{x} ; 0 < \underline{y} \rightarrow \underline{x \cdot y} = \underline{x \cdot \bar{y}} ; \overline{x \cdot y} = \bar{x \cdot \bar{y}}$
3. Si $\bar{x} \leq 0 ; 0 \leq \underline{y} \rightarrow \underline{x \cdot y} = \underline{x \cdot \bar{y}} ; \overline{x \cdot y} = \bar{x \cdot y}$
4. Si $\bar{x} \leq 0 ; \underline{y} \leq 0 \leq \bar{y} \rightarrow \underline{x \cdot y} = \underline{x \cdot \bar{y}} ; \overline{x \cdot y} = \bar{x \cdot \bar{y}}$
5. Si $\bar{x} \leq 0 ; \underline{y} \leq 0 \leq \bar{y} \rightarrow \underline{x \cdot y} = \underline{x \cdot \bar{y}} ; \overline{x \cdot y} = \underline{x \cdot y}$
6. Si $0 \leq \underline{x} ; \underline{y} \leq 0 \rightarrow \underline{x \cdot y} = \bar{x \cdot \underline{y}} ; \overline{x \cdot y} = \underline{x \cdot \bar{y}}$
7. Si $\underline{x} \leq 0 < \bar{x} ; \bar{y} \leq 0 \rightarrow \underline{x \cdot y} = \bar{x \cdot \underline{y}} ; \overline{x \cdot y} = \underline{x \cdot \bar{y}}$
8. Si $\bar{x} \leq 0 ; \bar{y} \leq 0 \rightarrow \underline{x \cdot y} = \bar{x \cdot \bar{y}} ; \overline{x \cdot y} = \underline{x \cdot y}$
9. Si $\underline{x} \leq 0 \leq \bar{x} ; \underline{y} \leq 0 \leq \bar{y} ;$ para este caso tenemos :

$$\underline{x \cdot y} = \min (\underline{x \cdot \bar{y}} ; \bar{x \cdot \underline{y}})$$

$$\overline{x \cdot y} = \max (\underline{x \cdot \underline{y}} ; \bar{x \cdot \bar{y}})$$

Como podemos observar, los primeros 8 casos, solo

se necesita un producto para cada punto extremo del intervalo $X \cdot Y$, solamente el noveno caso requiere de dos productos.

Definición 11 :

Para el Cuociente de dos intervalos definimos :

$$X/Y = X \cdot (1/Y) = \{ x/y / x \in X ; y \in Y \}$$

Si el número cero no está contenido en Y , entonces X/Y es un nuevo intervalo y sus puntos extremos, pueden ser calculados usando las formulas del producto dadas anteriormente.

4. PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LA ARITMETICA DE INTERVALOS.

Las siguientes propiedades algebraicas de la aritmética de intervalos son consecuencia inmediata del conjunto de definiciones de las operaciones aritméticas de intervalos dadas anteriormente.

1. Asociatividad :

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$$

Para todo intervalo X, Y, Z

2. Conmutatividad :

$$X + Y = Y + X$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

Para todo intervalo X, Y

3. Elemento Neutro :

$$\text{Para la Adición : } 0 + X = X + 0 = X$$

$$\text{Para el Producto: } 1 \cdot X = X \cdot 1 = X$$

4. Distributividad : no siempre se cumple : Por ejemplo :

$$[1, 2] \cdot (1 - 1) = 0$$

mientras que :

$$[1, 2] \cdot 1 - [1, 2] \cdot 1 = [-1, 1] \neq 0$$

5. Subdistributividad. Esta es una alternativa para la distributividad ya que siempre se cumple

$$X \cdot (Y + Z) \subseteq X \cdot Y + X \cdot Z$$

En ciertos casos especiales la distributividad se cumple, por ejemplo :

$$a) \quad x \cdot (Y + Z) = x \cdot Y + x \cdot Z$$

siendo $x \in \mathbb{R}$ y Y, Z intervalos

$$b) \quad X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z \quad \text{si} \quad Y \cdot Z > 0$$

Luego podemos distribuir la multiplicación por un número real y podemos distribuir la multiplicación por cualquier intervalo por medio de sumas de intervalos, todos del mismo signo.

Con la identificación de intervalos degenerados con números reales, la aritmética de intervalo es una extensión de la aritmética real y se reduce a la aritmética real ordinaria para intervalos de amplitud cero.

Observación :

$$X - X = 0 \quad \text{y} \quad X/X = 1 \quad \text{ssi} \quad X \text{ es de ancho cero.}$$

De otra manera

$$X - X = [\underline{x} - \bar{x} ; \bar{x} - \underline{x}] + \omega(X) \cdot [-1, 1]$$

$$X/X = [\underline{x}/\bar{x} ; \bar{x}/\underline{x}] \quad \text{para} \quad 0 < \underline{x} \quad \text{y}$$

$$X/X = [\bar{x}/\underline{x} ; \underline{x}/\bar{x}] \quad \text{para} \quad \bar{x} < 0$$

La Ley de Cancelación se cumple para la suma de intervalos.

$$X + Z = Y + Z \rightarrow X = Y$$

Definición 12 :

Por Intervalo simétrico, se entiende un intervalo X , tal que $\underline{x} = -\bar{x}$. Luego, X es simétrico si y solo si $m(X) = 0$

Si X es un intervalo simétrico, entonces

$$|X| = \frac{\omega(X)}{2} \quad y$$

$$X = |X| \cdot [-1, 1]$$

Si X y Y son intervalos simétricos, entonces :

$$X + Y = X - Y = (|X| + |Y|) \cdot [-1, 1] ;$$

$$X \cdot Y = |X| \cdot |Y| \cdot [-1, 1]$$

Si X , Y y Z son intervalos simétricos, entonces :

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z = |X| \cdot (|Y| + |Z|) \cdot [-1, 1]$$

Un intervalo arbitrario X puede escribirse como la suma de un número real y un intervalo simétrico:

$$X = m + W \quad \text{donde} \quad m = m(X) \quad y$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \omega(X) \cdot [-1, 1]$$

Es decir :

$$X = [\underline{x}, \bar{x}] = (\underline{x} + \bar{x}) / 2 + ((\bar{x} - \underline{x}) / 2) \cdot [-1, 1]$$

Si Y es un intervalo simétrico y X es cualquier intervalo, entonces

$$X \cdot Y = |X| \cdot Y \quad y$$

$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ si Y y Z son intervalos simétricos, y X cualquier intervalo.

FUENTE DE INFORMACION :

- Apuntes de R.E. MOORE
Universidad de Wisconsin
Madison, 1978.