Proyecciones

Vol. 18, N° 1, pp. 127-136, July 1999

DOI: 10.22199/S07160917.1999.0001.00009

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

Sur l'homologie des déformations de modules différentiels

ALAIN GUICHARDET

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, France

Abstract

Résumé. *Ce travail est consacré à la démonstration de deux résultats concernant l'homologie des déformations de modules différentiels, et reliant respectivement l'homologie d'une déformation formelle à celle d'une déformation "à paramètre fixé" et à celle de la déformation triviale.*

Summary. *This work is devoted to the proof of two results concerning the homology of deformations of differential modules, and relating respectively the homology of a formal deformation to the homology of a deformation "with fixed parameter" and of the trivial deformation.*

1. Introduction

Dans l'étude des déformations de structures algébriques, on peut adopter deux points de vue apparemment assez distincts : celui des “déformations formelles” et celui dit “à paramètre fixé”. Prenons par exemple le *plan quantique* ; on part de l'algèbre A des polynômes à deux indéterminées sur un corps k ; A est engendrée par deux éléments X_1 et X_2 soumis à la relation $X_1X_2 = X_2X_1$; on peut considérer deux sortes de déformations de A :

- 1) une algèbre A_h sur l'anneau $k[[h]]$ des séries formelles à coefficients dans k ; A_h est engendrée par les éléments X_1 et X_2 soumis à la relation $X_1X_2 = e^h X_2X_1$ où e^h est la série formelle $\sum_{n \geq 0} h^n/n!$;
- 2) une algèbre A_q sur k , où maintenant q est un élément fixé non nul de k ; A_q est engendrée par les éléments X_1 et X_2 soumis à la relation $X_1X_2 = q X_2X_1$.

On constate que, si q est suffisamment “générique” (par exemple non racine de l'unité), les algèbres A_h et A_q ont des propriétés très semblables, notamment en ce qui concerne l'homologie ou la cohomologie de Hochschild. Mieux, certains auteurs, étudiant le point de vue “à paramètre fixé”, passent au point de vue “déformation formelle” pour pouvoir utiliser une suite spectrale associée à la filtration d'un certain complexe par les puissances de h (cf. [4], [6]).

L'objet de la première partie du présent travail est d'énoncer un résultat à la fois précis et général reliant les homologies de deux modules différentiels respectivement sur k et $k[[h]]$; sa démonstration repose sur des propriétés classiques, mais non triviales, des modules plats et des modules sur des anneaux principaux.

Dans la seconde partie, on donne une condition suffisante pour que l'homologie d'un module différentiel K sur $k[[h]]$ se calcule simplement à partir de l'homologie du k -module différentiel K/hK ; ce résultat peut se déduire des propriétés générales des suites spectrales, mais il m'a semblé utile d'en donner une preuve directe et élémentaire.

2. Relation entre les points de vue “déformations

formelles” et “à paramètre fixé”.

Notations. On désignera par

- k un corps commutatif de caractéristique 0 ;
- k' l'anneau de séries formelles $k[[h]]$;
- q un élément de k transcendant sur le corps Q des rationnels ;
- λ un élément de k' transcendant sur Q ;
- C un k -espace vectoriel de dimension finie notée m , muni d'une base (e_i) ;
- $P_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, m$ des polynômes à une indéterminée sur Q vérifiant $\sum_j P_{i,j} P_{j,k} = 0$ pour tout i et tout k ;
- d le k -endomorphisme de C de coefficients $d_{i,j} = P_{i,j}(q)$; on a $d^2 = 0$;
- C' le k' -module $C \otimes_k k' = C[[h]]$;
- d' le k' -endomorphisme de C' de coefficients $d_{i,j} = P_{i,j}(\lambda)$; on a $d'^2 = 0$;
- $H(C, d)$ l'homologie du module différentiel (C, d) , i.e. $H(C, d) = \text{Ker } d / \text{Im } d$;
- $H(C', d')$ l'homologie du module différentiel (C', d') .

On rappelle que k' est un anneau principal : tout idéal de k' est engendré par une puissance de h ; si X est un k' -module, on désigne par X^t son sous-module de torsion, ensemble des éléments annulés par une puissance de h , et on pose $X^{st} = X/X^t$ (quotient sans torsion de X).

Théorème 2.1. *Il existe un isomorphisme de k' -modules*

$$H(C', d')^{st} \approx H(C, d) \otimes_k k'.$$

Autres notations. On notera k'' le corps des quotients de k' et on posera

$$C'' = C' \otimes_{k'} k'' = C \otimes_k k''$$

$$d'' = d' \otimes_{k'} \text{id}_{k''} \text{ (} k''\text{-endomorphisme de } C'' \text{ de coefficients } P_{i,j}(\lambda))$$

$$d''' = d \otimes_k \text{id}_{k''} \text{ (} k''\text{-endomorphisme de } C'' \text{ de coefficients } P_{i,j}(q)).$$

Lemme 2.1. *On a $H(C'', d'') \approx H(C', d') \otimes_{k'} k''$.*

Démonstration. Le corps k'' est un k' -module plat (cf.[1], ch. II, §2, théorème 1) et cela implique notre assertion ([1], ch I, §2, N° 3, définition 2 et remarque 2 qui suit).

Lemme 2.2. On a $H(C'', d''') \approx H(C, d) \otimes_k k''$.

Démonstration. Même démonstration qu'au lemme 2.1, puisque k'' est un k -module plat.

Lemme 2.3. On a $H(C'', d'') \approx H(C'', d''')$.

Cela résulte du résultat plus général suivant :

Lemme 2.4. Soit K un corps de caractéristique nulle, q_1 et q_2 des éléments de K transcendants sur Q , E un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base (e_i) , $(P_{i,j})$ des polynômes ayant les propriétés indiquées ci-dessus, enfin d_1 , (resp. d_2) le K -endomorphisme de E de coefficients $P_{i,j}(d_1)$ (resp. $P_{i,j}(d_2)$). Alors

$$H(E, d_1) \approx H(E, d_2).$$

Démonstration. Pour $n = 1, 2$, notons K_n le sous-corps de K engendré par q_n et E_n le sous- K_n -espace vectoriel de E engendré par les e_i ; E_n est stable par d_n et (E, d_n) s'obtient par extension des scalaires à partir de (E_n, d_n) ; ceci implique, comme au lemme 2.2, que

$$H(E, d_n) \approx H(E_n, d_n) \otimes_{K_n} K.$$

Par ailleurs K_1 et K_2 sont isomorphes au corps de fractions rationnelles $Q(X)$, E_1 et E_2 s'identifient au $Q(X)$ -espace vectoriel F de base (e_i) , et d_1 et d_2 s'identifient au $Q(X)$ -endomorphisme de F de coefficients $P_{i,j}(X)$.

Lemme 2.5. On a

$$H(C', d') \otimes_{k'} k'' \approx H(C', d')^{st} \otimes_{k'} k''.$$

Démonstration. Notons pour simplifier M le k' -module $H(C', d')$ et M^t son sous-module de torsion. Comme k'' est un k' -module plat, la suite exacte

$$0 \rightarrow M^t \rightarrow M \rightarrow M^{st} \rightarrow 0$$

entraîne une suite exacte

$$0 \rightarrow M^t \otimes_{k'} k'' \rightarrow M \otimes_{k'} k'' \rightarrow M^{st} \otimes_{k'} k'' \rightarrow 0;$$

mais $M^t \otimes_{k'} k''$ est nul ; en effet, pour tout élément $m \otimes \mu$ de $M^t \otimes_{k'} k''$, il existe λ non nul dans k' tel que $\lambda m = 0$; λ est inversible dans k'' (qui est un corps), donc

$$m \otimes \mu = m \otimes \lambda \lambda^{-1} \mu = \lambda m \otimes \lambda^{-1} \mu = 0.$$

Démonstration du théorème. Les lemmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.5 montrent que

$$H(C', d')^{st} \otimes_{k'} k'' \approx H(C, d) \otimes_k k''$$

ou encore

$$(1) \quad H(C', d')^{st} \otimes_{k'} k'' \approx (H(C, d) \otimes_k k') \otimes_{k'} k''.$$

Le k' -module C' est libre de rang fini ; comme k' est un anneau principal, le sous- k' -module $\text{Ker } d'$ est aussi libre de rang fini (cf. [2], ch. VII, §3, prop. 1) ; $H(C', d')$, quotient de $\text{Ker } d'$, est de type fini ; $H(C', d')^{st}$ est de type fini et sans torsion, donc libre de rang fini (cf. [2], ch. VII, §4, N° 3, cor. 2). Le k' -module $H(C, d) \otimes_k k'$ est évidemment aussi libre de rang fini ; alors (1) montre que les rangs de $H(C', d')^{st}$ et $H(C, d) \otimes_k k'$ sont tous deux égaux à la dimension du k'' -espace vectoriel $H(C', d')^{st} \otimes_{k'} k''$.

Exemple. (Homologie de Hochschild de l'espace affine quantique de dimension N ; cf. [5]).

On part de l'algèbre de polynômes $A = k[X_1, \dots, X_N]$ et on considère

1) une déformation formelle A_h de A , algèbre sur k' engendrée par les éléments $X_1, \dots, X_N$ soumis aux relations

$$X_i X_j = e^h X_j X_i \quad \text{pour } i < j ;$$

2) une déformation "à paramètre fixé" A_q de A , algèbre sur k engendrée par les éléments $X_1, \dots, X_N$ soumis aux relations

$$X_i X_j = q X_j X_i \quad \text{pour } i < j.$$

Dans les deux cas, le complexe qui calcule l'homologie de Hochschild est de dimension infinie, mais on se ramène à des dimensions finies en se limitant aux éléments homogènes de degré fixé ; le théorème 2.1 montre alors que, si q est transcendant sur Q ,

$$HH_n(A_h)^{st} \approx HH_n(A_q) \otimes_k k'.$$

Notons que $HH_n(A_h)$ n'est pas sans torsion en général ; par exemple $HH_0(A_h)$ est le quotient de A_h par le sous-module $[A_h, A_h]$ engendré par les commutateurs ; lorsque $N = 2$, on peut écrire les éléments de A_h sous la forme

$$a = \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} a_{m,n} X_1^m X_2^n ;$$

alors $[A_h, A_h]$ est l'ensemble des éléments de A_h de la forme ha avec

$$a = \sum_{m > 0} \sum_{n > 0} a_{m,n} X_1^m X_2^n ;$$

on voit que hX_1X_2 appartient à $[A_h, A_h]$, mais pas X_1X_2 .

Remarque. On peut généraliser le théorème 1 en prenant n éléments $q_1, \dots, q_n$ (resp. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) algébriquement indépendants de k (resp. k') et des polynômes $P_{i,j}$ à n indéterminées. Cela s'applique notamment à l'homologie de Hochschild de l'algèbre engendrée par 3 éléments X_1, X_2, X_3 soumis aux relations

$$X_1X_2 = e^h X_2X_1 , \quad X_2X_3 = e^h X_3X_2 , \quad X_1X_3 = X_3X_1 + hX_2^2 ;$$

on prendra ici $n = 2$, $\lambda_1 = h$, $\lambda_2 = e^h$ (cf. [5]).

3. Passage à la limite classique.

Notations.

On définit k et k' comme au §2 ; on désigne par K_0 un k -espace vectoriel de dimension finie et par d un k' -endomorphisme de carré nul de $K = K_0 \otimes_k k'$; on identifie K/hK avec K_0 et on note d_0 le k -endomorphisme de K_0 obtenu à partir de d par passage au quotient. L'application canonique $K \rightarrow K_0$ entraîne une application $\Phi : H(K, d) \rightarrow H(K_0, d_0)$.

Théorème 3.1. *Si Φ est surjective, il existe des isomorphismes de k' -modules*

$$H(K, hd)^{st} \approx H(K, d) \approx H(K_0, d_0) \otimes_k k' .$$

Notations. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose $K^p = h^p K$ (égal à K si $p \leq 0$) ; on a $d(K^p) \subset K^p$ et on note d^p la restriction de d à K^p . On pose $G^p = K^p/K^{p+1}$; on désigne par π^p l'application canonique $K^p \rightarrow G^p$, par ∂^p l'application $G^p \rightarrow G^p$ obtenue à partir de d^p par passage au quotient, et par λ^p l'application $H(K^p, d^p) \rightarrow H(G^p, \partial^p)$ déduite de π^p . Pour $p = 0$, on a $K^0 = K$, $G^0 = K_0$, $\lambda^0 = \Phi$.

Lemme 3.1. *L'application λ^p est surjective pour tout p .*

Démonstration. On a des isomorphismes $K^0 \rightarrow K^p (x \rightarrow h^p x)$ et $G^0 \rightarrow G^p$ qui transforment λ^0 en λ^p .

Lemme 3.2. *On a*

$$K^p \cap d^{-1}(K^{p+1}) \subset \text{Ker } d^p + K^{p+1}.$$

Démonstration. Comme λ^p est surjectif, on a

$$\text{Ker } \partial^p = \text{Im } \partial^p + \pi^p(\text{Ker } d^p) = \pi^p(\text{Im } d^p) + \pi^p(\text{Ker } d^p) = \pi^p(\text{Ker } d^p) ;$$

par ailleurs on a facilement $K^p \cap d^{-1}(K^{p+1}) \subset (\pi^p)^{-1}(\text{Ker } \partial^p)$ d'où le résultat.

Lemme 3.3. *On a*

$$K^p \cap d(K) \subset d(K^p) + K^{p+1}.$$

Démonstration. Pour tout $r = 0, 1, \dots, p$ posons $L^r = K^p \cap d(K^{p-r})$; on a évidemment

$$L^0 \subset L^1 \subset \dots \subset L^{p-1} \subset L^p = K^p \cap d(K)$$

et

$$L^0 = K^p \cap d(K^p) \subset d(K^p) + K^{p+1}.$$

On va montrer que, pour $1 \leq r \leq p$, on a $L^r = L^{r-1}$. Posons $q = p - r$; soit $x \in L^r = K^{q+r} \cap d(K^q)$; x s'écrit $x = dy$ avec $y \in K^q \cap d^{-1}(K^{q+r}) \subset K^q \cap d^{-1}(K^{q+1})$; le lemme 3.2 montre que $y \in \text{Ker } d^q + K^{q+1}$, et cela implique immédiatement $x \in L^{r-1}$.

Lemme 3.4. Notons χ l'application canonique $\text{Ker } d \rightarrow H(K, d)$, χ^p sa restriction à $\text{Ker } d^p$ et posons

$$H(K, d)^p = \text{Im } \chi^p = \chi(\text{Ker } d^p).$$

On a des isomorphismes

$$H(K, d)^p / H(K, d)^{p+1} \approx H(G^p, \partial^p).$$

Démonstration.

Soit $x \in \text{Ker } d^p$; le lemme 3.3 montre que, si $\chi^p(x) = 0$, $\pi^p(x) \in \text{Im } \partial^p$; on a donc une application $\mu^p : H(K, d)^p \rightarrow H(G^p, \partial^p)$, qui est surjective d'après le lemme 3.1. Reste à voir que l'on a $\text{Ker } \mu^p = H(K, d)^{p+1}$. L'inclusion $H(K, d)^{p+1} \subset \text{Ker } \mu^p$ étant facile à vérifier, démontrons l'autre. Soit $y \in \text{Ker } \mu^p$, $x \in \text{Ker } d^p$ tel que $y = \chi^p(x)$; on a $\pi^p(x) \in \text{Im } \partial^p = \pi^p(d(K^p))$; x s'écrit $du + v$ avec $u \in K^p$ et $v \in K^{p+1}$; on a $dv = dx = 0$, donc $v \in \text{Ker } d^{p+1}$; d'où $y = \chi(v) \in H(K, d)^{p+1}$.

Démonstration du théorème 3.1.

a) Démontrons que $H(K, d) \approx H(K_0, d_0) \otimes_k k'$. Comme les modules différentiels (G^p, ∂^p) et (K_0, d_0) sont isomorphes, le lemme 3.4 montre que l'on a

$$(1) \quad H(K, d)^p / H(K, d)^{p+1} \approx H(K_0, d_0).$$

Par ailleurs il suffit de montrer que $H(K, d)$ est un k' -module libre de rang fini. On a vu à la démonstration du théorème 2.1 que $H(K, d)$ est de type fini ; d'après [2], ch. VII, §4, N° 3, cor.1, $H(K, d)$ est somme directe d'un module libre de rang fini X et d'un module de torsion de type fini Y ; il existe donc un entier $n \geq 0$ tel que $h^n Y = 0$. D'autre part on a

$$H(K, d)^p = h^p H(K, d) = h^p X \oplus h^p Y ;$$

la relation (1) entraîne

$$H(K_0, d_0) = (h^p X / h^{p+1} X) \oplus (h^p Y / h^{p+1} Y) = (X / hX) \oplus (h^p Y / h^{p+1} Y) ;$$

ceci montre que $h^p Y / h^{p+1} Y$ est indépendant de p ; comme il est nul pour $p = n$, il est nul pour tout p , d'où

$$Y = hY = h^2 Y = \dots = h^n Y = 0 ;$$

$H(K, d)$ est libre de rang fini et (1) entraîne notre assertion.

b) Démontrons que $H(K, hd)^{st} \approx H(K, d)$. Notons u et v les applications canoniques $\text{Ker } hd \rightarrow H(K, hd)$ et $\text{Ker } d (= \text{Ker } hd) \rightarrow H(K, d)$ et w l'application $H(K, hd) \rightarrow H(K, d)$ qui s'en déduit. On va montrer que $\text{Ker } w = H(K, hd)^t$; si $x \in H(K, hd)^t$, il existe $n > 0$ tel que $h^n x = 0$; x s'écrit $u(y)$ avec $y \in \text{Ker } d$ et $u(h^n y) = 0$; on a alors $h^n y \in \text{Im } hd \subset \text{Im } d$; comme $H(K, d)$ est sans torsion, cela implique $y \in \text{Im } d$, d'où $x \in \text{Ker } w$. L'inclusion inverse est immédiate.

Remarque. On peut démontrer le lemme 3.4 plus rapidement en utilisant la théorie des suites spectrales ; On a vu que π^p envoie $K^p \cap d^{-1}(K^{p+1})$ dans $\text{Ker } \partial^p$; notons ρ^p l'application $K^p \cap d^{-1}(K^{p+1}) \rightarrow H(G^p, \partial^p)$ obtenue par composition. La suite spectrale associée à la filtration de K par les K^p comporte les ensembles suivants (dans les notations de [3]) :

$$Z_1^p = \rho^p(K^p \cap d^{-1}(K^{p+1}))$$

$$Z_\infty^p = \rho^p(K^p \cap \text{ker } d)$$

$$B_\infty^p = \rho^p(K^p \cap d(K)).$$

Le lemme 3.2 montre que $Z_1^p = Z_\infty^p$; les propriétés générales des suites spectrales montrent, d'une part, que cela implique $B_\infty^p = 0$, et, d'autre part, que l'on a toujours

$$Z_1^p \approx H(G^p, \partial^p) \quad , \quad Z_\infty^p / B_\infty^p \approx H(K, d)^p / H(K, d)^{p+1}.$$

Application. Considérons une déformation formelle quadratique A_h d'une algèbre de polynômes $k[x_1, \dots, x_N]$ ayant les propriétés énumérées dans [5], N° III.1 et supposons en outre que R_n admet une base de la forme indiquée dans la proposition 2 de [5] ; l'homologie de Hochschild $HH_*(A_h)$ de A_h est l'homologie d'un complexe noté (C_*, ∂_*) dans [5], N° III.4 ; posons $\partial'_* = h^{-1} \partial_*$ comme dans [5], §4. Pour appliquer le théorème 3.1 ci-dessus, on prend pour (K, d) le sous-complexe de (C_*, ∂'_*) formé des éléments homogènes ayant un degré fixé ; d'après un résultat non publié de J. Pichaud, le complexe (K_0, d_0) est celui qui calcule l'homologie $HP_*(k^N, \Pi)$ de la structure de Poisson sur $k[x_1, \dots, x_N]$ associée à la déformation A_h . Le

théorème 3.1 ci-dessus dit alors que, si l'application canonique $H(C_*, \partial'_*) \rightarrow HP_*(k^N, \Pi)$ est surjective, on a des isomorphismes

$$HH_*(A_h)^{st} \approx H(C_*, \partial'_*) \approx HP_*(k^N, \Pi) \otimes_k k'.$$

L'intérêt de ce résultat tient au fait que le calcul de $HP_*(k^N, \Pi)$ est plus simple que celui de $HH_*(A_h)^{st}$; c'est d'ailleurs la méthode employée dans [6] pour faire un calcul de ce type.

References

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*.
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre*.
- [3] H. CARTAN-S.EILENBERG, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press (1956).
- [4] P. FENG-B.TSYGAN, *Hochschild and cyclic homology of quantum groups*, Commun. Math. Phys., t. **140**, pp. 481 – 521, (1991)
- [5] A. GUICHARDET, *Homologie de Hochschild des déformations quadratiques d'algèbres de polynômes*, Communications in Algebra, t. **26/12**, pp. 4309 – 4330, (1998)
- [6] M. VAN DEN BERGH, *Non commutative homology of some three-dimensional quantum spaces*, K-theory, t. **8**, pp. 213 – 230, (1994)

Received : November, 1998

Alain Guichardet
 Centre de Mathématiques
 Ecole Polytechnique
 URA 169 du C. N. R. S.
 91.128 Palaiseau, Cedex
 France