CHAMPS DE VECTEURS HOLOMORPHES TANGENTS AUX HYPERSURFACES POLYNÔMIALES RIGIDES DE $\mathbb{C}^2$

ABDELAZIZ CHAOUECH

Universite Mouloy Ismail, Errachidia-Maroc

Abstract

In this paper, we present two works. The first give a complet description of tangent holomorphic vector fields of rigid polynomial hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ which is not spheric at the origine.

In the second we studie the propre holomorphic mappings between rigid polynomial domains Ω_1, Ω_2 in $\mathbb{C}^2$, more precisely we prove that, if $b\Omega_1$ is strictly pseudo-convexe and not spheric in at less one point, then such map is of the form $(\alpha w + f_1(z), f_2(z))$, where $\alpha \in \mathbb{R}^$ and f_1, f_2 are two polynômes.*

1. Introduction et résultats

On dit d'une hypersurface analytique réelle M de $\mathbf{C}^2$ qu'elle est rigide si elle peut être décrite par une équation de la forme $r(w, \bar{w}, z, \bar{z}) =: Imw + F(z, \bar{z}) = 0$ où F est une fonction analytique réelle telle que $F(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0) = 0$. Les champs de vecteurs holomorphes tangents à M sont les champs de la forme $X = X_1 \frac{\partial}{\partial w} + X_2 \frac{\partial}{\partial z}$ où les fonctions X_1 et X_2 sont holomorphes au voisinage de l'origine et tels que $Re \left[X_1 \frac{\partial r}{\partial w} + X_2 \frac{\partial r}{\partial z} \right]$ soit identiquement nul sur M . L'ensemble $\mathcal{L}(M)$ de ces champs a une structure d'algèbre de Lie pour le crochet usuel et l'on sait depuis les travaux d'E. Cartan que cette algèbre est de dimension finie dès que M est non dégénérée à l'origine c'est à dire dès que $\Delta r(0, 0) \neq 0$ (en fait la rigidité est superflue). Plus précisément, si la dimension réelle de $\mathcal{L}(M)$ est supérieure ou égale à 4 alors M est sphérique à l'origine, ce qui signifie qu'un biholomorphisme local applique M sur la sphère euclidienne. Une démonstration de ce résultat est accessible dans l'article de N. Stanton ([5]) où l'on trouvera également une étude détaillée de l'algèbre $\mathcal{L}(M)$ dans le cas dégénéré. On peut d'autant plus facilement expliciter $\mathcal{L}(M)$ que sa dimension est petite et la fonction F simple. L'objet de cet article est de traiter le cas polynômial. Notre principal résultat est le suivant:

Théorème 1 :

Soit $P(z, \bar{z})$ un polynôme sans termes harmoniques tel que $\Delta P(0, 0) \neq 0$.

Si l'hypersurface $M =: \{Imw + P(z, \bar{z}) = 0\}$ est non sphérique en $(0, 0)$ alors les champs de vecteurs holomorphes tangents à M sont de l'une des formes suivantes:

$$(i) \quad X = \lambda \frac{\partial}{\partial w}$$

$$(ii) \quad X = (\alpha w + A_1(z)) \frac{\partial}{\partial w} + A_2(z) \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(iii) \quad X = (\alpha w^2 + A_1(z)w + A_2(z)) \frac{\partial}{\partial w} + (A_2(z)w + B_2(z)) \frac{\partial}{\partial z}$$

où $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ et les A_j, B_j sont des fractions rationnelles telles que $A_2 \neq 0$ et $\deg(B_2) \leq \deg P$.

Notre étude donne en fait les fractions A_j et B_j sous forme explicite, en vue des applications, nous avons systématiquement investigué cet aspect pour le cas des champs polynômiaux. Nous établissons la:

Proposition 1 : Soit $M = \{Imw + P(z, \bar{z}) = 0\}$ une hypersurface polynômiale rigide telle que $\Delta P \geq 0$ et $\Delta P(0, 0) \neq 0$ soit $\vec{X}$ un champ de vecteurs holomorphe défini au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ et tangent à M dont on suppose qu'il est de l'une des formes (ii) ou (iii) du théorème 1..

Si $\vec{X}$ est de la forme (ii) où $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_1, A_2 sont des polynômes tels que $A_2 \not\equiv 0$, alors on se trouve dans l'un des cas suivants:

a) $\alpha \neq 0$, $A_2 = a_0^2 + a_1^2 z$, ($a_0 \in \mathbf{C}, a_1 \in \mathbf{C}^*$) et il existe un polynôme holomorphe h tel que le changement de variables $(w^*, z^*) = (w + h(z), a_0^2 + a_1^2 z)$ transforme M en $M^* = \{Imw^* + H^*(z^*, \bar{z}^*) = 0\}$

où H^* est un polynôme homogène. De plus $H^* = M|z^*|^{2m}$ si $Ima_1^2 \neq 0$.

b) $\alpha = 0$, $A_2 = a_0^2 + i\lambda z$, ($a_0^2 \in \mathbf{C}, \lambda \in \mathbb{R}^*$) et il existe un polynôme holomorphe h tel que le changement de variables $(w^*, z^*) = (w + h(z), a_0^2 + i\lambda z)$ transforme M

en $M^* = \left\{ Imw^* + \sum_{k=1}^N \alpha_k |z^*|^{2k} = 0 \right\}$ et $\vec{X}$ en $\lambda_1 \frac{\partial}{\partial w^*} + i\lambda_2 z^* \frac{\partial}{\partial z^*}$.

c) $\alpha = 0$, $A_2 = a_0^2$, ($a_0^2 \in \mathbf{C}^*$) et il existe un polynôme holomorphe h nul à l'origine, tel que le changement de variables $(w^*, z^*) = (w + h(z), \frac{1}{a_0^2} z)$ transforme M en $M^* = \left\{ Imw^* + \sum_{k=1}^N \alpha_k (Imz^*)^{2k} = 0 \right\}$ et $\vec{X}$ en $\frac{\partial}{\partial z^*}$.

Si $\vec{X}$ est la forme (iii) où $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_j, B_j sont des polynômes tels que $A_2 \not\equiv 0$ et $\deg(B_2) \leq \deg(P)$, alors $\alpha \neq 0$, $A_2 = a_0^2 + a_1^2 z$, ($a_0 \in \mathbf{C}, a_1 \in \mathbf{C}^*$) et il existe un polynôme holomorphe h tel que le changement de variables $(w^*, z^*) = (w + h(z), a_0^2 + a_1^2 z)$

transforme M en $M^* = \left\{ Imw^* + C|z^*|^{2m} = 0 \right\}$,

$C \in \mathbb{R}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

La dernière partie de cet article est consacrée aux applications holomorphes propres entre domaines polynomiaux rigides de $\mathbf{C}^2$. Ces applications étant ramifiées, il est crucial d'extraire le plus d'informations possible d'une étude locale. Pour cela, nous considérons les images directes du champ $\frac{\partial}{\partial w}$. Nous commençons par montrer que ces champs sont nécessairement polynomiaux puis nous utilisons les résultats précédents. Cela nous conduit au:

Théorème 2 : Soient P_1 et P_2 deux polynômes sous-harmoniques sans termes harmoniques et Ωp_j ($j = 1, 2$) les domaines de $\mathbf{C}^2$ définis par

$$\Omega p_j = \{Imw + P(z, \bar{z}) < 0\}.$$

noindent Soit $f : \Omega p_1 \longrightarrow \Omega p_2$

une application holomorphe propre. Si $b\Omega p_1$ est strictement pseudoconvexe et non sphérique en au moins un point alors: $f = (\alpha w + f_1(z), f_2(z))$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

et f_1, f_2 sont des polynômes.

En ce qui concerne les biholomorphismes de domaines polynômiaux rigides de $\mathbf{C}^2$, K. Oeljeklaus ([4]) avait obtenu une classification et, en particulier, un analogue du théorème 2 sans hypothèse de non sphéricité. Cependant sa méthode ne s'adapte pas au cas ramifié traité ici. si l'on caractérisait les hypersurfaces polynômiales rigides et sphériques en tout point de stricte pseudoconvexité (nous conjecturons qu'elles sont de la forme $M =: \{Imw + |p(z)|^2 = 0\}$ où p est un polynôme holomorphe) alors notre résultat généraliserait complètement celui de ([4]). Le problème de l'équivalence holomorphe entre domaines polynomiaux rigides de $\mathbf{C}^{n+1}$ n'est à ce jour pas résolu, les seuls résultats connus sont dus à B. Coupet et S. Pinchuk et concernent le cas homogène pondéré ([3]).

Notations :

- $\deg(P)$ désigne le degré d'un polynôme P sur $\mathbf{C}$.
- $\mathcal{P}$ désigne le cône des polynômes sous-harmoniques sans termes harmoniques sur $\mathbf{C}$.
- $\mathcal{H}$ désigne l'algèbre des polynômes holomorphes sur $\mathbf{C}$.

Ce travail a été en partie réalisé lors de mon séjour à l'Université de Lille, je remercie cette institution pour son hospitalité et F. Berteloot pour de fructueuses discussions.

2. Calcul explicite de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(M)$

On établit ici le théorème 1. Nous commençons par montrer que $\overrightarrow{X}$ est de la forme (i), (ii) ou (iii) où les A_j, B_j sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine.

Nous utilisons pour cela le lemme suivant, dont la preuve sera donnée à la fin de cette partie.

Lemme 1 : Soient $P \in \mathcal{P}$

tel que $\Delta P(0,0) \neq 0$, $F_1(z)$, $G_1(z)$, $F_2(z)$ et $G_2(z)$ des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}$.

i) Si $\operatorname{Re} \left[\left(F_1 + F_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) e^{i\alpha P} \right] \equiv 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$

ii) Si $(F_1 + F_2 \frac{\partial P}{\partial z}) + (\overline{G}_1 + \overline{G}_2 \frac{\partial P}{\partial \bar{z}}) e^{i\alpha P} \equiv 0$ et $\alpha \neq 0$, alors $F_1 \equiv F_2 \equiv G_1 \equiv G_2 \equiv 0$.

Comme M n'est pas sphérique à l'origine, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(M)$ des champs de vecteurs holomorphes tangents à M est de dimension réelle au plus égale à 3 et donc la famille $\left\{ \frac{\partial}{\partial w}, \overrightarrow{X}, \left[\overrightarrow{X}, \frac{\partial}{\partial w} \right], \left[\left[\overrightarrow{X}, \frac{\partial}{\partial w} \right], \frac{\partial}{\partial w} \right] \right\}$ n'est pas libre. Nous distinguerons trois cas.

1^{er} cas : $\left\{ \frac{\partial}{\partial w}, X \right\}$ n'est pas libre

Dans ce cas $\overrightarrow{X}$ est de la forme (i).

2^{ème} cas : $\left\{ \frac{\partial}{\partial w}, \overrightarrow{X} \right\}$ est libre et $\left\{ \frac{\partial}{\partial w}, \overrightarrow{X}, \left[\overrightarrow{X}, \frac{\partial}{\partial w} \right] \right\}$ ne l'est pas.

Le champ $\overrightarrow{X} = X_1 \frac{\partial}{\partial w} + X_2 \frac{\partial}{\partial z}$ satisfait l'équation différentielle:

$$(2.1) \quad \frac{\partial X_1}{\partial w} + \alpha_1 X_1 + \alpha_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial X_2}{\partial w} + \alpha_1 X_2 = 0$$

où: $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$.

Intégrons l'équation (1). Si α_1 était non nul on aurait:

$$(2.2) \quad \overrightarrow{X} = (A_1(z)e^{-\alpha_1 w} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1}) \frac{\partial}{\partial w} + A_2(z)e^{-\alpha_1 w} \frac{\partial}{\partial z}$$

d'où, $\overrightarrow{X}$ étant tangent à M :

$$(2.3) \quad \operatorname{Re} \left[\left(\frac{A_1}{2i} + A_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) e^{i\alpha_1 P} \right] \equiv 0$$

D'après le lemme 1. i), on aurait alors $A_1 \equiv A_2 \equiv 0$ et donc $\vec{X} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial w}$ ce qui est exclu. Ainsi $\alpha_1 = 0$ et $\vec{X}$ est de la forme (ii). Comme $\vec{X}$ est tangent à M , A_2 ne peut être identiquement nul car on aurait alors $\alpha P - \text{Im} A_1 \equiv 0$ et donc $\vec{X} = A_1(0) \frac{\partial}{\partial w}$ avec $A_1 = A_1(0) \in \mathbb{R}$.

1^{ème} cas : $\left\{ \frac{\partial}{\partial w}, \vec{X}, \left[\vec{X}, \frac{\partial}{\partial w} \right] \right\}$ est libre.

Le champ $\vec{X}$ satisfait l'équation différentielle:

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 X_1}{\partial w^2} + \alpha_2 \frac{\partial X_1}{\partial w} + \alpha_1 X_1 + \alpha_0 \equiv 0 \text{ et } \frac{\partial^2 X_2}{\partial w^2} + \alpha_2 \frac{\partial X_2}{\partial w} + \alpha_1 X_2 \equiv 0$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Intégrons l'équation (4). Si $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ était non nul, alors $\vec{X}$ serait de l'une des deux formes suivantes:

$$(2.5) \quad \vec{X} = ((A_1(z)w + B_1(z))e^{rw} + a) \frac{\partial}{\partial w} + ((A_2(z)w + B_2(z))e^{rw} \frac{\partial}{\partial z}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^*$.

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \vec{X} = & (A_1(z)e^{r_1 w} + B_1(z)e^{r_2 w} + a) \frac{\partial}{\partial w} + \\ & + (A_2(z)e^{r_1 w} + B_2(z)e^{r_2 w}) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$ et $r_1 = \bar{r}_2$ si $r_1 \notin \mathbb{R}$.

Supposons que $\vec{X}$ soit de la forme (5), $\vec{X}$ étant tangent à M on aurait:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \text{Re} \left[\left(\frac{A_1}{2i} + A_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) e^{-irP} \right] &\equiv 0 \text{ et } \text{Re} \left[\left(B_1 + B_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) e^{-irP} \right] \equiv \\ &\equiv P \text{Re} \left[\left(\frac{A_1}{2} + iA_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) e^{-irP} \right] \end{aligned}$$

et donc $\vec{X} = a \frac{\partial}{\partial w}$ d'après le lemme 1. i) ce qui est exclu.

Supposons que $\vec{X}$ soit de la forme (6), comme $\left[\left[\vec{X}, \frac{\partial}{\partial w} \right], \frac{\partial}{\partial w} \right]$ est tangent à M , on aurait:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \text{Re} \left\{ r_1^2 \left[e^{r_1(t-iP)} \left(\frac{A_1}{2i} + A_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] + \right. \\ \left. + r_2^2 \left[e^{r_2(t-iP)} \left(\frac{B_1}{2i} + B_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] \right\} \equiv 0 \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où r_1 et r_2 sont réels, on déduit immédiatement de (8) et du lemme 1. i) que $\vec{X} = a \frac{\partial}{\partial w}$. Ceci est exclu.

Dans le cas où r_1 et r_2 sont conjugués on peut écrire (8) sous la forme:

$$(2.9) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(e^{i\beta t} r_1^2 \hat{A} + e^{-i\beta t} r_2^2 \hat{B}) \equiv 0$$

$$\text{où } \beta = \operatorname{Im} r_1 = \operatorname{Im} r_2 \neq 0, \quad \hat{A} = e^{-ir_1 P} \left(\frac{A_1}{2i} + A_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) \text{ et } \hat{B} = e^{-ir_2 P} \left(\frac{B_1}{2i} + B_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right).$$

De (9) on tire:

$$(2.10) \quad (\hat{A} + \overline{\hat{B}}) \equiv 0$$

ou encore:

$$(2.11) \quad \left(\frac{A_1}{2i} + A_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) + e^{2ir_1 P} \left(-\frac{\overline{B}_1}{2i} + \overline{B}_2 \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} \right) \equiv 0$$

Ce qui est exclu par le lemme 1. ii).

Ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\vec{X}$ est de la forme (iii), de plus comme $\left[\vec{X}, \frac{\partial}{\partial w} \right]$ est tangent à M , on voit que A_2 ne peut être identiquement nul car on aurait alors $\left[\vec{X}, \frac{\partial}{\partial w} \right] = A_1(0) \frac{\partial}{\partial w}$ avec $A_1 = A_1(0) \in \mathbb{R}$.

Nous déterminons maintenant la forme exacte des fonctions A_j et B_j , on peut, sans perte de généralité, supposer que $\Delta P(0,0) = 1$. Ecrivons alors P sous la forme

$$(2.12) \quad P = |z|^2 + 2|z|^2 \operatorname{Re} h(z) + 2 \sum_{k=2}^N |z|^{2k} \operatorname{Re} H_k(z)$$

où $h(z) = z(1 + q(z))$ et les $H_k(z)$ sont des polynômes holomorphes, $q(0) = 0$.

Effectuons le changement de variable $G(w, z) = (w^*, z^*) = (w, g(z))$ où $g(z) = z(1 + h(z))$. Comme le montre un calcul élémentaire, l'hypersurface $M^* = G(M)$ est défini au voisinage de l'origine par:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} w^* + |z^*|^2 + 2 \sum_{k \geq 2} |z^*|^{2k} \operatorname{Re} H_k^*(z^*) &= \\ &= \operatorname{Im} w^* + |z^*|^2 + \lambda^*(z) \equiv 0 \end{aligned}$$

où les H_k^* sont des fonctions holomorphes et en particulier:

$$(2.14) \quad H_2 = \frac{1}{2} + q + \overline{H_2^*}(0)(2h + h^2) + (H_2^*og)(1 + h)^2$$

Soit $\vec{X}$ un champ de vecteurs holomorphe tangent à M de la forme (iii). Le champ $\vec{X}^* =: G_* \vec{X}$ est de la forme:

$$(iii)^* \quad \vec{X}^* = (\alpha w^{*2} + A_1^*(z^*)w^* + B_1^*(z^*)) \frac{\partial}{\partial w^*} + (A_2^*(z^*)w^* + B_2^*(z^*)) \frac{\partial}{\partial z^*}$$

et les relations suivantes sont satisfaites:

$$(2.15) \quad \begin{cases} A_1^*og = A_1, & A_2^*og = \frac{dg}{dz} A_2 \\ B_1^*og = B_1 & B_2^*og = \frac{dg}{dz} B_2 \end{cases}$$

En exprimant que les champs $\left[\vec{X}^*, \frac{\partial}{\partial w^*} \right]$ puis $\vec{X}^*$ sont tangents à M^* on obtient les équations:

$$(2.16) \quad Re \left[\frac{A_1^*}{2i} + A_2^*(\overline{z^*} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial z^*}) \right] = \alpha (|z^*|^2 + \lambda^*)$$

$$(2.17) \quad \begin{aligned} & Re \left[\frac{B_1^*}{2i} + B_2^*(\overline{z^*} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial z^*}) \right] = \\ & = (|z^*|^2 + \lambda^*) Re \left[\frac{A_1^*}{2} + iA_2^*(\overline{z^*} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial z^*}) \right] \end{aligned}$$

Nous allons utiliser ces équations pour déterminer les fonctions holomorphes A_j^* et B_j^* , introduisons à cet effet les notations suivantes:

$$A_j^* = a_0^{*j} + a_1^{*j} z^* + z^{*2} \tilde{A}_j^*$$

$$B_j^* = b_0^{*j} + b_1^{*j} z^* + z^{*2} \tilde{B}_j^*$$

$$H_2^* = h_0^{*2} + h_1^{*2} z^* + z^{*2} \tilde{H}_2^*$$

Dans la suite, $O(z^*, \overline{z^*})$ désigne une fonction analytique réelle au voisinage de l'origine dont l'expression est susceptible de varier au cours des calculs. Comme:

$$\overline{z^*} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial z^*} = \overline{z^*} + 2|z^*|^2 (\overline{z^*} h_0^{*2} + \overline{z^*} \tilde{H}_2^*) + |z^*|^4 O(z^*, \overline{z^*}),$$

on peut écrire les équations (16) et (17) sous la forme:

$$(2.18) \quad \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{A_1^*}{2i} + a_0^{*2} \overline{z^*} \right) + |z^*|^2 \left[2a_0^{*2} (h_0^{*2} \overline{z^*} + \overline{z^*} \overline{H_2^*}) + a_1^{*2} + z^* \tilde{A}_2^* \right] \right\} = \\ = \alpha |z^*|^2 + |z^*|^4 O(z^*, \overline{z^*})$$

$$(2.19) \quad \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{B_1^*}{2i} + b_0^{*2} \overline{z^*} \right) + |z^*|^2 \left[2b_0^{*2} (h_0^{*2} \overline{z^*} + \overline{z^*} \overline{H_2^*}) + b_1^{*2} + z^* \tilde{B}_2^* \right] \right\} = \\ = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} a_0^{*1} \right) |z^*|^2 + |z^*|^4 O(z^*, \overline{z^*})$$

On déduit alors immédiatement de (18) et (19) que:

$$(2.20) \quad \begin{cases} A_1^* = a_0^{*1} + a_1^{*1} z, & \tilde{A}_2^* = -2\overline{a_0^{*2}} (\overline{h_0^{*2}} + H_2^*) \\ B_1^* = b_0^{*1} + b_1^{*1} z & \tilde{B}_2^* = -2\overline{b_0^{*2}} (\overline{h_0^{*2}} + H_2^*) \end{cases}$$

Il résulte de (14), (15) et (20) que les fonctions A_j et B_j sont des fractions rationnelles qu'il est possible d'expliciter. En particulier, on vérifie que le degré de B_2 est inférieur à celui de P .

Lorsque $\vec{X}$ est de la forme (ii), on procède de façons identique à ceci près que seule l'équation (16) est à considérer.

Il s'avère que le polynôme P est d'un type bien particulier lorsque les fonctions A_j et B_j sont des polynômes. Ceci fait l'objet de la proposition 1 suivante et jouera un rôle crucial dans la preuve du théorème 2.

Preuve de la proposition 1:

Nous utiliserons le lemme suivant dont la démonstration est repoussée à la fin de cette partie.

Lemme 2 : Soient $a \in \mathcal{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{H}$

i) Si Q est homogène et $\operatorname{Re} \left(az^k \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \equiv 0$ alors $Q \equiv 0$ ou bien $k = 1$, $a \in i\mathbb{R}$ et $Q = C|z|^{2m}$ ($C \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$)

ii) Si $\operatorname{Re} \left(az \frac{\partial Q}{\partial z} + h \right) \equiv \alpha Q$ alors $h \in i\mathbb{R}$ et Q est homogène. De plus, $Q = C|z|^{2m}$ lorsque $\operatorname{Im} a \neq 0$.

Supposons d'abord que $\overrightarrow{X}$ soit de la forme (i). Comme $\overrightarrow{X}$ est tangent à M on a :

$$(2.21) \quad \forall z \in \mathcal{C} : \operatorname{Re} \left[\frac{A_1(z)}{2i} + A_2(z) \frac{\partial P}{\partial z}(z, \bar{z}) \right] = \frac{\alpha}{2} P(z, \bar{z})$$

Ecrivons A_2 sous la forme $A_2(z) = a_0^2 + \dots + a_N^2 z^N$ où $a_N^2 \neq 0$ et désignons par H la partie homogène de plus haut degré de P .

Si N était strictement supérieur à 1 alors d'après (21), on aurait $\operatorname{Re} \left(a_N^2 z^N \frac{\partial H}{\partial z} \right) \equiv 0$. Mais ceci est impossible en vertu du lemme 2. i) et donc $N \leq 1$.

a) Si $\alpha \neq 0$ alors $\operatorname{Re} \left(a_1^2 z \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \frac{\alpha}{2} H$ et donc $N = 1$. Soient alors $Q \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{H}$ tels que $P(z, \bar{z}) = Q(a_0^2 + a_1^2 z, \bar{a}_0^2 + \bar{a}_1^2 \bar{z}) + 2 \operatorname{Im} h(a_0^2 + a_1^2 z)$.

Le changement de variable: $(w^*, z^*) = (w + 2h(a_0^2 + a_1^2 z), a_0^2 + a_1^2 z)$ transforme M en $M^* = \{ \operatorname{Im} w^* + Q(z^*, \bar{z}^*) = 0 \}$ et l'équation (21) devient:

$$(2.22) \quad \forall z^* \in \mathcal{C} : \operatorname{Re} \left[\frac{A_1^*(z^*)}{2i} + a_1^2 z^* \frac{\partial Q}{\partial z^*}(z^*, \bar{z}^*) \right] = \frac{\alpha}{2} Q(z^*, \bar{z}^*)$$

pour un certain $A_1^* \in \mathcal{H}$. Comme $\alpha \neq 0$, on déduit de (22) et du lemme 2.ii) que Q est homogène et égal à $C|z|^{2m}$ ($C > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$) lorsque $\operatorname{Im} a_1^2 \neq 0$.

b) Si $\alpha = 0$ et $a_1^2 \neq 0$ alors $\operatorname{Re} \left(a_1^2 z \frac{\partial H}{\partial z} \right) \equiv 0$ et donc $a_1^2 \in i\mathbb{R}$ en vertu du lemme 2. i).

Effectuons le même changement de variable $F(w, z) = (w^*, z^*)$ que ci-dessus et observons que $F_* \overrightarrow{X} = A_1^*(z^*) \frac{\partial}{\partial w^*} + i\lambda_2 z^* \frac{\partial}{\partial z^*}$ où $A_1^* \in \mathcal{H}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$.

Ecrivons Q sous la forme $Q = \sum_{k=1}^N 2|z^*|^{2k} \operatorname{Re} H_k^*(z^*)$ où les $H_k^* \in \mathcal{H}$ et reportons dans l'équation (22). Comme $a_1^2 \in i\mathbb{R}$, on voit facilement que les H_k^* sont des constantes puis que $F_* \overrightarrow{X}$ prend la forme annoncée.

c) Si $\alpha = 0$ et $a_1^2 = 0$. Soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $h(0) = 0$ et $\frac{dh}{dz} = -\frac{1}{a_0^2} A_1(z)$. Le changement de variables $(w^*, z^*) = (w + h(z), \frac{1}{a_0^2} z)$ transforme $\overrightarrow{X}$ en $\frac{\partial}{\partial z^*}$

et M en $M^* = \{Imw^* + Q(z^*, \bar{z}^*) = 0\}$ où Q est un polynôme réel pouvant contenir des termes harmoniques. On voit immédiatement en traduisant le fait que $\frac{\partial}{\partial z^*}$ est tangent à M^* que Q ne dépend que de Imz^* .

Considérons maintenant le cas où $\vec{X}$ est de la forme (ii). En traduisant le fait que $\vec{X}$ et $\left[\frac{\partial}{\partial w}, \vec{X}\right]$ sont tangents à M on obtient les équations:

$$(2.23) \quad \forall z \in \mathcal{C}: Re \left[\frac{A_1(z)}{2i} + A_2(z) \frac{\partial P}{\partial z}(z, \bar{z}) \right] = \alpha P(z, \bar{z})$$

et

$$(2.24) \quad \forall z \in \mathcal{C}: Re \left[\frac{B_1(z)}{2i} + B_2(z) \frac{\partial P}{\partial z}(z, \bar{z}) \right] = P(z, \bar{z}) Re \left[\frac{A_1(z)}{2} + iA_2(z) \frac{\partial P}{\partial z}(z, \bar{z}) \right]$$

En procédant comme avec l'équation (21), on déduit de (23) que $A_2(z) = a_0^2 + a_1^2 z$ où $a_0^2, a_1^2 \in \mathcal{C}$. Nous allons montrer que $\alpha \neq 0$. Pour cela, procédons par l'absurde et supposons que $\alpha = 0$. Soit H la partie homogène de plus haut degré de P . De (23) on déduit que $Re \left(a_1^2 z \frac{\partial H}{\partial z} \right) \equiv 0$, de (24) et puisque $\deg B_2 \leq \deg P$, on déduit que $Re(i a_1^2 z \frac{\partial H}{\partial z}) \equiv 0$. Il résulte alors du lemme 2.i) que $a_1^2 = 0$. Ainsi, $\vec{X} = (A_1(z)w + B_1(z)) \frac{\partial}{\partial w} + (a_0^2 w + B_2(z)) \frac{\partial}{\partial z}$ et $\vec{Y} = \left[\frac{\partial}{\partial w}, \vec{X} \right] = A_1(z) \frac{\partial}{\partial w} + a_0^2 \frac{\partial}{\partial z}$. soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $h(0) = 0$ et $\frac{dh}{dz} = -\frac{1}{a_0^2} A_1(z)$. Comme dans l'étude du cas c), le change-

ment de variables $F(z, w) = (w^*, z^*) = (w + h(z), \frac{1}{a_0^2} z)$ transforme M en $M^* = \{Imw^* + f(Imz^*) = 0\}$ où f est un polynôme réel nul en 0. De plus, $F_* \vec{X} = \vec{X}^* = B_1^*(z^*) \frac{\partial}{\partial w^*} + (w^* + B_2^*(z^*)) \frac{\partial}{\partial z^*}$ et $F_* \vec{Y} = \frac{\partial}{\partial z^*}$ où $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{H}$. Comme par hypothèse M^* est non sphérique à l'origine, $\left[\frac{\partial}{\partial z^*}, \vec{X}^* \right]$ est une combinaison linéaire réelle de $\frac{\partial}{\partial w^*}, \vec{X}^*$ et $\frac{\partial}{\partial z^*}$. On a donc:

$$(2.25) \quad \frac{dB_1^*}{dz^*} \frac{\partial}{\partial w^*} + \frac{dB_2^*}{dz^*} \frac{\partial}{\partial z^*} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial w^*} + \alpha_2 \vec{X}^* + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z^*}$$

d'où l'on déduit immédiatement que $\alpha_2 = 0$ et que B_1^* , B_2^* sont de degré au plus égal à 1. En traduisant le fait que $\vec{X}^*$ est tangent à M on obtient:

$$(2.26) \quad \operatorname{Re} \left[\frac{B_1^*(z^*)}{2i} - \frac{1}{2} f(\operatorname{Im} z^*) f'(\operatorname{Im} z^*) + \frac{B_2^*(z^*)}{2i} f'(\operatorname{Im} z^*) \right] \equiv 0$$

Enfin, comme B_1^* et B_2^* sont de degrés au plus 1, on déduit de (26) que f est de degré 1. Ceci est impossible puisque M^* est non dégénérée en $(0, 0)$.

On a donc $\alpha \neq 0$, et comme dans l'étude du cas a), il résulte de (23) que $a_1^2 \neq 0$ et que M est transformée en une hypersurface $M^* = \{Imw^* + H^*(z^*, \bar{z}^*) = 0\}$ où H^* est homogène et équivalent à P . Comme deux polynômes équivalents ont mêmes parties homogènes de plus haut degré, on a $H^* = H$. Or, comme nous l'avons déjà observé, on peut déduire de (24) que $\operatorname{Re}(ia_1^2 z \frac{\partial H}{\partial z}) \equiv 0$. Il résulte alors du lemme 2.i) que $H = M|z|^{2m}$ et cela achève la démonstration.

Preuve du lemme 2 :

Pour la preuve de i) (cf:[2] lemme 2.3). Passons maintenant à la preuve de ii). Puisque Q est sans termes harmoniques on voit que h est une constante imaginaire pure.

posons $Q(z, \bar{z}) = \sum_{p,q \geq 1} A_{p,q} z^p \bar{z}^q$; on a par hypothèse:

$$(2.27) \quad \sum_{p,q \geq 1} A_{p,q} [-2\alpha + (p+q)\operatorname{Re} a + i(p-q)\operatorname{Im} a] z^p \bar{z}^q \equiv 0.$$

Comme $\alpha \neq 0$ par hypothèse, on obtient facilement de (27) que Q est homogène et, si de plus $\operatorname{Im} a \neq 0$, alors $Q = C|z|^{2m}$, $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Preuve de lemme 1 :

Il suffit de donner la preuve de ii). En effet: on a $2e^{-i\alpha P} \operatorname{Re} \left[\left(F_1 + F_2 \frac{\partial P}{\partial z} \right) e^{i\alpha P} \right] = \left[(F_1 + F_2 \frac{\partial P}{\partial z}) + (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 \frac{\partial P}{\partial \bar{z}}) e^{-2i\alpha P} \right]$, on est donc ramené au cas ii). On peut sans perte de généralité, supposer que $\triangle P(0, 0) = 1$. Ecrivons alors P sous la forme: $P(z, \bar{z}) = |z|^2 + \bar{z}A(z) +$

$z\overline{A(z)} + \sum_{p,q \geq 2} A_{pq} z^p \overline{z}^q$ où $A_{pq} = \overline{A_{qp}}$ et A un polynôme tel que $A(0) = A'(0) = 0$.

Notons:

$$T(z) = 2 \sum_{p \geq 2} A_{p2} z^p$$

$$F_2^*(z) = F_2(z) - F_2(0)$$

$$G_2^*(z) = G_2(z) - G_2(0)$$

On a, par hypothèse:

$$(2.28) \quad (F_1 + F_2 \frac{\partial P}{\partial z}) + (\overline{G}_1 + \overline{G}_2 \frac{\partial P}{\partial \overline{z}}) e^{i\alpha P} \equiv 0 \text{ et } \alpha \neq 0.$$

Supposons que F_1 , F_2 , G_1 , et G_2 sont non identiquement nulles, et montrons que cela conduit à contradiction. Montrons d'abord que F_1 et G_1 sont des polynômes et F_2 et G_2 sont des fractions rationnelles.

En collectant les termes harmoniques on déduit de (28) que:

$$F_1 + F_2(0)(\overline{z} + \overline{A}) + \overline{G}_1 + \overline{G}_2(0)(z + A) \equiv 0$$

et donc que F_1 et G_1 sont des polynômes.

En identifiant maintenant les termes de la forme $z^p \overline{z}$ ou $\overline{z}^q z$; $p, q \geq 1$ dans (28), on obtient:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} & \overline{z} \left\{ (1 + A') F_2^* + \overline{G}_2(0) T + i\alpha \overline{G}_1(0) (z + A) \right\} + \\ & + z \left\{ F_2(0) \overline{T} + (1 + \overline{A}') \overline{G}_2^* + i\alpha \overline{G}_1(0) \overline{A} \right\} \equiv 0 \end{aligned}$$

ou encore:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{z} \left\{ (1 + A') F_2^* + \overline{G}_2(0) T + i\alpha \overline{G}_1(0) (z + A) \right\} + \\ & + \frac{1}{\overline{z}} \left\{ F_2(0) \overline{T} + (1 + \overline{A}') \overline{G}_2^* + i\alpha \overline{G}_1(0) \overline{A} \right\} \equiv 0 \end{aligned}$$

De (30) on voit que F_2^* et G_2^* sont des fractions rationnelles, et donc F_2 et G_2 le sont également. Ainsi l'égalité (28) peut s'écrire sous la forme:

$$(2.31) \quad \frac{Q_1(z, \overline{z})}{Q_2(z, \overline{z})} = e^{i\alpha P(z, \overline{z})}$$

où Q_1 , Q_2 sont des polynômes en $z, \overline{z}$.

Posons: $z = \sigma t$, pour un certain σ fixé dans C^* et t varie dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}$, en remplaçant z par σt dans (31) on obtient:

$$(2.32) \quad \frac{Q_1(\sigma t, \bar{\sigma} t)}{Q_2(\sigma t, \bar{\sigma} t)} = e^{i\alpha P(\sigma t, \bar{\sigma} t)}$$

En dérivant (32) par rapport à t , on obtient:

$$(2.33) \quad Q_1' Q_2 - Q_1 Q_2' = i\alpha P' Q_1 Q_2$$

En comparant les degrés des deux membres de l'égalité (33), et puisque $\alpha \neq 0$, on obtient donc une contradiction.

3. Description des applications holomorphes propres entre domaines polynômiaux rigides

Nous établissons ici le théorème 2, pour cela nous utiliserons la proposition suivante qui est en fait une amélioration du théorème 2 de [2].

Propositon 2 : Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de la forme

$$\Omega_j : \left\{ (w, z) \in \mathbb{C}^2 : Rew + P_j(z, \bar{z}) < 0 \right\}$$

où $P_j \in \mathcal{P}$. Soit $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une application holomorphe telle que:

1) $f = (f_1, f_2)$ se prolonge en un biholomorphisme local d'un voisinage U_1 de l'origine sur un autre noté U_2 .

2) $f_2(w, 0) \equiv 0$ et $f_1(0, 0) = 0$.

Alors on se trouve dans l'un des deux cas suivants:

i) $f_1(w, z) = \Gamma w$; ($\Gamma > 0$) et $f_2(w, z) = f_2(z)$ où f_2 est un polynôme.

ii) $f_1(w, z) = \frac{\Gamma w}{1 + i\lambda w}$; ($\Gamma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$) et $f_2(w, z) = \frac{g(z)}{(1 + i\lambda w)^{1/m}}$;

$P_2(z, \bar{z}) = C|z|^{2m}$ et $P_1(z, \bar{z}) = \frac{C}{\Gamma} |g(z)|^{2m}$ avec $C > 0$

et $m \in \mathbb{N}^*$ et g est un polynôme.

Preuve du théorème 2 :

Nouss prodédons en plusieurs étapes.

1^{ème} étape: On se ramène au cas où f induit un biholomorphisme local au voisinage de $\zeta_0 = (0, 0)$, $f(\zeta_0) = \zeta_0$ et $b\Omega_{P_1}$, $b\Omega_{P_2}$ sont strictement pseudoconvexes non sphériques en ζ_0 .

En argumentant comme dans la preuve du théorème 2 de ([2]), on établit l'existence d'une suite (w_n, z_n) dans Ω_{P_1} qui converge vers $\zeta_0 \in b\Omega_{P_1}$ et telle que $f(w_n, z_n)$ converge vers un point de stricte pseudo-convexité de $b\Omega_{P_2}$. Alors, d'après ([1]), f se prolonge continuellement à $b\Omega_{P_1}$ au voisinage de ζ_0 . En remplaçant ζ_0 par un point arbitrairement voisin, on peut supposer que $b\Omega_{P_1}$ soit strictement pseudoconvexe en ζ_0 . Dans ces conditions f induit un difféomorphisme en ζ_0 et se prolonge holomorphiquement au voisinage de ce point par le principe de réflexion de Pinchuk. On se ramène à $\zeta_0 = (0, 0)$ en composant f avec des automorphismes adéquats de $\mathcal{C}^2$.

2^{ème} étape: Le champ de vecteurs $f_*(\frac{\partial}{\partial w})$, qui est bien défini au voisinage de $(0, 0)$, est de l'une des formes suivantes:

- (1) $(\alpha w^2 + A_1(z)w + B_1(z))\frac{\partial}{\partial w} + (A_2(z)w + B_2(z))\frac{\partial}{\partial z}$
- (2) $(\alpha w + A_1(z))\frac{\partial}{\partial w} + A_2(z)\frac{\partial}{\partial z}$
- (3) $\lambda\frac{\partial}{\partial w}$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et A_j , B_j sont de polynômes tels que $A_2 \neq 0$ et $\deg B_2 \leq \deg P_2$.

Compte tenu de la première étape et du théorème 1, on sait que $f_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)$ est de l'une de ces formes à ceci près que A_2 et B_2 sont remplacés par $\frac{\tilde{A}_2}{1 + H_2}$ et $\frac{\tilde{B}_2}{1 + H_2}$ où $\tilde{A}_2$, $\tilde{B}_2$ et H_2 sont des polynômes holomorphes tels que $\tilde{A}_2 \neq 0$ et $\deg \tilde{B}_2 \leq \deg P + \deg H_2$. En utilisant le fait que f est holomorphe propre, nous allons montrer que les fractions $\frac{\tilde{A}_2}{1 + H_2}$ et $\frac{\tilde{B}_2}{1 + H_2}$ sont en fait

des polynômes. Nous étudions le cas d'un champ de la forme (1), l'autre se traitant de façon parfaitement identique.

Soient U un voisinage de l'origine sur le quel $f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)$ est défini et (w_0, z_0) un point fixé dans $U \setminus f(V_f)$.

Supposons que l'une des fractions $\frac{\tilde{A}_2}{1 + H_2}$ et $\frac{\tilde{B}_2}{1 + H_2}$ ait des pôles. Alors, on peut trouver $(w_1, z_1) \in \Omega_{P_2}$ tel que:

$$(3.1) \quad \lim_{(w,z) \rightarrow (w_1,z_1)} \left| \frac{\tilde{A}_2(z)w + \tilde{B}_2(z)}{1 + H_2(z)} \right| = +\infty$$

Remarquons que $\frac{\tilde{A}_2(z)w + \tilde{B}_2(z)}{1 + H_2(z)}$ est holomorphe sur $\Omega_{P_2} \setminus S$, où S est un ensemble analytique de la forme $\{(w, z) \in \Omega_{P_2} : \prod_{k=1}^N (z - z_k) = 0\}$. Comme f est holomorphe propre, un théorème de Remmert stipule que $f(V_f)$ est un ensemble analytique de Ω_{P_2} .

Puisque $\Omega_{P_2} \setminus f(V_f) \cup S$ est connexe et dense dans Ω_{P_2} , il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega_{P_2}$ tel que: $\gamma(0) = (w_0, z_0)$, $\gamma(1) = (w_1, z_1)$ et $\gamma(t) \notin f(V_f) \cup S$ pour tout $t \in [0, 1[$.

L'application f induisant un revêtement fini de $\Omega_{P_1} \setminus f^{-1}[f(V_f)]$ sur $\Omega_{P_2} \setminus V_f$, il existe un relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ sur $[0, 1[$ par f , c'est à dire un chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1[\rightarrow \Omega_{P_1} \setminus f^{-1}[f(V_f)]$ tel que $f \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [0, 1[$.

Le champ $\vec{X} = f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)$ se prolonge le long de $\gamma([0, 1[)$ en un champ $\vec{\tilde{X}}$ tel que:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0, 1[: \vec{\tilde{X}}(\gamma(t)) &= \left[f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) \right]_{\gamma(t)} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t)) \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial f_2}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t)) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $\vec{X}$ est donné par (1) sur U et que $\gamma([0, 1[) \subset \Omega_{P_2} \setminus S$, le champ

$$(\alpha w^2 + A_1(z)w + B_1(z)) \frac{\partial}{\partial w} + \frac{A_2(z)w + B_2(z)}{1 + H_2(z)} \frac{\partial}{\partial z}$$

est également un prolongement de $\vec{X}$ le long de $\gamma([0, 1[)$. D'après (35) et

par unicité du prolongement on a donc:

$$(3.3) \quad \forall t \in [0, 1] : \frac{\partial f_2}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{A_2(\gamma_2(t))\gamma_1(t) + B_2(\gamma_2(t))}{1 + H_2(\gamma_2(t))}$$

Comme f est propre et $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ sur $[0, 1[$ on voit que $\tilde{\gamma}([0, 1[)$ est relativement compact dans Ω_{P_1} . Compte tenu de (34) il suffit alors de faire tendre t vers 1 dans (36) pour obtenir une contradiction.

3^{ème} étape : $f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial w}$ et f est de la forme annoncée.

Le polynôme P_2 ne peut être équivalent à un polynôme de la forme $|z|^{2m}$ car $b\Omega_{P_2}$ n'est pas sphérique en tout point de stricte pseudoconvexité. Ainsi, la proposition 1 montre que, si $f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)$ est de la forme (1) ou (2), alors:

$$(3.4) \quad f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = (\alpha w + A_1(z)) \frac{\partial}{\partial w} + A_2(z) \frac{\partial}{\partial z}$$

avec $A_2(z) = a_0^2 + cz$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}^*$.

ou, quitte à composer f avec un automorphisme de C^2 de type $(w + h(z), z + b)$ où $h \in \mathcal{H}$, $a \in \mathcal{C}^*$ et $b \in \mathcal{C}$, on se ramène au cas où $f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)$ est de l'une des formes suivantes:

$$(3.5) \quad f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial w} + i\lambda_2 z \frac{\partial}{\partial z}$$

où $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$

ou bien

$$(3.6) \quad f_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial z}$$

Il est clair que seules les équations (37) et (38) sont à considérer. Nous allons montrer qu'aucune de ces deux équations ne peut être satisfaite. En intégrant l'équation (37) on obtient:

$$(3.7) \quad f_2(w, z) = F_2(z)e^{cw} - F_2(0)$$

où F_2 est une fonction entière.

En intégrant l'équation (38) on obtient:

$$(3.8) \quad f_2(w, z) = F(z)e^{i\lambda_2 w}$$

où F est une fonction entière et en composant f avec un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ de type $(w + h(z), z + b)$ on se ramène au cas où $F(0) = 0$.

De (40) et (41) on tire: $f_2(w, 0) \equiv 0$, compte tenu de la première étape et de la proposition 2, ceci est impossible puisque $\lambda_2 \neq 0$ et $c \neq 0$.

Finalement, $f_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)$ ne peut être que de la forme (3) ce qui après intégration donne:

$$(3.9) \quad f(w, z) = (\lambda w + F_1(z), F_2(z))$$

où F_1 et F_2 sont entières nulles à l'origine, compte tenu de la première étape et de la proposition 2, $f(w, z) = (\lambda w, F_2(z))$ où F_2 est un polynôme. En composant f avec un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ de type $(w + h(z), z + b)$ où $h \in \mathcal{H}$ et $b \in \mathbb{C}$, on trouve alors la forme annoncée de f .

Nous terminons cette partie par la

Preuve de la proposition 2 :

Commençons par i). D'après théorème 2 de [2], (ici $\lambda = 0$), $f_1(w, z) = \Gamma w$, $\Gamma > 0$, notons dans ce cas $f(w, z) = (\Gamma w, f_2(w, z))$ et considérons le champ $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$. C'est un champ de vecteurs holomorphes défini sur U_2 et tangent à $\partial\Omega_2$. D'après la preuve de la proposition 3.1 de [2], $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$ est de la forme:

$$\left[f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]_{(w,z)} = i\Gamma\frac{\partial}{\partial w} + i\beta z\frac{\partial}{\partial z}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.

On a

$$\left[f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]_{f(w,z)} = i\Gamma\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$$

d'où

$$(3.10) \quad \beta f_2(w, z) = \frac{\partial f_2}{\partial w}(w, z)$$

On déduit alors de (43) que $f_2(w, z) = A(z)e^{\beta w}$ où A est une fonction entière telle que $A(0) = 0$ et $A'(0) \neq 0$. Montrons maintenant que $\beta = 0$,

nous procédons par l'absurde, supposons $\beta \neq 0$, d'après le théorème 2 de [2], on a $P_2(z, \bar{z}) = P_2(|z|, |z|)$ ou encore: $P_2(z, \bar{z}) = \sum_{j=m}^M \alpha_j |z|^{2j}$ avec $\alpha_m > 0$ et $\alpha_M > 0$.

L'inclusion $f(b\Omega_1) \subset b\Omega_2$ se traduit par l'identité:

$$(3.11) \quad \sum_{j=m}^M \alpha_j \left| A(z) e^{-\beta P_1(z, \bar{z})} \right|^{2j} = \Gamma P_1(z, \bar{z})$$

En écrivant $P_1(z, \bar{z})$ sous la forme

$$P_1(z, \bar{z}) = \sum_{l=m}^M |z|^{2l} \operatorname{Re} V_l(z), \text{ où } V_l(z) = \sum_{j=0}^{N_l} \gamma_j z^j,$$

et en identifiant les termes de la forme $|z|^{2m} z^p$ ou $|z|^{2m} \bar{z}^q$, $p, q \geq 0$, dans chacun des deux membre de (44), on voit facilement que A^m est un polynôme.

Soit $\sigma \in \mathcal{C}^*$ un nombre complexe fixé tel que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_1(t\sigma, t\bar{\sigma}) = +\infty$$

(un tel σ existe car P_1 est un polynôme sous-harmonique). en remplaçant z par $t\sigma$ dans (44) et en faisant tendre t vers $+\infty$ on voit que $\beta = 0$.

Donc $f_2(w, z) = f_2(z)$. Traduisons maintenant l'inclusion $f(b\Omega_1) \subset b\Omega_2$ par:

$$(3.12) \quad \Gamma P_1(z, z) = P_2 \circ f_2(z)$$

Nous terminons la preuve de i) en montrant que f_2 est un polynôme. si f_2 présnetait une singularité essentielle à l'infini alors il existerait une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty \text{ et } f_2(z_n) = f(z_0) \text{ pour tout } n$$

Compte tenu de (45) la suite $P_1(z_n, \bar{z}_n)$ devrait être bornée et donc il existerait $w_0 \in \mathcal{C}$ tel que (w_0, z_n) soit dans Ω_1 pour tout n . Finalement, la suite $f(w_0, z_n)$ serait constante ce qui est impossible puisque f est finie. ainsi la fonction f est polynômiale.

Passons maintenant à ii). On se place dans la cas iii) du théorème 2 de [2]. Le polynôme $P_1(z, \bar{z})$ est positif car si non il existerait $z_0 \in \mathcal{C}^*$ tel

que $P_1(z_0, \bar{z}_0) < 0$ et $\left(\frac{i}{\lambda}, z_0\right)$ appartiendrait à Ω_1 tandis que $f\left(\frac{i}{\lambda}, z_0\right)$ ne serait pas dans Ω_2 .

Considérons l'application holomorphe F de Ω_1 sur Ω_2 donnée par:

$$\begin{aligned} F : \Omega_1 &\longrightarrow \Omega_2 \\ (w, z) &\longrightarrow (\Gamma w, f_2(w, z)(1 + \lambda w)^{\frac{1}{m}}) \end{aligned}$$

Ainsi on est ramené au cas i). donc F de la forme: $F(w, z) = (\Gamma w, g(z))$ où g est un polynôme.

Ou encore $f_2(w, z) = \frac{g(z)}{(1 + i\lambda w)^{\frac{1}{m}}}$. L'inclusion $F(b\Omega_1) \subset b\Omega_2$ se traduit

par: $P_1(z, \bar{z}) = \frac{M}{\Gamma} |g(z)|^{2m}$.

References

- [1] F.Berteloot., Attraction des disques analytiques et continuité holdérienne d'applications holomorphes propres, Banach Center Publications, Vol. 31, pp. 91 – 98, (1995).
- [2] A.Chaouech., Auto-applications holomorphes propres des domaines polynomiaux rigides de $\mathcal{C}^2$. Publications Mathématiques. Vol. 40. N₁, pp. 41 – 66, (1996).
- [3] B. Coupet and S.Pinchuk., Holomorphic equivalence problem for weighted homogeneous rigid domains in $\mathcal{C}^{n+1}$, Indiana University Math. Journal, to appear.
- [4] K.Oeljeklaus., On the automorphism group of certain hyperbolic domains in $\mathcal{C}^2$, Astérisque 217, pp. 193 – 216, (1993).
- [5] N. Stanton., Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces in $\mathcal{C}^2$, Journal of Geometric analysis, vol.1, N.3, pp. 231 – 267, (1991).

Received : March 10, 1998.

Abdelaziz Chaouech

Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

B.P. 21 21 Tétouan

MAROC