RÉALISABILITÉ LOCALE DES STRUCTURES DE CAUCHY - RIEMANN RIGIDES DE $\mathbb{R}^3$, DANS LES CLASSES HÖLDERIENNES

ABDERRABI MAATI

Université des Sciences et Technologies de Lille, France

Abstract

The goal of this work is to prove that locally in $\mathbb{R}^3$, every rigid Cauchy-Riemann structure V belonging to a Holder class of a noninteger exponent is realizable by a diffeomorphism Φ belonging to another Holder class whose image $\Phi_*(V)$ is the standard complex structure of a rigid hypersurface in $\mathbb{C}^2$, obtained by a restriction of the fields $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}$ and $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}$ of $C \rtimes T(\mathbb{C}^2)$.

Introduction

Etant donnée une structure de Cauchy-Riemann V sur une variété lisse M de dimension $2n - 1$, existe-t-il une immersion Φ de M dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\Phi_*(V)$ soit la structure C.R de l'hypersurface $\Phi(M)$, induite par la structure complexe de $\mathbb{C}^n$? Lorsque la réponse est affirmative on dit que la structure V est réalisable. Nous nous limitons à une étude locale ; ce problème est alors équivalent à un problème sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre du type suivant.

Etant donnés k opérateurs différentiels du premier ordre et à coefficients complexes $L_1, L_2, \dots, L_k$ sur $\mathbb{R}^N$ qui satisfont à la condition de compatibilité:

$$[L_i, L_j] \in \{L_1, \dots, L_k\} = \mathcal{L}$$

Le système $L_j u = 0$, ($j = 1, 2, \dots, k$) admet-il $N - k$ solutions indépendantes?

La réponse est positive lorsque $N = 2k + 1$, $\mathcal{L}$ et $\tilde{\mathcal{L}}$ sont linéairement indépendants et à coefficients analytiques ; c'est une conséquence du théorème de Frobenius holomorphe [4]. Lorsque les coefficients sont seulement indéfiniment différentiables, il se passe des phénomènes nouveaux initiés par H. Lewy (1956); dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ on considère l'opérateur $P = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + iz \frac{\partial}{\partial t}$. L'équation $Pu = f$ n'a en général aucune solution, même localement, pour f fonction indéfiniment différentiable. L. Nirenberg(1974) montre que le noyau de l'opérateur $P + iz\varphi \frac{\partial}{\partial t} + i\psi.(z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial z})$, où $\varphi(0, 0, t)$ et $\psi(0, 0, t)$ sont des fonctions plates à l'origine, bien choisies est trivial sur tout ouvert connexe contenant l'origine. Ainsi certaines perturbations d'un opérateur analytique peut rendre son noyau trivial.

H. Jacobowitz et F. Trèves (1982) [7], démontrent le resultat général suivant dont l'opérateur P de Lewy-Nirenberg est un cas particulier. Soit

L la structure C. R induite par la structure complexe de $\mathbb{C}^2$ sur une hypersurface strictement pseudo-convexe. Alors il existe une perturbation de la forme $\tilde{L} = L + f_1 Q_1 + f_2 Q_2$ où f_1 et f_2 sont plates à l'origine, Q_1 et Q_2 sont deux champs de vecteurs convenables, telle que si $\tilde{L}v = 0$ avec v indéfiniment différentiable, toutes les dérivées de v à l'origine sont nulles.

Souvent les systèmes possédant certaines symétries font exception à la règle générique.

S. Baouendi, L. P. Rothschild et F. Trèves (1985) [3] ont introduit la notion de rigidité sur les C.R. structures. Ce sont les structures de Cauchy-Riemann V sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n-1}$ pour lesquelles il existe une sous algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension finie des sections tangentes à M vérifiant :

$$* V_a \oplus \overline{V}_a \oplus (\mathcal{G}_a \oplus \mathbf{C}) = \mathbf{C} \oplus T_a(\Omega) \quad \forall a \in \Omega$$

$$* [\mathcal{S}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{S} \text{ avec } \mathcal{S} = C^\infty(\Omega, V)$$

$$* [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = 0$$

Les auteurs démontrent que de telles structures C. R, rigides et indéfiniment différentiables, sont réalisables dans $\mathbb{C}^n$. La démonstration repose sur les théorèmes de Frobenius et Nirenberg-Newlander.

E. M. Chirka a généralisé dans [5] ce résultat aux structures rigides de classe $C^{\alpha+k}$. Les structures C.R, indéfiniment différentiables et strictement pseudo-convexes dans $\mathbb{R}^{2n-1}$ sont toujours localement réalisables, pour $n \geq 4$, le problème restant ouvert lorsque $n = 3$, la preuve de ce résultat, démontrée initialement par Kuranishi[8], a été simplifiée par Akahori et Webster[1][12].

E. M. Chirka [5] a obtenu par une méthode différente un résultat analogue à celui que nous présentons. Dans notre travail nous montrons que dans $\mathbb{R}^3$, les structures C.R rigides appartenant à une classe Hölderienne

d'exposant α non entier sont réalisables sur une hypersurface rigide de $\mathbb{C}^2$ par un difféomorphisme appartenant à la même classe Hölderienne. La méthode utilisée repose sur l'utilisation de l'opérateur de Cauchy dans $\mathbb{C}$, la mise sous une forme canonique du champ définissant la structure C.R., et l'inversion d'un opérateur dans un espace de Banach convenable.

I Opérateur de Cauchy

Commençons par rappeler quelques définitions qui fixerons les notations

D^β pour tout $\beta \in \mathbb{N}^q$, on note $D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_q}}{\partial x_q^{\beta_q}}$ et $|\beta| = \sum_i \beta_i$

$C_b^\alpha(\mathbb{R}^q)$ (resp. C_0^α, C_Q^α) pour tout réel $\alpha \geq 0$, c'est la classe Hölderienne des fonctions u sur $\mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont les dérivées jusqu'à la partie entière de α (notée aussi $|\alpha|$), sont bornées et continues sur $\mathbb{R}^q$ (resp. et de plus à support compact, resp. à support dans un compact Q donné) et vérifiant

$$|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)| \leq C |x - y|^{|\alpha| - |\beta|},$$

pour x et y dans $\mathbb{R}^q$, et pour tout β tel que $|\beta| = |\alpha|$.

La meilleure constante C dans la relation précédente est notée $\|u\|'_\alpha$.

Pour tout $u \in C_b^\alpha$, on pose $\|u\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^q} |u(x)|$.

$C_b^\alpha(\mathbb{R}^q)$ est un espace normé par $\|u\|_\alpha = \|u\|_0 + \|u\|'_\alpha$ et $(C_b^\alpha, \|u\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

Pour étudier la réalisabilité des structures de Cauchy-Riemann rigides de $\mathbb{R}^3$ dans les classes Hölderiennes, nous utiliserons les propriétés de l'opérateur de Cauchy A sur $\mathbb{C}$, défini par $Af = \frac{1}{\pi z} * f$. Le noyau de Cauchy $\frac{1}{z}$ est un cas particulier des noyaux rencontrés dans l'étude des intégrales singulières E. M. Stein [11], et il est connu que A augmente

l'ordre de dérivabilité d'une unité dans les classes Hölderiennes d'exposants non entier.

Afin d'estimer la norme de l'opérateur A, nous choisissons une méthode qui repose sur la décomposition de Littlewood-Paley dont on trouve une expension récente dans A-G [2].

L'estimation de l'opérateur A est exprimée par le :

Théorème 1 :

Dans $\mathbb{C}$, l'opérateur de Cauchy A est un opérateur borné de l'espace C_Q^α dans $C^{\alpha+1}$ pour tout α positif non entier. Il existe une constante C telle que la norme $\|A\|_\alpha$ verifie la majoration suivante

$$\|A\|_\alpha \leq C^\alpha [(diam Q) + Max(\frac{1}{d(\alpha)}, \frac{1}{1-d(\alpha)})]$$

pour tout α dans $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. On a noté $diam Q$, le diamètre de Q.

II Opérateurs différentiels rigides

Désignons par χ_k l'ensemble des germes des champs de vecteurs de classe C^k à l'origine de $\mathbb{R}^n$, et par $Dif f^{k+1}$ le groupe local des germes de difféomorphismes à l'origine de $\mathbb{R}^n$ de classe C^{k+1} .

Soit X un élément de χ_k , on lui associe son flot F_X ; F_X est dans $Dif f^k$.

Etant donné $\varphi \in Dif f^{k+1}$, on définit $\varphi_* F_X$ par conjugaison

$\varphi_* F_X = \varphi \circ F_X \circ \varphi^{-1}$, $\varphi_* F_X$ est un sous groupe à 1 paramètre de $Dif f^k$.

On a :

$$\varphi_* F_X = F_{\varphi_*(X)} \quad (1)$$

Où

$$\varphi_*(X)(x) = d\varphi(\varphi^{-1}(x)).X(\varphi^{-1}(x)) \quad \text{est de classe } C^k$$

Soit P_k l'ensemble des opérateurs différentiels lineaires, d'ordre 1 dont les coefficients sont des germes de fonctions de classe C^k à l'origine.

A tout X appartenant à l'ensemble χ_k , on lui associe l'élément L_X dans P_k , en posant par définition

$$L_X(f) = \frac{d}{dt}[f \circ F_X^t(x)]_{t=0} \quad (2)$$

Le groupe $Diff^{k+1}$ agit par définition sur P_k de la façon suivante

$$(\varphi_* L_X)_x(f) = (L_X)_{\varphi^{-1}(x)}(f \circ \varphi)$$

Ainsi on a la relation

$$\varphi_* L_X = L_{\varphi_*(X)} \quad (3)$$

Supposons qu'il existe un sous-groupe local G à 1 paramètre de $Diff^{k+1}$ laissant l'opérateur L_X invariant (i.e il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(G^t)_* L_X = L_X$, $\forall |t| \leq \varepsilon$), alors pour tout élément φ de $Diff^{k+1}$, $\varphi_* G$ est un sous-groupe qui laisse l'opérateur $L_{\varphi_*(X)}$ invariant.

Soit Y le générateur infinitésimal de G (i.e $Y(x) = \frac{d}{dt}[G^t(x)]_{t=0}$). Si $Y(0) \neq 0$, alors d'après le théorème de linéarisation des champs de vecteurs, il existe un difféomorphisme $\varphi \in Diff^{k+1}$ tel que le groupe $\varphi_*(G)$ soit un groupe de translations le long du vecteur $Y(0)$.

Ce groupe est donné par l'ensemble des transformations qui à tout x assez voisin de l'origine fait correspondre l'élément $x + tY(0)$. Il est alors clair qu'on a la proposition suivante

Proposition 1 :

Soit L un élément de P_k . S'il existe un sous-groupe à 1 paramètre de $Diff^{k+1}$ laissant l'opérateur L invariant, dont le générateur infinitésimal ne s'annule pas à l'origine alors :

il existe un système de coordonnées locales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans le quel L s'écrit sous la forme

$$L = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où les coefficients a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des fonctions de classe C^k .

Par compléxification ce résultat s'étend au champs à coefficients complexes.

Proposition 2 :

Soit $L_X \in \mathbb{C} \otimes P_k$, et $X \in \mathbb{C} \otimes \chi_k$ où X est le champ de vecteurs associé à l'opérateur différentiel donné par (2). On suppose que l'opérateur L_X est invariant par un sous-groupe à 1 paramètre de $Diff^{k+1}$, de générateur infinitésimal Y , tel que les vecteurs $X(0)$ et $Y(0)$ sont $\mathbb{C}$ -linéairements indépendants . Alors il existe un système de coordonnées locales dans lequel le champ L_X a pour forme :

$$L_X = A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + i \sum_{k=2}^n b_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right]$$

où les coefficients b_k ($k = 2, \dots, n$) sont des fonctions réelles de classe C^k , et A une fonction non nulle à l'origine.

Preuve :

D'après la proposition 1, il existe un système de coordonnées locales dans le quel

$$L = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ et } Y(0) = (0, \dots, 0, 1) \neq 0.$$

Puisque $X(0)$ et $Y(0)$ sont linéairement indépendants, alors l'un des coefficients de L $a_i(0) \neq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

En renumérotant les $n-1$ premières variables, on peut supposer que L s'écrit sous la forme

$$L = A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right].$$

$$\text{Posons l'opérateur } N = \frac{\partial}{\partial x_1} + \text{Re}(\sum_{i=2}^{n-1} a_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i}) .$$

Soit α_j la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ suivant :

$$\begin{cases} N\alpha_j = 0 \\ \alpha_j|_{x_1=0} = x_j, \quad j = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Soit β_n une solution dans $\mathbb{R}^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} N(\beta_n) + \text{Re}(a_n) = 0 \\ \beta_n(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ et β_n sont déterminées dans un voisinage de l'origine et le Jacobien $\frac{\partial(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_n + x_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(0) = 1$.

On peut donc prendre $(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_n + x_n = \alpha_n)$ comme nouvelles coordonnées dans lesquelles le champ L devient où

$$\begin{aligned} L &= L(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + L(\alpha_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \dots + L(\alpha_{n-1}) \frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}} + L(\alpha_n) \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \\ &= A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + i(\text{Im}(\sum_2^{n-1} a_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i})) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + i(\text{Im}(\sum_2^{n-1} a_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_i})) \frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}} + \right. \\ &\quad \left. + i(\text{Im}(\sum_2^{n-1} a_j(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial \beta_n}{\partial x_j}) + \text{Im}(a_n)) \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \right] \\ &= A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + i(\sum_{k=2}^n b_k(x_1, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial \alpha_k}) \right]. \end{aligned}$$

où

$$b_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = \operatorname{Im} \left(\sum_{i=2}^{n-1} a_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \right), \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$\text{et } b_n(x_1, \dots, x_{n-1}) = \operatorname{Im} \left(\sum_2^{n-1} a_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial \beta_n}{\partial x_i} \right) + \operatorname{Im}(a_n),$$

A est une fonction de classe C^k à valeurs complexes et non nulle à l'origine et b_k ($k = 2, \dots, n$) des fonctions réelles de classe C^k .

Définition :

Un germe L à l'origine, d'opérateurs différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients de classe C^k et complexes, sera dit rigide, s'il existe un sous-groupe à 1 paramètre $\Phi \in \operatorname{Diff}^{k+1}$, de générateur infinitésimal Y tel que:

L soit invariant par Φ et tel que L, $\bar{L}$ et L_Y soient $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants.

Proposition 3 :

Soit $L \in \mathbb{C} \otimes P_k$ qu'on suppose rigide alors

il existe un système de coordonnées locales dans lequel

$$L = A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + i \left[\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \sum_{k=2}^n b_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \right]$$

où les coefficients b_k ($k = 2, \dots, n$) sont des fonctions réelles de classe C^k en les variables $(x_2, \dots, x_{n-1})$ et de classe C^{k-1} en $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ et A est une fonction de classe C^k non nulle à l'origine.

Preuve :

D'après ce qui précède, il existe un difféomorphisme $\Psi \in \text{Diff}^{k+1}$ pour lequel

$$\Psi_*(L) = A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + i \sum_{k=2}^n b_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right], \text{ où } b_k \ (k = 2, \dots, n)$$

sont des fonctions réelles de classe C^k et le champ $\Psi_*(L_Y) = \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Comme $\bar{L}$, $\bar{L}$ et L_Y sont linéairement indépendants, l'un des $b_k(0) \neq 0$ ($k = 2, \dots, n-1$)

Écrivons la fonction b_k sous la forme

$$b_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = b'_k(x_2, \dots, x_{n-1}) + x_1 c_k(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

alors b'_k sont des fonctions de classe C^k et c_k est de classe C^k en les variables $(x_2, \dots, x_{n-1})$ et de classe C^{k-1} en $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Comme l'un des $b'_k(0)$ est non nul ($k = 2, \dots, n-1$), on peut linéariser le champ $\sum_{k=2}^n b'_k(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_k}$ dans $\mathbb{R}^{n-2}(x_2, \dots, x_{n-1})$, et en renumérotant éventuellement les nouvelles coordonnées, le champ L devient

$$L = A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + i \left[\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \sum_{k=2}^n c_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \right].$$

III Réalisabilité locale des structures de Cauchy-Riemann rigides

Une structure de Cauchy-Riemann (Abrev C. R) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n-1}$ ($n > 1$) est la donnée d'un sous fibré V de dimension $n-1$ de $\mathbb{C} \otimes T(\Omega)$ tel que $V \cap \bar{V} = \{0\}$ et $[V, V] \subset V$.

Une telle structure est dite localement réalisable en a , s'il existe un difféomorphisme Φ d'un voisinage de a sur une hypersurface M de $\mathbb{C}^n$ tel que $\Phi_*(V)$ soit la structure C. R de M (dite structure C. R standard)

obtenue en restreignant à $\mathbb{C} \otimes T(M)$ la structure complexe de $\mathbb{C}^n$ engendrée par les champs $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et notée $T^{0,1}(M)$.

Ce problème se ramène à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles par la proposition

Proposition 4 :

Soit $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ un difféomorphisme d'un voisinage de a sur une hypersurface M de $\mathbb{C}^n$ tel que $L(\Phi_k) = 0$, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$ et tout L dans V .

Alors $\Phi_*(V)$ est la structure C.R standard de M .

Preuve :

On exprime $\Phi_*(L)$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i})$

$$\Phi_*(L) = L(\Phi_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + L(\bar{\Phi}_1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \dots + L(\Phi_n) \frac{\partial}{\partial z_n} + L(\bar{\Phi}_n) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n},$$

la proposition exprime l'appartenance à $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})$ de $\Phi_*(L)$ pour tout L dans V .

Lorsque $n = 2$, on sait d'après Nirenberg [9], qu'étant donné un champ L engendrant une structure C. R sur $\mathbb{R}^3$, le système $L(\Phi_1) = L(\Phi_2) = 0$ peut n'avoir que des solutions triviales.

Plus précisément soit $L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - i\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial u}$ (L est le champ de vecteurs qui engendre $T^{0,1}(S)$, où S est l'hypersurface de $\mathbb{C}^2$ d'équation $Im z_2 - |z_1|^2 = 0$, $u = Rez_2$ qui est biholomorphe à la sphère S^3) alors il existe un champ $\tilde{L}$ tangent à l'ordre infini (à l'origine) à L , tel que les seules solutions de l'équation $\tilde{L}(\Phi) = 0$ sont les fonctions constantes.

Cet exemple a été étendu par Jacobowitz [6], aux champs L engendrant $T^{0,1}(M)$ pour toute hypersurface M strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^2$.

La structure de Cauchy-Riemann V est dite strictement pseudo-convexe en a si la forme hermitienne définie sur $V_a \times V_a$ par :

$$\mathcal{L}(L, M) = i[L, \bar{M}] \pmod{V_a + \bar{V}_a} \text{ est définie positive ou négative.}$$

On sait qu'une structure C. R, indéfiniment différentiable et strictement pseudo-convexe en a est localement réalisable lorsque $n \geq 4$ [1], [8] et [12]; pour $n = 3$ le problème est

ouvert ; pour $n = 2$ la structure C. R peut n'être pas localement réalisable comme il vient d'être décrit.

Hypersurface rigide

Définition :

Soit M un germe à l'origine d'hypersurfaces de classe C^k de $\mathbb{C}^n$; M est dit rigide à l'origine s'il existe un germe X de champs de vecteurs holomorphes, sans point critique dont la partie réelle est tangente à M .

Proposition 5 :

Supposons que le germe M est rigide. Alors

il existe un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage de l'origine $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, pour lequel M a une équation de la forme

$$M = \{Im z_n = f(z_1, \dots, z_{n-1})\}, \text{ où } f \text{ est une fonction de classe } C^k, \\ f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

De plus le sous-fibré $T^{0,1}(M)$ de $\mathbb{C} \otimes TM$ a une base formée d'opérateurs différentiels rigides pour un même sous groupe à un paramètre dans le groupe $Diff^{k+1}$.

Preuve :

D'après le théorème de linéarisation des champs de vecteurs holomorphes, il existe un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage de l'origine $\mathcal{V}$ dans lequel le champ X prend la forme $X(z) = (0, \dots, 0, 1)$.

Le plan tangent de M à l'origine est alors défini par $T_0(M) = \{Imz_n = 0\}$, et l'hypersurface M prend la forme $M = \{Imz_n - f(z_1, \dots, z_{n-1}, Re(z_n)) = 0\}$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Enfin puisque le vecteur $X(z)$ est tangent à M , la fonction f est indépendante de $Re(z_n)$.

Si on paramètre M par $(z_1, \dots, z_{n-1}, Re(z_n))$, alors tout élément L de $T^{0,1}(M)$ a pour base des opérateurs différentiels L_k de la forme suivante :

$$L_k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial}{\partial u}, \quad u = Re(z_n) \quad , (k = 1, \dots, n-1)$$

Les opérateurs L_k sont donc rigides.

M. S. Baouendi, L. P. Rothschild et F. Trèves [B-R-T] [3] démontrent pour les structures C. R. rigides et indéfiniment différentiables la réciproque ; ils prouvent qu'une telle structure C. R est localement réalisable sur une hypersurface rigide.

Rappelons la définition de la rigidité des structures de Cauchy-Riemann introduite par ces auteurs [B-R-T]

Définition :

La structure de Cauchy-Riemann V est dite rigide sur Ω s'il existe une sous algèbre de Lie $\mathcal{G}$, de dimension finie, de l'espace des sections $C^\infty(\Omega, T\Omega)$ telle que :

$$* \quad V_a + \bar{V}_a + (\mathcal{G}_a \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes T_a(\Omega) \quad \forall a \in \Omega$$

$$* \quad [\mathcal{L}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{L} \text{ avec } \mathcal{L} = C^\infty(\Omega, V)$$

$$* \quad [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = 0$$

On a vu au chapitre II, que cette définition coïncide lorsque $n = 2$ avec celle que nous avons donnée.

D'autre part E. M. Chirka, utilisant une extension en classe C^k du théorème de Nirenberg-Newlander étend le résultat de B. R. T cité plus haut aux champs rigides de classe C^k .

On se propose dans ce qui suit, d'étendre le résultat de E. M. Chirka [5] aux classes Holderiennes C^α , lorsque $n = 2$.

On reprend les notations du chapitre II ; on a établi l'existence d'un système de coordonnées locales dans lesquelles le champ L définissant la structure C. R. rigide de $\mathbb{R}^3$ a pour forme, au voisinage de l'origine :

$$(1) \quad L = \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial x} + itb_1(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + itb_2(t, x) \frac{\partial}{\partial y}$$

Définition :

Nous dirons qu'une structure C. R. rigide de $\mathbb{R}^3$ est dans la classe Holderienne C^α si les fonctions b_1 et b_2 de (1) sont dans cette classe, au voisinage de l'origine.

Cette définition est intrinsèque par la proposition suivante :

Proposition 6 :

Soit Φ un difféomorphisme local, conservant l'origine, transformant le champ (1) en un champ du même type

$$\Phi_*(L) = \frac{\partial}{\partial t'} + i \frac{\partial}{\partial x'} + it' \tilde{b}_1(t', x') \frac{\partial}{\partial x'} + it' \tilde{b}_2(t', x') \frac{\partial}{\partial y'}$$

Alors en supposant seulement $b_1, \tilde{b}_1, b_2, \tilde{b}_2$ continues dans un voisinage de l'origine, $\tilde{b}_1$ et $\tilde{b}_2$ sont liées à b_1 et b_2 par les relations suivantes :

$$\tilde{b}_2 = d.b_2, \tilde{b}_1 = b_1 + c.b_2, \text{ où } c \text{ et } d \text{ sont des constantes avec } d \text{ non nulle.}$$

Preuve :

Désignons par (Φ_1, Φ_2, Φ_3) les composantes de Φ , on a

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + tb_1(t, x) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + tb_2(t, x) \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) = 1$$

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + tb_1(t, x) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + tb_2(t, x) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) = i[1 + \Phi_1.(\tilde{b}_1 \circ \Phi)]$$

$$(4) \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + tb_1(t, x) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + tb_2(t, x) \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right) = i\Phi_1.(\tilde{b}_2 \circ \Phi)$$

Supposons b_2 et $\tilde{b}_2$ non identiquement nulles; quitte à considérer Φ^{-1} au lieu de Φ , on peut supposer b_2 non identiquement nulle. La relation (2) donne

$$\Phi_1 = t + c(x, y) \text{ et } \frac{\partial c}{\partial x} + tb_1(t, x) \frac{\partial c}{\partial x} + tb_2(t, x) \frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

En posant $t = 0$, on obtient $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$, puis $b_2(t, x)c'(y) = 0$

Ainsi $\Phi_1 = t$

Les relations (3) et (4) donnent la relation (5) suivante :

$$\Phi_2 = x + c(y), \quad c(0) = 0$$

$$b_1(t, x) + b_2(t, x)c'(y) = \tilde{b}_1(t, x + c(y))$$

(5)

$$\Phi_3 = d(y) , \quad d(0) = 0 , \quad d'(0) \neq 0$$

$$b_2(t, x)d'(y) = \tilde{b}_2(t, x + c(y))$$

En posant $y = 0$ dans (5), on obtient

$$\tilde{b}_2(t, x) = b_2(t, x)d'(0)$$

$$\tilde{b}_1(t, x) = b_1(t, x) + b_2(t, x).c'(0).$$

Considerons maintenant le cas où b_2 et $\tilde{b}_2$ sont identiquement nulles ;
le début de la discussion du cas précédent montre

$$\Phi_1 = t + c(y), c(0) = 0$$

(6)

Φ_2 est independant de t

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + tb_1(t, x)\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 1 + (t + c(y)).\tilde{b}_1(t + c(y), \Phi_2)$$

Posons $t = y = 0$ dans la dernière relation de (6), on obtient $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(0, x) = 1$,
ce qui entraine $\Phi_2(0, x) = x$.

Posons maintenant seulement $y = 0$, on obtient $\tilde{b}_1(t, x) = b_1(t, x)$.

Théorème 2 :

Soit L une structure de Cauchy-Riemann rigide appartenant à la classe Hölderienne C^α dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$. Si α est un réel positif non entier, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine de $\mathbb{R}^3$ et une immersion Φ de $\mathcal{V}$ sur une hypersurface rigide de $\mathbb{C}^2$, telle que Φ soit dans la classe C^α , et telle que $\Phi_*(L)$ soit la structure complexe standard de M , c.à.d $\Phi_*(L) = T^{0,1}(M)$.

Preuve :

On introduit l'application u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}^2$, définie par $u(t, x, y) = (x - it, y)$; on cherche Φ sous la forme $\Phi = u - H$.

On considère l'équation

$$(1) \quad L(H) = L(u)$$

D'après la proposition 4; il s'agit de montrer que (1) admet, dans un voisinage convenable de l'origine, une solution dans la classe Hölderienne C^α , telle que $H'(0)$ soit assez petit pour que Φ soit une immersion.

On considère les coordonnées locales dans lesquelles L est de la forme :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\left(\frac{\partial}{\partial x} + tb_1(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + tb_2(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Par hypothèse b_1 et b_2 appartenant à C^α dans un voisinage compact de l'origine que l'on notera Q dans la suite. On a :

$$Lu = it(b_1, b_2)$$

Puisque Lu est indépendant de y , on peut chercher une solution de l'équation (1) sous la forme $H = \frac{1}{2}A(V)$, alors A étant un inverse à droite de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, (1) devient :

$$(2) \quad V + \frac{i}{2}tb_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} oA(V) = L(u)$$

Soit χ_Q une fonction plateau à support dans le compact Q et valant 1 dans $\frac{1}{2} \cdot Q$.

Soit ε un réel > 0 et considérons l'équation :

$$(3) \quad W(z) + \frac{i}{2}\varepsilon \cdot t \cdot b_1(\varepsilon z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} oAW\right)(z) \cdot \chi_Q(z) = \chi_Q(z)Lu(\varepsilon z)$$

où

$$z = t + ix$$

alors la fonction $V(z) = W(\frac{z}{\varepsilon})$ sera solution de l'équation (2) sur le compact $\frac{\varepsilon}{2}.Q$.

En effet

on a $AV(z) = \varepsilon.AW(\frac{z}{\varepsilon})$ et $(\frac{\partial}{\partial x}AV)(z) = (\frac{\partial}{\partial x}AW)(\frac{z}{\varepsilon})$ lorsque $V(z) = W(\frac{z}{\varepsilon})$.

Soit T_ε l'opérateur défini par :

$$T_\varepsilon(W)(z) = \frac{i}{2}\varepsilon.tb_1(\varepsilon z).(\frac{\partial}{\partial x}oAW)(z).\chi_Q(z)$$

On sait, d'après le chapitre I, que $\frac{\partial}{\partial x}oA$ est un opérateur borné de C_Q^α dans C^α et que C^α est une algèbre de Banach. Il est alors clair que T_ε est un opérateur borné de C_Q^α et que la norme $\|T_\varepsilon\|_{C_Q^\alpha} = O(\varepsilon)$.

On choisit ε assez petit pour que $\text{Id} + T_\varepsilon$ soit inversible dans C_Q^α .

Considérons :

$$\begin{aligned} W &= (\text{Id} + T_\varepsilon)^{-1}(Lu(\varepsilon z).\chi_Q(z)) \\ &= i\varepsilon.(\text{Id} + T_\varepsilon)^{-1}[\chi_Q(z).(tb_1(\varepsilon z), tb_2(\varepsilon z))] \end{aligned}$$

Alors $H(z) = \frac{1}{2}AV(z) = \frac{\varepsilon}{2}AW(\frac{z}{\varepsilon})$ sera dans la classe C^α et solution de (1). De plus $H'(0) = \frac{1}{2}AW(0) = O(\varepsilon)$.

Ainsi pour ε assez petit $\Phi = u - H$ sera une immersion dans $\mathbb{C}^2$, appartenant à la classe C^α , du voisinage $\frac{\varepsilon}{2}.Q$ de l'origine de $\mathbb{R}^3$. Ce qui termine la construction de Φ .

Il reste à vérifier que l'image M d'un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$ par Φ est une hypersurface rigide.

Désignons par Φ_1 et Φ_2 (resp. H_1 et H_2) les composantes de Φ (resp. H) dans $\mathbb{C}^2$.

On a :

$$Re\Phi_1 = x - ReH_1(t, x)$$

$$Im\Phi_1 = -t - ImH_1(t, x)$$

$$Im\Phi_2 = ImH_2(t, x)$$

Comme $H'(0)$ est un $O(\varepsilon)$, on peut choisir ε assez petit pour que l'application qui a l'élément (t, x) associe $(Re\Phi_1, Im\Phi_1)$ soit un difféomorphisme local.

Il existe donc une application θ de classe C^1 telle que l'équation de M soit dans un voisinage de l'origine :

$$Im\Phi_2 = ImH_2 \circ \theta(Re\Phi_1, Im\Phi_1)$$

Ainsi M est rigide dans ce voisinage de l'origine.

References

- [1] Akahori A., A new approach to the local embedding theorem of CR structures for $n \geq 4$, Mem. Amer. Math. Soc., No.366, Providence, R. I., (1987)
- [2] Alinhac S. - Gerard P., Opérateurs Pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, Editions du CNRS
- [3] Baouendi M. S, Rothschild L. P, and Trèves F., CR structures with group action and extendability of CR functions. Invent. Math. **82**, pp. 359-396 (1985).
- [4] Bogess A., C. R. Manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex; Studies in advanced Mathematics (1991).

- [5] Chirka E. M Introduction to the geometry of C. R manifolds Math Survey pp. 46-1, (1991)
- [6] Jacobowitz H., An introduction to CR structures Mathematical surveys and monographs, No 32, (AMS), (1990)
- [7] Jacobowitz H. and Trèves F., Non realizable, CR structures Invent. Math. **66**, pp. 231-249, (1982).
- [8] Kuranishi M., Strongly pseudoconvex CR structures over small balls. I, Ann.of Math.**115** (1982), 451-500; II, Ann.of Math.**116** (1982), 1-64; III, Ann.of Math.**116**, pp. 249-330, (1982).
- [9] Nirenberg L., On a question of Hans Lewy. Russian Math. Surveys **29**, pp. 251-262, (1974).
- [10] Rosay J. P., New exemple of non locally embeddable CR structures. Ann. Inst. Fourier, **39**, 3, pp. 811-823, (1989).
- [11] Stein E. M Harmonic Analysis, Princeton Mathematical Series, 43.
- [12] Webster S., On the proof of Kuranishi's Embedding Theorem, Annals. Inst. H. Poincaré **6**, pp. 183-207, (1989).

Received : December 10, 1998.

Abderrabi Maati

Université des Sciences et Technologie de Lille

Bat M2

Cité Scientifique

Villeneuve d'Ascq 59650, Lille

Lille

France