UNE INÉGALITÉ OPTIMALE POUR DES SOUS-VARIÉTÉS RIEMANNIENNES DANS DES ESPACES PSEUDO-RIEMANNIENS

B. Gmira

*Université Abdelmalek Essaâdi, Katholieke Universiteit Leuven
and*

L. Verstraelen

Université de Valenciennes Katholieke Universiteit Brussel

Abstract

Let M^n be a Riemannian n -submanifold of a real space form $Q_2^{n+2}(c)$ of constant curvature c and of index 2. We prove a pointwise inequality relating the main Riemannian scalar invariants of M^n , namely the scalar curvature of M^n , the normal scalar curvature and the squared norm of the mean curvature vector of M^n in $Q_2^{n+2}(c)$. Then we give some examples proving that the equality sign is in fact realized.

Key words: *sous-variété riemannienne, courbure, espace à courbure constante.*

AMS subject classifications: *53 B25, 53 A35, 53 A07*

0. Introduction

Les deux conditions bien connues nécessaires à l'existence d'une immersion isométrique minimale d'une variété riemannienne M^n dans l'espace euclidien, sont la non-compacité de M et la non-positivité du tenseur de Ricci. Dans [4], S.S. Chern posait le problème de trouver d'autres telles conditions. Etant donnée une sous-variété riemannienne M^n d'une variété réelle $N^m(c)$ à courbure constante c , on a comme conséquence directe de l'équation de Gauss, l'inégalité optimale suivante :

$$(0.1) \quad \|H\|^2 \geq \tau - c,$$

qui relie en plus de c la courbure scalaire normalisée τ , et le carré de la norme du vecteur de courbure moyenne de M^n dans $N^m(c)$. B-Y.Chen [3] a caractérisé les sous-variétés qui réalisent l'égalité dans (0.1)

En ce qui concerne des inégalités universelles, i.e. valables sans aucune condition sur les sous-variétés considérées, entre courbures extrinsèques et intrinsèques, B-Y.Chen [2] a obtenu récemment l'inégalité suivante:

$$(0.2) \quad \delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} \|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

où $\delta_M = \frac{n(n-1)}{2} \tau(p) - \inf K(p)$, et $K(p)$ est la fonction courbure sectionnelle de M^n . Il a également donné une caractérisation, en termes de la seconde forme fondamentale, du cas où l'égalité est réalisée dans (0.2). En particulier, cette inégalité donne une troisième condition nécessaire à l'existence d'une immersion isométrique minimale d'une variété riemannienne M^n dans l'espace euclidien: les courbures sectionnelles et la courbure scalaire doivent satisfaire $K(\pi) \geq \frac{1}{2}\rho(p)$ pour toute section plane $\pi \subset T_p M$, $p \in M$.

Plus récemment encore, P.J. De Smet, F. Dillen, L. Verstraelen et L. Vrancken [5] ont démontré une nouvelle inégalité ponctuelle, pour toute sous-variété M^n d'une variété $N^{n+2}(c)$ réelle à courbure constante c , faisant apparaître en plus des invariants τ et $\|H\|^2$, un invariant extrinsèque additionnel qui est la fonction courbure normale τ^N . Cette inégalité s'écrit:

$$(0.3) \quad \|H\|^2 \geq \tau + \tau^N - c.$$

Ces mêmes auteurs ont donné dans leur article, des exemples de plusieurs classes de sous-variétés réalisant l'égalité dans (0.3), et ont conjecturé que cette inégalité est vraie en toutes codimensions. Cette conjecture est déjà prouvée pour $n = 2$, $c = 0$ en codimension 2 par Wintgen [10]; pour $n = 2$

en codimension quelconque par Guadalupe et Rodriguez [6]. Dans les deux cas, l'égalité est satisfaite en un point $p \in M$ si et seulement si l'ellipse de courbure en ce point est un cercle. Notons qu'en cas de connexion normale triviale, l'inégalité (0.3) se réduit à (0.1).

Si $Q_2^{n+2}(c)$ désigne une $(n+2)$ -variété pseudo-riemannienne de signature $(2, n)$, à courbure constante c , nous obtenons alors le théorème suivant, qui est une version pseudo-riemannienne de l'inégalité (0.3).

Théorème Soit $M^n \rightarrow Q_2^{n+2}(c)$ une immersion isométrique d'une n -variété riemannienne M dans $Q_2^{n+2}(c)$. Alors en tout point de M , on a :

$$(0.4) \quad -||H||^2 \leq \tau - \tau^N - c.$$

De plus, l'égalité est réalisée en un point si et seulement si on peut trouver une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de l'espace tangent et une base orthonormée (ξ_1, ξ_2) de l'espace normal tel que les applications de Weingarten (cf. la formule de Weingarten, dans la section 1) s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned} A_{\xi_1} &= (\lambda) \mu 0 \dots 0 \mu \lambda 0 \dots 0 0 0 \lambda \dots 0 \dots 0 0 0 \dots \lambda, \\ A_{\xi_2} &= (\mu) 0 0 \dots 0 0 - \mu 0 \dots 0 0 0 0 \dots 0 \dots 0 0 0 \dots 0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons aussi certains exemples de classes de variétés, qui réalisent l'égalité dans (0.4), analogues à celles obtenues dans [5]. Dans la dernière section, nous montrons que l'égalité dans (0.4) est effectivement atteinte; notamment par certaines surfaces qui sont une version hyperbolique des surfaces de Vrănceanu [7].

1. Préliminaires

Soit M^n une sous - variété riemannienne d'une variété pseudo - riemannienne $Q_n^m(c)$ à courbure constante c , de signature $(m - n, n)$. Notons $\bar{\nabla}$, respectivement ∇ , la connexion de Levi- Civita associée à la métrique pseudo-riemannienne sur $Q_n^m(c)$, respectivement la connexion correspondant à la métrique induite sur M . La seconde forme fondamentale h de M dans $Q_n^m(c)$ est définie par la formule de Gauss:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

où X, Y sont des champs de vecteurs tangents à M . $h(X, Y)$ est un champ de vecteurs normal à M qui est symétrique en X et Y . Soit ξ un champ de vecteurs normal à M . Alors l'application de Weingarten A_ξ relative à ξ et à la connexion normale ∇^N de M dans $Q_n^m(c)$ est définie par la formule de Weingarten:

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^N \xi,$$

où $-A_\xi X$ et $\nabla_X^N \xi$ sont respectivement la composante tangentielle et la composante normale de $\bar{\nabla}_X \xi$.

On prend un champ local de repères orthonormés $(e_1, \dots, e_n, \xi_1, \dots, \xi_{m-n})$ sur $Q_n^m(c)$ tel que $(e_1, \dots, e_n)$ sont tangents à M , et donc $(\xi_1, \dots, \xi_{m-n})$ sont normaux à M . Si $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ est le corepère associé au repère précédent, la métrique pseudo-riemannienne sur $Q_n^m(c)$ et la seconde forme fondamentale s'écrivent respectivement:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 - \sum_{\alpha=n+1}^m \omega_\alpha^2,$$

$$h = \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq m-n \\ 1 \leq i, j \leq n}} \varepsilon_\alpha h_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j \otimes \xi_\alpha,$$

où h_{ij}^α est un tenseur symétrique, $\varepsilon_\alpha = \langle \xi_\alpha, \xi_\alpha \rangle$ et $\langle, \rangle$ désigne le produit indéfini associé à la métrique sur $Q_n^m(c)$.

Les formes de connexion s'expriment dans le corepère tangent $(\omega_1, \dots, \omega_n)$:

$$(1.1) \quad \omega_{i, \alpha+n} = \sum_{j=1}^n h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad i = 1, \dots, n \text{ et } \alpha = 1, \dots, m-n.$$

Le vecteur de courbure moyenne défini par $H = \frac{1}{n} \text{trace} h$ s'écrit:

$$(1.2) \quad H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{(m-n)} \varepsilon_\alpha h_{ii}^\alpha \xi_\alpha,$$

Soient R et R^N les tenseurs de courbure associés à ∇ et ∇^N respectivement. L'équation de Ricci s'écrit:

$$R^N(X, Y)\xi = h(X, A_\xi Y) - h(A_\xi X, Y).$$

Rappelons la définition de la courbure scalaire normalisée τ définie dans [3], et celle de la courbure normale scalaire normalisée τ^N introduite dans [5]:

$$(1.3) \quad \tau = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle,$$

$$(1.4) \quad \tau^N = \frac{2}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{1=\alpha < \beta}^{m-n} \langle R^N(e_i, e_j)\xi_\alpha, \xi_\beta \rangle^2}$$

Remarque Pour $n = 2$, τ n'est autre que la courbure de Gauss K de la surface M et $\tau^N = |K^N|$, où K^N est la courbure normale étudiée par Wintgen [10] (pour $m = 4$), puis par Guadalupe et Rodriguez [6] pour m quelconque.

2. Démonstration du Théorème

Dans cette section, on prend $m = n + 2$, i.e. la sous-variété est de codimension 2. Les formules (1.2) et (1.4) se réduisent alors à:

$$(2.1) \quad H = -\frac{1}{n} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^1 \right) \xi_1 + \left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^2 \right) \xi_2 \right\},$$

$$(2.2) \quad \tau^N = \frac{2}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle R^N(e_i, e_j)\xi_1, \xi_2 \rangle^2}.$$

Pour démontrer le théorème A, nous aurons besoin de deux lemmes techniques et des deux inégalités triviales qui suivent:

$$(2.3) \quad (a + b)^2 \geq 4ab,$$

et l'égalité est réalisée dans (2.3) si et seulement si $a = b$.

$$(2.4) \quad (A - C)^2 \leq 2((A - B)^2 + (B - C)^2),$$

et l'égalité est réalisée dans (2.4) si et seulement si $B = \frac{1}{2}(A + C)$.

2.1. Lemme Soient n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$. On a:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \right].$$

2.2. Lemme[5] Soient n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, et soit $A = \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2$. On a:

$A \geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2$ et l'égalité est satisfaite si et seulement si $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = a_3 = a_4 = \dots = a_n$.

Soient k, l deux entiers tels que $1 \leq k < l \leq n$ et $(k, l) \neq (1, 2)$. Si

$$A = \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 = \frac{n}{2}(a_k - a_l)^2,$$

alors $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

Démonstration Pour $n = 2$, le lemme est trivial. Supposons que le lemme est vrai pour un entier $n \geq 2$. Alors en appliquant successivement l'hypothèse de récurrence puis (2.4), on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i - a_j)^2 &\geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_{n+1})^2 + (a_2 - a_{n+1})^2 \geq \\ &\geq \frac{n+1}{2}(a_1 - a_2)^2, \end{aligned}$$

de plus, si l'égalité est satisfaite alors $a_3 = a_4 = \dots = a_n = a_{n+1}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. On voit immédiatement, par simple calcul que la réciproque est vraie.

Pour démontrer (2), on remarque que si $k, l > 2$ alors d'après (1), $a_k = a_l$, donc $A = 0$ et (2) découle immédiatement dans ce cas. On peut donc supposer que $l > 2$ et que $k = 2$. Appliquant alors (1) aux couples $(1, 2)$ et $(2, l)$, on trouve que $a_l = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ et $a_1 = \frac{1}{2}(a_l + a_2)$, d'où $a_l = a_1 = a_2$, par conséquent $A = 0$.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le Théorème A.

Démonstration Soit $p \in M^n$. On choisit ξ_1 dans la direction du vecteur de courbure moyenne et ξ_2 un vecteur orthogonal. Ensuite, on prend une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que l'application A_{ξ_2} soit un endomorphisme diagonal. L'équation de Ricci nous donne alors:

$$\langle R^N(e_i, e_j)\xi_2, \xi_1 \rangle = \langle (h_{jj}^2 h(e_i, e_j) - h_{ii}^2 h(e_i, e_j)), \xi_1 \rangle = (h_{jj}^2 - h_{ii}^2) h_{ij}^1.$$

D'où:

$$\frac{n(n-1)}{2} \tau^N = \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (h_{jj}^2 - h_{ii}^2)^2 (h_{ij}^1)^2}.$$

L'équation de Gauss, traduite en termes de tenseurs de courbure donne:

$$\langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle = c(\langle e_j, e_j \rangle \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle) +$$

$$+ [h(e_j, e_j), h(e_i, e_i)] > - < h(e_i, e_j), h(e_j, e_i) > = \\ = c + < h_{jj}, h_{ii} > - < h_{ij}, h_{ij} > .$$

D'où:

$$(2.5) \quad \frac{n(n-1)}{2}(\tau - c) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (< h_{ii}, h_{jj} > - < h_{ij}, h_{ij} >).$$

Maintenant, d'après (2.1) on a:

$$n^2 \|H\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^1 \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^2 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (h_{ii}^1)^2 + 2 \sum_{i < j} h_{ii}^1 h_{jj}^1 \right) + \\ \left(\sum_{i=1}^n (h_{ii}^2)^2 + 2 \sum_{i < j} h_{ii}^2 h_{jj}^2 \right).$$

En appliquant le lemme 2.1, on obtient:

$$n^2 \|H\|^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i < j} (h_{ii}^1 - h_{jj}^1)^2 + \sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 \right) + \\ \frac{2n}{n-1} \sum_{i < j} (h_{ii}^1 h_{jj}^1 + h_{ii}^2 h_{jj}^2) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i < j} (h_{ii}^1 - h_{jj}^1)^2 + \sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 \right) - \\ - \frac{2n}{n-1} \sum_{i < j} < h_{ii}, h_{jj} > ,$$

ce qui, d'après (2.5), devient:

$$n^2 \|H\|^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i < j} (h_{ii}^1 - h_{jj}^1)^2 + \sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 \right) - \frac{2n}{n-1} \\ \left(\frac{n(n-1)}{2}(\tau - c) + \sum_{i < j} < h_{ij}, h_{ij} > . \right.$$

Puisque A_{ξ_2} est diagonal, cette dernière égalité est équivalente à la suivante:

$$n^2(n-1)(\|H\|^2 + \tau - c) = \left(\sum_{i < j} (h_{ii}^1 - h_{jj}^1)^2 + \sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 \right) + 2n \sum_{i < j} (h_{ij}^1)^2,$$

d'où:

$$n^2(n-1)(\|H\|^2 + \tau - c) \geq \sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 + 2n \sum_{i < j} (h_{ij}^1)^2.$$

Ensuite, utilisant successivement (2.3) et le lemme 2.2, on aboutit enfin à :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 + 2n \sum_{i < j} (h_{ij}^1)^2 &\geq \sqrt{8n \left(\sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 \right) \left(\sum_{k < l} (h_{kl}^1)^2 \right)} \\ &\geq 2n \sqrt{\sum_{k < l} (h_{kk}^2 - h_{ll}^2)^2 (h_{kl}^1)^2} \geq n^2(n-1)\tau^N, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (0.4).

Supposons maintenant, qu'en un point p l'égalité est atteinte dans (0.4). Dans ce cas, toutes les inégalités obtenues précédemment deviennent des égalités. Alors, en appliquant (2.3) et le lemme 2.2. on trouve pour (k, l) , $1 \leq k < l \leq n$,

$$(2.6) \quad h_{kk}^1 - h_{ll}^1 = 0,$$

$$(2.7) \quad \sum_{i < j} (h_{ii}^2 - h_{jj}^2)^2 = 2n \sum_{i < j} (h_{ij}^1)^2,$$

$$(2.8) \quad h_{kl}^1 = 0 \text{ ou } \frac{1}{2}(h_{kk}^2 + h_{ll}^2) = h_{mm}^2 \text{ pour tout } m \neq k, l.$$

Supposons d'abord que la seconde partie de (2.8) est vérifiée pour deux couples (k, l) . Alors, le lemme 2.2. implique que $h_{11}^2 = h_{22}^2 = \dots = h_{nn}^2$. Puisque ξ_2 est orthogonal à H , on a $h_{ii}^2 = 0$ pour tout i , et (2.7) donne $h_{ij}^1 = 0$ pour $i \neq j$ donc M^n est totalement ombilicale d'après (2.6).

Supposons maintenant que la seconde partie de (2.8) est vérifiée pour un seul couple (k, l) . On peut supposer $k = 1$ et $l = 2$, quitte à réordonner la base $(e_1, \dots, e_n)$. Ensuite, en posant $h_{11}^2 = \mu$ et $h_{22}^2 = \nu$, on a $h_{mm}^2 =$

$\frac{1}{2}(\mu + \nu)$, d'où $\nu = -\mu$ puisque ξ_2 est orthogonal à H . D'après notre hypothèse, (2.8) donne $h_{kl}^1 = 0$ pour $k < l$, $(k, l) \neq (1, 2)$. Et, (2.7) se réduit à :

$$2n(h_{12}^1)^2 = 4\mu^2 + 2(n-2)\mu^2 = 2n\mu^2.$$

Ainsi, avec (2.6), et quitte à changer e_2 en $-e_2$ si nécessaire, la deuxième partie du théorème est démontrée dans ce cas.

Enfin, si la seconde partie de (2.8) n'est jamais satisfaite, alors $h_{kl}^1 = 0$ pour tous les indices $k < l$. Dans ce cas, (2.7) entraînerait $h_{11}^2 = \dots = h_{nn}^2$, ce qui contredit l'hypothèse.

3. Quelques classes de sous-variétés réalisant l'égalité

3.1. Les sous-variétés totalement ombilicales Ce sont les sous variétés pour lesquelles les opérateurs de Weingarten sont proportionnels à l'identité. Les sous-variétés totalement ombilicales de dimension n , d'une $(n+2)$ -variété pseudo-riemannienne de signature $(2, n)$ à courbure constante satisfont clairement l'égalité dans (0.4). Une classification des sous-variétés totalement ombilicales d'une variété à courbure constante est donnée dans [1].

3.2. Les surfaces dont l'ellipse de courbure est un cercle Pour davantage de détails sur la notion d'*ellipse de courbure*, voir [8] ou [11]. C'est le sous-espace de l'espace normal défini par $\{h(X, X) : X \in T_p M, \|X\| = 1\}$, où h est la seconde forme fondamentale de l'immersion et $\| \cdot \|$ la norme des vecteurs. Les surfaces d'une variété $Q_2^4(c)$ pour lesquelles l'ellipse de courbure est un cercle réalisent l'égalité dans (0.4) [7]. Un cas particulier de cette classe de surfaces est constitué par les surfaces superminimales (i.e. minimales ayant une ellipse de courbure circulaire) de l'espace pseudo-euclidien E_2^4 . Les cylindres, au-dessus de telles surfaces réalisent également l'égalité.

3.3. Les courbes planes holomorphes Les courbes holomorphes dans C_1^2 sont des surfaces superminimales de E_2^4 (C_1^2 étant l'espace pseudo-euclidien complexe de dimension 2 et de signature $(2, 2)$). Par conséquent les cylindres complexes, au-dessus de courbes holomorphes de C_1^2 , satisfont aussi l'égalité dans (0.4).

3.4. Produit tordu (warped product) [9] Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes, et ρ une fonction positive C^∞ sur M_1 . Le produit *tordu* (warped product) $M_1 \times_\rho M_2$ de (M_1, g_1) et (M_2, g_2) est la variété produit $M_1 \times M_2$ munie de la métrique $g = g_1 \times_\rho g_2$ définie par:

$$g_1 \times_\rho g_2 = \pi_1^* g_1 + (\rho \circ \pi_1) \pi_2^* g_2,$$

$\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ étant les projections naturelles, $i = 1, 2$. On obtient alors une série d'exemples en décomposant l'espace E_2^{n+2} en produit tordu $E_2^{n+2} = E^{n-2} \times_\rho E_2^4$. Ainsi, prenant une surface superminimale M^2 de E_2^4 et formant la sous-variété $E^{n-2} \times_\rho M^2$ de E_2^{n+2} , on obtient encore une sous-variété qui réalise l'égalité dans (0.4).

4. Version hyperbolique des surfaces de Vranceanu

Dans l'espace pseudo-euclidien E_2^4 muni de la métrique

$$\bar{g} = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2,$$

on considère les surfaces de rotation M dont le vecteur position est donné par:

$$X(u, v) = r(u) (\text{chu.shv}, \text{shu.chv}, \text{shu.shv}, \text{chu.chv}),$$

où $(u, v) \in R^2$ et $r(u)$ est une fonction différentiable. La première forme fondamentale est décrite par:

$$ds^2 = (r^2 - r'^2) du^2 + r^2 dv^2.$$

On choisit un repère mobile (e_1, e_2, e_3, e_4) de E_2^4 tel que (e_1, e_2) soit tangent à M et (e_3, e_4) soit normal à M ;

$$e_1 = (\text{chu.chv}, \text{shu.shv}, \text{shu.chv}, \text{chu.shv}),$$

$$e_2 = \frac{1}{A} (B\text{shv}, C\text{chv}, C\text{shv}, B\text{chv}),$$

$$e_3 = \frac{1}{A} (C\text{shv}, B\text{chv}, B\text{shv}, C\text{chv}),$$

$$e_4 = -\varepsilon (\text{shu.chv}, \text{chu.shv}, \text{chu.chv}, \text{shu.shv}),$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \sqrt{\varepsilon(r^2 - r'^2)}, \quad \varepsilon = \pm 1 \text{ de façon à ce que } \varepsilon(r^2 - r'^2) > 0, B = \\ &= r'chu + rshu \text{ et } C = r'shu + rchu. \end{aligned} \right.$$

Si $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire associé à la métrique $\bar{g}$ sur E_2^4 , on vérifie aisément que l'on a :

$$\langle e_1, e_1 \rangle = - \langle e_4, e_4 \rangle = 1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = - \langle e_3, e_3 \rangle = \varepsilon.$$

Le repère (e_1, e_2) et le corepère associé s'écrivent en fonction de u et v comme suit :

$$e_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial v}, \quad e_2 = \frac{1}{\varepsilon A} \frac{\partial}{\partial u}, \quad \omega_1 = r dv \text{ et } \omega_2 = \varepsilon A du.$$

Les formes locales de structure sont déterminées à partir des équations

$$de_i = \sum_k \varepsilon_k \omega_{ik} e_k, \quad \varepsilon_k = \langle e_k, e_k \rangle.$$

On trouve :

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_{12} &= -\frac{r'}{rA} \omega_1, \quad \omega_{13} = -\frac{1}{A} \omega_1, \quad \omega_{14} = \frac{1}{A} \omega_2, \quad \omega_{23} = \\ &= \frac{\varepsilon}{A^3} (2r'^2 - rr'' - r^2) \omega_2, \quad \omega_{24} = \frac{1}{\varepsilon A} \omega_1, \quad \omega_{34} = \frac{r'}{\varepsilon r A} \omega_1. \end{aligned} \right.$$

De ces équations et de la relation (1.1), on déduit la seconde forme fondamentale :

$$\left\{ \begin{aligned} h_{11}^1 &= -a, \quad h_{12}^1 = h_{21}^1 = 0, \quad h_{22}^1 = \varepsilon b, \quad h_{11}^2 = h_{22}^2 = 0, \quad h_{12}^2 = h_{21}^2 = \varepsilon a, \end{aligned} \right. \quad (4.1)$$

où l'on a posé :

$$a = A^{-1} \text{ et } b = \varepsilon A^{-1} (2r'^2 - rr'' - r^2).$$

Ceci nous permet de déterminer le vecteur de courbure moyenne, la courbure de Gauss K et la courbure normale K^N de la surface M dans E_2^4 . On obtient :

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon(a-b)e_3, \quad \tau = K = ab + a^2,$$

$$\tau^N = |K^N| = |a(a + \varepsilon b)|.$$

Notons que lorsque $\varepsilon = +1$, i.e. dans le cas où $r^2 - r'^2 > 0$, la surface M est une sous-variété riemannienne de l'espace pseudo-euclidien E_2^4 ; nous sommes donc dans les hypothèses du théorème A et il est aisé de vérifier l'inégalité (0.4) dans ce cas. Nous avons en effet:

$$(4.2) \quad 4(-||H||^2 - \tau) = -[(a+b)^2 + 4a^2] \leq -4|a(a+b)|, \leq -4\tau^N.$$

D'autre part, les opérateurs de Weingarten s'écrivent dans la base

$$(e_1, e_2, \xi_1, \xi_2)$$

où $\xi_1 = e_3$ et $\xi_2 = e_4$, sous la forme:

$$A_{\xi_1} = (-) a00b, \quad A_{\xi_2} = (0) aa0$$

On vérifie, à l'aide d'un calcul très simple d'algèbre linéaire, qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de l'espace tangent dans laquelle on a:

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} b - a2 \frac{\varepsilon_1(a+b)}{2\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1(a+b)}{2\varepsilon_2} \frac{b-a}{2},$$

$$A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \varepsilon_1(a+b)2\varepsilon_2 00 - \frac{\varepsilon_1(a+b)}{2\varepsilon_2},$$

si et seulement si l'égalité est satisfaite dans (4.2). Cette base est donnée par:

$$e'_1 = \alpha(e_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 e_2), \quad e'_2 = \alpha(\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2) \quad \text{avec } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Remarque L'égalité est satisfaite dans (4.2) si et seulement si on a:

$$(4.3) \quad |a+b| = 2|a|.$$

Et ceci équivaut, d'après (4.1), à $||h_{11} - h_{22}|| = 2||h_{12}||$; autrement dit l'ellipse de courbure est un cercle. En résolvant l'équation (4.3), on constate que l'égalité dans (4.2) est effectivement atteinte par les surfaces M données par:

$$\{X(u, v) = r(u) (chu.shv, shu.chv, shu.shv, chu.chv)r(u) =$$

$$kch(-2u + l) \text{ our}(u) = kch(2u + l), (u, v) \in R^2,$$

avec k et l des constantes arbitraires d'intégration. Parmi ces surfaces, les minimales sont celles pour lesquelles $r(u) = kch(-2u + l)$.

References

- [1] B. Y. Chen paper Geometry of submanifolds Marcel Dekker, New York, (1973).
- [2] B. Y. Chen Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds Archiv. Math., pages 568-578, Vol. 60, (1993).
- [3] B. Y. Chen Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real space-forms Glasgow Math. J, pages 87-97, Vol. 38, (1996).
- [4] S. S. Chern Minimal submanifolds in a Riemannian manifold Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas, (1968).
- [5] P. J. De Smet, F. Dillen, L. Verstraelen and L. Vranken A pointwise inequality in Submanifold Theory, preprint.
- [6] I. V. Guadalupe and L. Rodriguez Normal curvature of surfaces in space forms Pacific J. Math., pages 95-103, Vol. 106, (1983).
- [7] B. Gmira et L. Verstraelen Les courbures externes et internes des surfaces riemanniennes dans des espaces pseudo-riemanniens, à paraître.
- [8] J. A. Little paper On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidian space jour Ann. Mat. Pura Appl., pages 261-335, Vol. 83, (1996).
- [9] B.O'Neill Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity Academic Press, Inc., (1983).

- [10] P. Wintgen Sur l'inégalité de Chen-Willmore C. R. Acad. Sc. Paris, pages 993-995, Vol. 288, (1979).
- [11] Y. C. Wong Contributions to the theory of surfaces in 4-space of constant curvature Trans. Amer. Math. Soc., pages 467-507, Vol. 59, (1946).

Received : March 10, 1997.

B. Gmira

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
B. P.: 2121
Tétouan (Maroc)
Université de Valenciennes
Lamath Groep Exacte Wetenschappen
Le Mont Houy, BP 311
59304 Valenciennes Cedex (France)

L. Verstraelen

Katholieke Universiteit Leuven
Departement Wiskunde
Celestijnenlaan 200 B
B 3001 Leuven (Belgium)
Katholieke Universiteit Brussel
Vrijheidslaan 17
B 1081 Brussel (Belgium)