CLASSES DE STEINITZ ET EXTENSIONS QUATERNIONIENNES

Richard Massy et Bouchaïb Sodaïgui
Université de Valenciennes, Valenciennes, France.

Abstract

Let k be a number field. We prove that the set of Steinitz classes of quadratic extensions K/k which can be embedded in quaternionic extensions of degree 8, tamely or wildly ramified over k , is the full class group $Cl(k)$ of k . Moreover, we provide explicit formulas to construct these quaternionic extensions.

KEYWORDS AND PHRASES : *Steinitz classes, explicit embedding problem, tamely or wildly ramified quaternionic extensions.*

RUNNING HEAD TITLE : *Steinitz classes.*

0.. Introduction

Pour tout corps de nombres F , on note O_F l'anneau des entiers de F . Soient k un corps de nombres et K/k une extension de degré n . L'anneau O_K est un O_k -module sans torsion de rang n ; il existe donc un idéal I de O_k tel que $O_K \simeq O_k^{n-1} \oplus I$ en tant que O_k -module. La classe de I dans le groupe $Cl(k)$ des classes de k est appelée la classe de Steinitz de l'extension K/k ou de l'anneau O_K , et on la note $Cl(O_K)$.

D'après [3] ou [15], tout élément de $Cl(k)$ est réalisable comme classe de Steinitz d'une extension quadratique de k . Pour un nombre premier impair l , signalons que Long [8] a montré le résultat suivant: l'ensemble des classes de Steinitz des extensions cycliques de k de degré l^r ($r \geq 1$), et modérément ramifiées, est un sous-groupe de $Cl(k)$.

Dans ce papier, on appelle "extension quaternionnienne de degré 8" une extension galoisienne de groupe de Galois isomorphe au groupe quaternionnien H_8 . On décrit un ensemble de classes de Steinitz d'extensions assujetties à une condition de plongement. Précisément, on décrit l'ensemble des classes de Steinitz des extensions quadratiques de k qui se plongent dans des extensions quaternionniennes de degré 8 modérément ou sauvagement ramifiées. De plus, on fournit des formules explicites de construction de ces extensions quaternionniennes.

1.. Énoncé des résultats

On démontre section 2 les résultats suivants :

Théorème 1 1 *Pour tout corps de nombres k , l'ensemble des éléments de $Cl(k)$ réalisables comme classes de Steinitz d'extensions quadratiques de k , modérément (resp. sauvagement) ramifiées, et plongeables dans des extensions quaternionniennes de degré 8 sur k , modérément (resp. sauvagement) ramifiées, est égal au groupe $Cl(k)$.*

Théorème 1 2 *Soit k un corps de nombres.*

- (1) *Soit K/k une extension quadratique modérément ramifiée. Le corps K se plonge dans une extension quaternionnienne de degré 8 sur k si et seulement si les places réelles de k se prolongent en des places réelles de K .*

- (2) Soit $L = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})/k$ une extension biquadratique bicyclique, modérément ramifiée, de groupe de Galois de générateurs σ et τ définis par

$$\sigma(\sqrt{a})/\sqrt{a} = \tau(\sqrt{b})/\sqrt{b} = -1, \quad \sigma(\sqrt{b})/\sqrt{b} = \tau(\sqrt{a})/\sqrt{a} = 1.$$

Soit $O_{2,L}$ l'anneau semi-local des éléments $a \in L$ de valuation $v_{\mathcal{D}}(a) \geq 0$ en tous les idéaux premiers $\mathcal{D}$ de L divisant $2O_L$.

- (2.1) L'extension L/k se plonge dans une extension quaternionienne, modérément ramifiée, N/k de degré 8 si et seulement s'il existe deux éléments y et z dans le groupe multiplicatif $1 + 2O_{2,L}$ tels que l'on ait

$$y\sigma(y) = 1, \quad z\tau(z) = -1, \quad \sigma(z)/z = -\tau(y)/y.$$

- (2.2) Dans les conditions du (2.1), on peut prendre $N = L(\sqrt{x})$ avec pour x l'élément suivant du groupe multiplicatif $1 + 4O_{2,L}$

$$x = \theta + y^2\sigma(\theta) + z^2\tau(\theta) + (y\sigma(z))^2\sigma\tau(\theta)$$

où θ est un entier de L de trace 1 sur k : $\theta \in O_L, \text{Tr}_{L/k}(\theta) = 1$.

Scholies. 1) L'équivalence du (1) exprime que dans la Proposition III.2 de [2] (cf. infra), la seconde condition est toujours vérifiée lorsque l'extension K/k est modérée.

2) Le (2) construit une solution N/k modérément ramifiée au problème de plongement de L/k dans une extension quaternionienne de degré 8, qui ne peut pas être obtenue directement par les formules de [10] où les solutions sont données sans condition de ramification.

2.. Démonstrations

Proposition 2 1 Soient $m \in k$ tel que $K = k(\sqrt{m})$ et $\Delta(K/k)$ le discriminant de K/k .

- (1) On peut écrire d'une manière unique $mO_k = I(m)^2J$ où $I(m)$ est un idéal fractionnaire de O_k , et J un idéal entier de O_k sans facteurs carrés.
- (2) On a $\Delta(K/k) = JJ'^2$ où J' est un idéal entier de O_k divisant $2O_k$. L'extension K/k est modérément ramifiée si et seulement si $J' = O_k$.

- (3) La classe de Steinitz de O_K est égale à la classe de l'idéal $I(m)^{-1}J'$ dans le groupe des classes de k :

$$Cl(O_K) = Cl(I(m)^{-1}J').$$

Démonstration. Les points (1) et (2) résultent de la théorie de Kummer et du début de la section 2 de [3].

(3) Soient X le réseau libre de O_k dans K de base $\{1, \sqrt{m}\}$, et $\Delta(X)$ son discriminant par rapport à la forme trace ; on a $\Delta(X) = 4m$. En utilisant la notion d'invariant relatif de deux réseaux (cf.[14] ; Chap.III§1,§2), on montre sans difficulté qu'il existe un idéal fractionnaire U de O_k tel que $\Delta(K/k) = \Delta(X)U^2$ et $Cl(O_K) = Cl(U)$. La première égalité et le fait que $\Delta(K/k) = JJ'^2$ entraînent $mO_k = (2^{-1}U^{-1}J')^2J$. De l'unicité de $I(m)$ on déduit que $I(m) = 2^{-1}U^{-1}J'$, et par conséquent

$$Cl(U) = Cl(I(m)^{-1}J') = Cl(O_K). \quad \blacksquare$$

Etant donnée une extension quelconque E/k , soit le groupe multiplicatif

$$U_E(n) := 1 + 2^n O_{2,E} \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\})$$

où $O_{2,E}$ est l'anneau semi-local des éléments $a \in E$ de valuation $v_{\mathcal{D}}(a) \geq 0$ en tous les idéaux premiers $\mathcal{D}$ de E divisant $2O_E$. On peut aussi définir $U_E(n)$ par la congruence mod^* usuelle du corps de classes (cf. infra ou [1], p. 13) :

$$U_E(n) = \{x \in E^\times / x \equiv 1 \text{ mod}^*(2^n O_E)\}.$$

Pour tout corps intermédiaire F , $k \subseteq F \subseteq E$, on vérifie que

$$(2.2) \quad U_F(n) = F^\times \cap U_E(n)$$

$$(2.3) \quad U_F(2) \cap F^{\times 2} = U_F(1)^2.$$

Le critère suivant se déduit du §39 de [6].

(2.4) Une extension quadratique E/F est modérément ramifiée si et seulement s'il existe un élément $x \in U_F(2)$ tel que $E = F(\sqrt{x})$.

Démonstration du théorème 1.2

(1) Soit $m \in k$ tel que $K = k(\sqrt{m})$. D'après [13] ou le Théorème IV.2 de [2], K/k est plongeable dans une extension quaternionnienne sur k de degré 8 si et seulement si m est somme de trois carrés dans k , ce qui est équivalent par la Proposition III.2 de [2] aux deux conditions suivantes : (i) m est totalement positif, i.e pour tout plongement réel σ de k , $\sigma(m) > 0$;

(ii) pour tout idéal premier $\mathcal{B}$ de O_k au dessus de 2 tel que $[k_{\mathcal{B}} : \mathbf{Q}_2]$ soit impair, $-m$ n'est pas un carré dans $k_{\mathcal{B}}$, où $k_{\mathcal{B}}$ est le complété de k pour la place $\mathcal{B}$.

La condition du théorème 1.2 concernant le prolongement des places réelles de k est équivalente à (i); reste à montrer (ii).

(ii) Soit $\mathcal{B}$ un idéal premier quelconque de O_k au dessus de 2. Supposons que $-m$ soit un carré dans $k_{\mathcal{B}}$: $-m = a^2$ ($a \in k_{\mathcal{B}}$), d'où $k_{\mathcal{B}}(\sqrt{m}) = k_{\mathcal{B}}(\sqrt{-1})$, de sorte que $k_{\mathcal{B}}(\sqrt{m})$ est le compositum des extensions $k_{\mathcal{B}}$ et $\mathbf{Q}_2(\sqrt{-1})$. On garde les mêmes notations pour les idéaux premiers et leurs complétés. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{D}$) l'idéal premier au dessus de $\mathcal{B}$ (resp. 2) dans $k_{\mathcal{B}}(\sqrt{m})$ (resp. $\mathbf{Q}_2(\sqrt{-1})$). En notant par $e(\ / \)$ les différents indices de ramification, on a par transitivité :

$$e(\mathcal{P}/2) = e(\mathcal{P}/\mathcal{B}) \times e(\mathcal{B}/2) = e(\mathcal{P}/\mathcal{D}) \times e(\mathcal{D}/2).$$

L'extension K/k étant modérément ramifiée, on a $e(\mathcal{P}/\mathcal{B}) = 1$, et comme $e(\mathcal{D}/2) = 2$, c'est que $e(\mathcal{B}/2)$ est pair. On en déduit que $[k_{\mathcal{B}} : \mathbf{Q}_2]$ est pair. Par conséquent, si l'on a $[k_{\mathcal{B}} : \mathbf{Q}_2]$ impair, $-m$ n'est pas un carré dans $k_{\mathcal{B}}$: d'où (ii).

(2) Supposons que L/k se plonge dans une extension quaternionienne modérément ramifiée N/k . Comme N/L est a fortiori modérée, il existe, d'après (2.4), un élément $x \in U_L(2)$ tel que $N = L(\sqrt{x})$. Du fait que N/k est galoisienne, on déduit alors par (2.3) que pour tout $\gamma \in \text{Gal}(L/k)$, il existe $x_{\gamma} \in U_L(1)$ pour lequel $\gamma(x)/x = x_{\gamma}^2$. Soit maintenant $N' = L(\sqrt{x'})/k$ l'extension quaternionienne définie par les formules du Théorème 3(B) de [10]: il existe $y' \in L^{\times}$, $z' \in L^{\times}$ tels que

$$y'\sigma(y') = -1, \quad z'\tau(z') = -1, \quad \sigma(z')/z' = -\tau(y')/y'$$

et l'on a

$$x' = \sqrt{ab}\alpha z'$$

où $\alpha \in k(\sqrt{a})^{\times}$ vérifie

$$\alpha/\sigma(\alpha) = y'\tau(y').$$

De plus, en vertu du (3.3) de [10], il existe $c \in k^{\times}$ et $l \in L^{\times}$ pour lesquels

$$x = cl^2 x'.$$

Il en résulte que

$$x_{\sigma} = \pm \frac{\sigma(l)}{l} \frac{1}{y'}, \quad x_{\tau} = \pm \frac{\tau(l)}{l} \frac{1}{z'}.$$

Posons alors

$$y := \frac{l}{\sigma(l)} y', \quad z := \frac{l}{\tau(l)} z'.$$

Ce sont des éléments de $U_L(1)$ comme x_σ et x_τ , qui vérifient les conditions de l'énoncé comme y' et z' .

Inversement, soit $x_0 := \sqrt{ab}\alpha z$ où $\alpha \in k(\sqrt{a})^\times$ vérifie $\alpha/\sigma(\alpha) = y\tau(y)$. On a

$$\frac{\sigma(x_0)}{x_0} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\tau(x_0)}{x_0} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\sigma\tau(x_0)}{x_0} = \frac{1}{(y\sigma(z))^2}.$$

L'élément x de l'énoncé s'écrit donc

$$x = \theta + \frac{x_0}{\sigma(x_0)}\sigma(\theta) + \frac{x_0}{\tau(x_0)}\tau(\theta) + \frac{x_0}{\sigma\tau(x_0)}\sigma\tau(\theta).$$

On en déduit que

$$\gamma(x)/x = \gamma(x_0)/x_0 \quad (\gamma \in \text{Gal}(L/k)).$$

D'après le (3.5) de [10], ceci implique en particulier que l'extension $N=L(\sqrt{x})/k$ est quaternionienne comme $L(\sqrt{x_0})/k$. Enfin, les éléments y et z étant dans $U_L(1)$, leurs carrés sont dans $U_L(2)$, et comme $\text{Tr}_{L/k}(\theta) = 1$, on a bien $x \in U_L(2)$. ■

La démonstration du théorème 1.1 dans le cas modéré utilisera les deux lemmes qui suivent.

Pour tout cycle $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty \mathcal{M}_0$ de k où $\mathcal{M}_\infty = \prod_{\sigma(k) \subset \mathbf{R}} \sigma$, $\mathcal{M}_0$ étant un idéal entier de O_k , on désigne par $\mathcal{Cl}(k, \mathcal{M})$ le groupe des classes de rayon modulo $\mathcal{M}$. Rappelons que dans les notations de la théorie du corps de classes (cf. [1], Chap.II), on écrit $a \equiv 1 \bmod^*(\mathcal{M})$, avec $a \in k^\times$, si et seulement si :

- (1) quel que soit $\sigma \in \mathcal{M}_\infty$, $\sigma(a) > 0$
- (2) quel que soit $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_0$, $v_{\mathcal{B}}(a-1) \geq v_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_0)$, où $v_{\mathcal{B}}$ désigne la valuation en $\mathcal{B}$.

Lemme 2.5 . (1) Pour tout $c \in \mathcal{Cl}(k)$ il existe :

- $m \in k^\times$ tel que $m \equiv 1 \bmod^*(\mathcal{M}_\infty 4O_k)$
- $\mathcal{B}$ un idéal premier de O_k ne divisant pas $2O_k$
- I un idéal fractionnaire de O_k

tels que

$$mO_k = I^2\mathcal{B}, \quad c = Cl(I)^{-1}.$$

- (2) Pour l'idéal premier $\mathcal{B}$ du (1), il existe $m' \in k^\times$, et un idéal premier $\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$ de O_k ne divisant pas $2O_k$, tels que

$$m'O_k = \mathcal{B}', \quad m' \equiv 1 \pmod{*(\mathcal{M}_\infty 4\mathcal{B})}.$$

- (3) Pour les éléments m et m' précédents, l'extension $L := k(\sqrt{m}, \sqrt{m'})/k$ est bicyclique biquadratique et modérément ramifiée.

Démonstration. (1) Considérons $c^{-1} \in Cl(k)$ et le cycle $\mathcal{M} := \mathcal{M}_\infty 4O_k$. D'après la surjection canonique de $Cl(k, \mathcal{M})$ sur $Cl(k)$ (cf.[7], p.125), et le théorème de densité généralisé de Dirichlet (cf.[1], p.27), il existe un idéal fractionnaire de O_k , et un idéal premier $\mathcal{B}$ de O_k ne divisant pas $2O_k$, tels que $c^{-1} = Cl(I)$ et $Cl(I)^{-2} = Cl(\mathcal{B})$. L'existence d'un élément $m \equiv 1 \pmod{*(\mathcal{M})}$ vérifiant l'égalité du (1) est donc claire.

Pour la démonstration du (2), on considère la classe triviale de $Cl(k)$ et on procède comme pour (1) en utilisant le cycle $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty 4\mathcal{B}$.

(3) De $mO_k = I^2\mathcal{B}$ et $m'O_k = \mathcal{B}'$, on déduit que $v_{\mathcal{B}}(m) \equiv 1 \pmod{2}$ et $v_{\mathcal{B}'}(m') = 1$. Donc m et m' ne sont pas des carrés dans k , de sorte que les extensions $k(\sqrt{m})/k$ et $k(\sqrt{m'})/k$ sont quadratiques. Comme m et m' sont congrus à 1 $\pmod{*(4O_k)}$, ces extensions sont modérément ramifiées de discriminants respectifs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ en vertu de la proposition 2.1. On a $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$: sinon, la congruence que vérifie m' entraînerait $m' - 1 \in \mathcal{B}$, d'où $1 \in \mathcal{B}$, ce qui est impossible. Par suite $k(\sqrt{m}) \neq k(\sqrt{m'})$. La composée de $k(\sqrt{m})/k$ et $k(\sqrt{m'})/k$ est donc bicyclique biquadratique et modérément ramifiée. ■

On a le corollaire suivant du théorème 1.2 et du (1) du lemme 2.5.

Corollaire 2.6. *Pour tout corps de nombres k , l'ensemble des éléments de $Cl(k)$ réalisables comme classes de Steinitz d'extensions quadratiques de k , modérément ramifiées et plongeables dans des extensions quaternioniennes de degré 8 sur k , est égal au groupe $Cl(k)$.*

Démonstration. Soit $c \in Cl(k)$. Dans les notations du lemme 2.5 et en vertu de la proposition 2.1, c est la classe de Steinitz de l'anneau des entiers de l'extension $k(\sqrt{m})/k$. Comme m est totalement positif, toute place réelle de k se prolonge en une place réelle de $k(\sqrt{m})$. On conclut alors grâce au théorème 1.2.

Lemme 2.7 *L'extension $L = k(\sqrt{m}, \sqrt{m'})/k$ du lemme 2.5 se plonge dans une extension N/k quaternionnienne de degré 8 modérément ramifiée.*

Démonstration. On sait que L/k est plongable dans une extension quaternionnienne de degré 8 si et seulement si pour toute place v de k , on a la condition (*) $(-1, m)_v (-1, m')_v (m, m')_v = 1$ où pour tous $a, b \in k^\times$, $(a, b)_v$ désigne le symbole local en v (cf. [16], ou [4] dans le cas $k = \mathbb{Q}$). Examinons les différentes possibilités pour v .

- (1) Si v est complexe, (*) est vérifiée par définition de $(a, b)_v$. Si v est réelle, (*) est vérifiée car m et m' sont totalement positifs en vertu des congruences du lemme 2.5.
- (2) Soient $\mathcal{D}$ un idéal premier de O_k au dessus de 2 et e son indice de ramification absolu. Les congruences que vérifient m et m' entraînent $v_{\mathcal{D}}(m - 1) \geq v_{\mathcal{D}}(4O_k) = 2e$ et de même $v_{\mathcal{D}}(m' - 1) \geq 2e$. D'après ([14] : p.237.Prop.6), il existe deux entiers $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$(-1, m)_{\mathcal{D}} = (-1)^{v_{\mathcal{D}}(-1)a_1}, \quad (-1, m')_{\mathcal{D}} = (-1)^{v_{\mathcal{D}}(-1)a_2}$$

$$(m, m') = (-1)^{v_{\mathcal{D}}(m)a_2}$$

et ces symboles sont tous égaux à 1 car $v_{\mathcal{D}}(m) \equiv 0 \pmod{2}$.

- (3) Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de O_k qui n'est pas au dessus de 2. Soient $k_{\mathcal{P}}$ le complété de k en la place $\mathcal{P}$ et $\bar{k}_{\mathcal{P}}$ son corps résiduel de cardinal q . Pour tous $a, b \in k^\times$ posons $c := (-1)^{\alpha\beta} a^\beta b^{-\alpha}$, où $\alpha := v_{\mathcal{P}}(a)$, $\beta := v_{\mathcal{P}}(b)$. On sait que $(a, b)_{\mathcal{P}} = (c)^{\frac{q-1}{2}}$ où (c) est l'image de c dans $\mathcal{P}$ (cf. [14], Chap.XIV§3).

- (3.1) On suppose que $\mathcal{P} \neq \mathcal{B}$ et $\mathcal{P} \neq \mathcal{B}'$. D'après le lemme 2.5, on a $v_{\mathcal{P}}(m) \equiv 0 \pmod{2}$ et $v_{\mathcal{P}}(m') = 0$. Si $a = -1$ et $b = m$, on a $c = (-1)^{v_{\mathcal{P}}(m)} = 1$, d'où a fortiori, $(-1, m)_{\mathcal{P}} = 1$. De même $(-1, m')_{\mathcal{P}} = 1$. Si $a = m$ et $b = m'$, $c = \overline{m'}^{-v_{\mathcal{P}}(m)}$ et $(m, m')_{\mathcal{P}} = (\overline{m'}^{q-1})^{\frac{v_{\mathcal{P}}(m)}{2}} = 1$.

- (3.2) Par la formule du produit, il suffit maintenant d'examiner le cas $\mathcal{P} = \mathcal{B}$. Pour $a = m$ et $b = m'$, comme $v_{\mathcal{B}}(m') = 0$, il vient $c = \overline{m'}^{-v_{\mathcal{B}}(m)}$. Or la congruence $m' \equiv 1 \pmod{*(\mathcal{M}_{\infty} 4\mathcal{B})}$ se traduit dans $\mathcal{B}$ par $\overline{m'} = 1$, d'où $(m, m')_{\mathcal{B}} = 1$. Pour $a = -1$ et $b = m'$ on a $c = (-1)^{v_{\mathcal{B}}(m')} = 1$, d'où $(-1, m')_{\mathcal{B}} = 1$. Si $a = -1$ et $b = m$, $c = (-1)^{v_{\mathcal{B}}(m)} = -1$ car $v_{\mathcal{B}}(m) \equiv 1 \pmod{2}$, d'où

$(-1, m)_{\mathcal{B}} = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$. Or, d'une part $N_{k/\mathbf{Q}}(\mathcal{B}) = q$, d'autre part $\mathcal{B} = \Delta(k(\sqrt{m})/k)$. Comme $\mathcal{B}$ est premier avec $2O_k$, sa norme est impaire : de plus, aucune place réelle de k ne se prolonge en une place complexe de $k(\sqrt{m})$. Le théorème 1.4 de [9] nous dit alors que $N_{k/\mathbf{Q}}(\mathcal{B}) = (-1)^0 \bmod 4$, i.e $q \equiv 1 \bmod 4$. Par suite $(-1, m)_{\mathcal{B}} = 1$. Ceci achève la démonstration du lemme 2.7.

Démonstration du théorème 1.1

(1) Le cas modéré

Soit c un élément quelconque de $\mathcal{Cl}(k)$. Considérons l'extension du lemme 2.7: $L = k(\sqrt{m}, \sqrt{m'})/k$. D'après ([12], Theorem 6.6) ou [11], elle est plongeable dans une extension quaternionienne de degré 8 modérément ramifiée. Or pour l'extension $K = k(\sqrt{m})/k$, on a $c = \mathcal{Cl}(O_K)$ en vertu de la proposition 2.1: d'où la conclusion.

(2) Le cas sauvage

Soient $c \in \mathcal{Cl}(k)$ et J_1 le produit des idéaux premiers de O_k au dessus de 2. D'après le théorème de densité généralisé de Dirichlet, il existe d'une part un idéal premier $\mathcal{B}_1$ de O_k ne divisant pas $2O_k$, d'autre part un idéal premier $\mathcal{B}_2$ de O_k premier avec $2\mathcal{B}_1$, tels que $c^{-1} = \mathcal{Cl}(\mathcal{B}_1)$ et $c^2 \mathcal{Cl}(J_1^{-1}) = \mathcal{Cl}(\mathcal{B}_2)$ dans $\mathcal{Cl}^+(k)$ le groupe des classes de k au sens restreint. D'où l'existence d'un $\alpha \in k$ totalement positif tel que $\alpha O_k = \mathcal{B}_1^2 \mathcal{B}_2 J_1$. L'extension $K = k(\sqrt{\alpha})/k$ est quadratique car $v_{\mathcal{B}_2}(\alpha) = 1$. D'après la proposition 2.1, les idéaux premiers $\mathcal{P}$ de O_k ramifiés dans K sont $\mathcal{B}_2$ et tout idéal premier de O_k au dessus de 2. Pour de tels $\mathcal{P}$, on a $v_{\mathcal{P}}(\alpha) = 1$; par suite le polynôme $X^2 - \alpha$ est un polynôme d'Eisenstein dans $k_{\mathcal{P}}[X]$, et $\{1, \sqrt{\alpha}\}$ est une base locale d'entiers. Donc $v_{\mathcal{P}}(\Delta(K/k)) = v_{\mathcal{P}}(4\alpha) = 1 + v_{\mathcal{P}}(4O_k)$. On en déduit que $\Delta(K/k) = \mathcal{B}_2 J_1 (2O_k)^2$, d'où $\mathcal{Cl}(O_K) = \mathcal{Cl}(\mathcal{B}_1^{-1} 2^{-1} O_k) = c$ en vertu de la proposition 2.1. Pour tout idéal premier $\mathcal{D}$ de O_k au dessus de 2, $-\alpha$ ne peut être un carré dans $k_{\mathcal{D}}$ car $v_{\mathcal{D}}(\alpha) = 1$. Comme α est totalement positif, on en déduit par [2] que α est somme de trois carrés, donc que l'extension sauvagement ramifiée K/k se plonge dans une extension quaternionienne de degré 8. Remarquons enfin que pour la classe triviale $c = 1$ de $\mathcal{Cl}(k)$, il n'est pas nécessaire de prendre pour $\mathcal{B}_1$ un idéal premier; il suffit de prendre $\mathcal{B}_1 = O_k$. ■

3.. Exemples

Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{85})$. Pour tout entier premier p , $\mathcal{B}_p$ désigne un idéal premier de O_k au dessus de p . Le nombre de classes de k est 2 et son unité fonda-

mentale a pour norme -1. On en déduit que k possède deux classes ambiges et que $Cl(k) = \{1, Cl(\mathcal{B}_{17})\} = \{1, Cl(\mathcal{B}_5)\}$.

3.1 Le cas modéré

Les premiers 13 et 53 sont inertes dans k . Soient $m = 221 = 17 \cdot 13$ et $m' = 53$. On a $mO_k = \mathcal{B}_{17\mathcal{B}_{13}}^2$ et $m'O_k = \mathcal{B}_{53}$. On vérifie aisément que $m, m', \mathcal{B}_{13}$ et $\mathcal{B}_{53}$ satisfont les conditions du lemme 2.5. Donc $L = k(\sqrt{221}, \sqrt{53})/k$ se plonge dans une extension N/k quaternionienne modérément ramifiée de degré 8. Soient les extensions quadratiques $K_1 := k(\sqrt{221})/k$ et $K_2 := k(\sqrt{53})/k$. Le même lemme et la proposition 2.1 donnent $Cl(O_{K_1}) = Cl(\mathcal{B}_{17})$ et $Cl(O_{K_2}) = 1$.

L'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{53})$ est $\varepsilon = (7 + \sqrt{53})$. Soient y, z et θ les éléments de L suivants :

$$y = (\sqrt{221} - 2\sqrt{53}),$$

$$z = \varepsilon^3(\sqrt{221} - 2\sqrt{53}) = (182 + 25\sqrt{53})(\sqrt{221} - 2\sqrt{53})$$

$$\theta = (1 + \sqrt{221} + \sqrt{53} + \sqrt{221 \cdot 53}).$$

En utilisant les résultats de [17] donnant la forme des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{221}, \sqrt{53})$, on montre que $y, z \in U_L(1)$ et que θ est un entier de L . On vérifie facilement que y et z satisfont les conditions (2.1) du théorème 1.2. Comme la trace de θ sur k est égale à 1, on obtient par le (2.2) de ce même théorème que l'extension $N = L(\sqrt{x})/k$ où

$$x = \theta + y^2\sigma(\theta) + z^2\tau(\theta) + (y\sigma(z))^2\sigma\tau(\theta)$$

est une extension quaternionienne de degré 8 modérément ramifiée.

3.2 Le cas sauvage

On utilise la méthode de la démonstration du théorème 1.1 dans le cas sauvage. Le premier 2 est inerte dans k . Il est clair que $Cl(\mathcal{B}_5)^2 Cl(\mathcal{B}_2^{-1}) = Cl(\mathcal{B}_{13})$ dans $Cl(k)^\perp$. Prenons $\alpha = 130$; on a $\alpha O_k = \mathcal{B}_{5\mathcal{B}_{13}\mathcal{B}_2}^2$. Par suite $K_1 := k(\sqrt{\alpha})/k$ est quadratique, sauvagement ramifiée, plongeable dans une extension quaternionienne N_1/k de degré 8, et l'on a $Cl(O_{K_1}) = Cl(\mathcal{B}_5)$. De même, on vérifie facilement que l'extension $K_2 := k(\sqrt{26})/k$ est sauvage, plongeable dans une extension quaternionienne N_2/k de degré 8, et que $Cl(O_{K_2}) = 1$.

On peut construire explicitement N_1 de la manière suivante. On a $130 = 3^2 + 6^2 + (\sqrt{85})^2$. Comme 45 et 130.45 ne sont pas des carrés dans k , on obtient par [5] que l'extension $L = k(\sqrt{5}, \sqrt{130})$ est plongeable dans l'extension quaternionienne $N_1 = L(\sqrt{x})$ de degré 8 sur k , où

$$x = 5\sqrt{26}(3\sqrt{5} + \sqrt{130})(\sqrt{5} + 1).$$

Remarquons que la troisième sous-extension quadratique de L est $k(\sqrt{26})$. On peut donc prendre $N_2 = N_1$.

Remerciements

Les auteurs remercient Michel Kervaire pour son hospitalité à l'Université de Genève.

Références

- [1] Ph. CASSOU-NOGUÈS and M.J. TAYLOR, *Elliptic Functions and Rings of Integers*, Birkhäuser, Boston, (1987).
- [2] P. DAMEY et J. MARTINET, *Plongement d'une extension quadratique dans une extension quaternionienne*, J. reine angew. Math. **262-263**, pp. 323-338, (1973).
- [3] A. FRÖHLICH, *The discriminants of relative extensions and the existence of integral bases*, Mathematika **7**, pp. 15-22, (1960).
- [4] A. FRÖHLICH, *Artin-root numbers and normal integral bases for quaternion fields*, Invent. Math. **17**, pp. 143-166, (1972).
- [5] G. FUJISAKI, *An elementary construction of Galois quaternion extension*, Proc. Japan Acad. **66A**, pp. 80-83, (1990).
- [6] E. HECKE, *Lectures on the Theory of Algebraic Numbers*, Graduate Texts Math. 77, Springer-Verlag, New York, (1981).
- [7] S. LANG, *Algebraic Number Theory*, Graduate Texts Math. 110, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [8] R. LONG, *Steinitz classes of cyclic extensions of degree l^r* , Proc. Amer. Math. Soc. **49**, pp. 297-304, (1975).
- [9] J. MARTINET, *Les discriminants quadratiques et la congruence de Stickelberger*, Sémin. Théor. Nombres Bordeaux **1**, pp. 197-204, (1989).
- [10] R. MASSY, *Construction de p -extensions galoisiennes d'un corps de caractéristique différente de p* , J. Algebra **109**, pp. 508-535, (1987).
- [11] R. MASSY, *Bases normales d'entiers relatives quadratiques*, J. Number Theory **38**, pp. 216-239, (1991).
- [12] J. NEUKIRCH, *Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie*, Invent. Math. **21**, pp. 59-116, (1973).
- [13] E. ROSENBLÜTH, *Die arithmetische Theorie und Konstruktion der Quaternionenkörper auf Klassenkörpertheoretischer Grundlage*, Monatsh. Math. Phys. **41**, pp. 85-125, (1934).

- [14] J.-P. SERRE, *Corps Locaux*, 3è éd., Hermann, Paris, (1980).
- [15] B. SOGAÏGUI, *Structure galoisienne relative des anneaux d'entiers*, J. Number Theory **28**, pp. 189-204, (1988).
- [16] E. WITT, *Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f* , J. Crelle **174**, pp. 237-245, (1936).
- [17] K.S. WILLIAMS, *Integers of biquadratic fields*, Canad. Math. Bull. **13**(4), pp. 519-526, (1970).

Received : June 10, 1996.

Richard Massy
et
Bouchaïb Sodaïgui
Département de Mathématiques
Université de Valenciennes
Le Mont Houy, BP311, F-59304
Valenciennes
France