TRAIN POLINOMIOS *

Abdón Catalán y Cristián Mallol

Universidad de la Frontera, Temuco, Chile

Resumen

Los train polinomios son usados para estudiar la clase de los E -ideales de una álgebra bária (A, ω) [1], [2], [3]. En este trabajo hacemos una construcción de los train polinomios que justifica su tratamiento como estructuras ligadas a un cierto tipo de aritmética.

*Proyecto DIUFRO 9516, 9519 y 9520, Fondecyt 1950778.

1. Train álgebras

Sea F un cuerpo. Una álgebra bática es un par (A, ω) donde A es una F -álgebra y $\omega: A \rightarrow F$ un homomorfismo no nulo, (ver [5], [6]). Una de las clases de álgebras báticas conmutativas mas importantes son las train álgebras (ver [4]) que se caracterizan por ser anuladas por una función del tipo.

$$p = p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x.$$

La función p se llama *train polinomio* asociado al álgebra. Como ω es una forma lineal, $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$. Es inmediato además que $\ker \omega = \{x \in A : x^n = 0\}$.

A continuación vamos a buscar una contrucción formal de los train polinomios.

2. Train polinomios

Sean F un cuerpo y (A, ω) una álgebra bática sobre F . En el espacio vectorial A^A de las funciones de A en A , consideremos la familia $\{f_{ij} : i \geq 0, j \geq 1\}$ definida por $f_{ij}(x) = \omega(x)^i x^j$. El espacio generado por esta familia lo llamaremos espacio de las train funciones generalizadas, denotado por $TFG(A)$ y sus elementos son las funciones de la forma

$$(2.1) \quad f = \sum_{i \geq 0, j \geq 1} \gamma_{ij} f_{ij}$$

Como no hay a priori condiciones de independencia lineal, un elemento $f \in TFG(A)$ puede admitir varias escrituras. Es claro que las diferentes maneras de escribir f en la forma (1) es enumerable. Asi podemos introducir la noción de grado de f , como sigue: si $\varepsilon_k = \sum_{i \geq 0, j \geq 1} \gamma_{kij} f_{ij}$, con

$k \in \mathbb{N}$, son las diferentes maneras de escribir f , entonces a cada ε_k asociamos el entero $j_k = \max\{j : \gamma_{kij} \neq 0\}$. Asi $gr(f) = \min\{j_k : k \in \mathbb{N}\}$. Mas adelante veremos que f tiene una única escritura respecto de su grado.

Teorema 1. *La álgebra bática (A, ω) es train si y solo si la familia $\{f_{ij}\}$ es linealmente dependiente.*

Demostración: Es claro que si $\{f_{ij}\}$ es libre A no es train. Recíprocamente, si la familia $\{f_{ij}\}$ es linealmente dependiente, existe escalares γ_{ij} no todos ceros tal que $\sum_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \gamma_{ij} f_{ij} = 0$, es decir, $\sum_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \gamma_{ij} \omega(x)^i x^j = 0$ para todo $x \in A$. Así para todo $x \in A$ de peso 1 tenemos

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j x^j = 0$$

donde $\alpha_j = \sum_{i=1}^m \gamma_{ij}$. Si en (2) sustituimos x por $\frac{y}{\omega(y)}$ con $\omega(y) \neq 0$

tenemos $\sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\frac{y}{w(y)}\right)^j = \sum_{j=1}^n w(y)^{-n} \alpha_j w(y)^{n-j} y^j = 0$, es decir,

$w(y)^{-n} \sum_{j=1}^n \alpha_j w(y)^{n-j} y^j = 0$ y como $w(y)^{-n} \neq 0$ para todo $y \in A$ de

peso $\neq 0$ resulta que $\sum_{j=1}^n \alpha_j w(y)^{n-j} y^j = 0$ para todo $y \in A$ con $\omega(y) \neq 0$.

Como $\{y \in A : \omega(y) \neq 0\}$ es un conjunto denso en A y $\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega(y)^{n-j} y^j$ es

una función continua según la topología de Zariski, resulta finalmente que $\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega(y)^{n-j} y^j = 0$ para todo $y \in A$, o sea, que A es una train álgebra. ■

Teorema 2. (A, ω) es una train álgebra de rango n si y solo si el conjunto $\mathcal{X} = \{f_{ij} : i \geq 0, 1 \leq j \leq n-1\}$ es linealmente independiente con n máximo.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{X}$ es linealmente dependiente, luego existen escalares γ_{ij} con $0 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n-1$, no todos nulos, tales que:

$$\sum_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1} \gamma_{ij} f_{ij} = 0$$

Usando el mismo argumento de la demostración del teorema 1 concluimos que (A, ω) es una train álgebra de rango $\leq n-1 < n$, en contradicción con la hipótesis. Por otro lado, sea $p(x)$ un train polinomio de grado mínimo asociado al álgebra; se tiene, por tanto

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x) x^{n-1} = 0$$

o equivalentemente:

$$x^n = -\gamma_1 \omega(x) x^{n-1} - \dots - \gamma_{n-1} \omega(x) x^{n-1}$$

luego,

$$f_{0n} \in \langle f_{j(n-j)} : 1 \leq j \leq n-1 \rangle$$

de donde $\mathcal{X} \cup f_{0n}$ es un conjunto dependiente.

La recíproca es clara, usando o teorema 1, pues $\mathcal{X} \cup \{f_{0n}\}$ es linealmente dependiente. ■

Proposición 1. Sea (A, ω) una train álgebra de rango n . Entonces

- i) Existe un único train polinomio f de grado n que se anula en A .
- ii) Toda train función generalizada se puede escribir como una train función de grado $\leq n-1$.

Demostración: Supongamos que (A, ω) satisface

$$p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x) x^{n-1} = 0.$$

i) Si (A, ω) también satisface $q(x) = x^n + \delta_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \delta_{n-1} \omega(x) x^{n-1} = 0$ entonces para todo $x \in A$ tenemos $(\gamma_1 - \delta_1) \omega(x) x^{n-1} + \dots + (\gamma_{n-1} - \delta_{n-1}) \omega(x) x^{n-1} = 0$ y como $\{f_{i(n-i)} : 1 \leq i \leq n-1\} \subseteq \{f_{ij} : i \geq 0, j \geq 1\}$ es un subconjunto linealmente independiente, resulta que $\gamma_i = \delta_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$ y así $p(x) = q(x)$.

ii) Como (A, ω) satisface $p(x) = 0$ tenemos $x^n = -(\gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x) x^{n-1})$, es decir, $f_{0n} = -\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i f_{i(n-i)}$ y recursivamente tendremos

$f_{0(n+k)} = -\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i f_{i(n+k-i)}$. Así, $f_{0(n+k)} \in \langle f_{i(n-i)} : 1 \leq i \leq n-1 \rangle$ para todo $k \geq 0$. ■

Corolario 1. Dada una álgebra b́arica (A, ω) , toda train funci3n generalizada f admite una ́unica escritura que da el grado de f .

Demostraci3n: Si (A, ω) no es train ́algebra, la familia $\{f_{ij}\}$ es libre y toda f se escribe de manera ́unica como combinaci3n lineal de esta familia. Si (A, ω) es train ́algebra de rango n , la familia $\{f_{i(n-i)}\}$ con $i = 0, \dots, n$ es libre y generadora (Teorema 1 y Proposici3n 1 ii)), consecuentemente toda f admite una ́unica escritura. ■

En $TFG(A)$ consideremos los siguientes conjuntos

$$TF(A) = \{f = \sum \gamma_{ij} f_{ij} : i + j = n\} \text{ y } TP(A) = \{f \in TF(A) : \sum \gamma_{ij} = 0\}$$

que llamaremos conjunto de las *train funciones* y conjunto de los *train polinomios* respectivamente. Es claro que estos subconjuntos no son subespacios vectoriales de $TFG(A)$.

Sea $\langle X \rangle$ el ideal de $F[X]$ generado por X y consideremos la funci3n sobreyectiva $T: \langle X \rangle \rightarrow TF(A)$ definida de la manera siguiente:

$$T\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i X^{n-i}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i f_i \text{ donde } f_i \text{ denota simplemente a } f_{i(n-i)}.$$

Sin dificultad se ve que la imagen por T del ideal $\langle X(X-1) \rangle$ es $TP(A)$.

Denotemos, en general, la imagen de todo polinomio $p(X) \in \langle X \rangle$ bajo T por p_T . Si $f \in TF(A)$ y $f = \sum \gamma_i f_i$ es su escritura ḿinima,

entonces llamaremos al polinomio $p(X) = \sum \gamma_i X^{n-i}$ *antecedente can3nico*

de f . Asi, de aqui en adelante, trabajaremos siempre con los antecedentes can3nicos. Por ser T sobreyectiva, $TF(A)$ hereda cierta riqueza estructural polinomial:

Definici3n 1. Sean p_T y q_T en $TF(A)$ con $p(X)$ y $q(X)$ sus respectivos antecedentes can3nicos. Entonces la suma, el producto y la multiplicaci3n por escalar estan dadas por

$$p_T \oplus q_T = (p + q)_T$$

$$p_T \cdot q_T = (pq)_T$$

$$\lambda p_T = (\lambda p)_T$$

Nota: Estas operaciones, producto del traslado de estructura, tienen la expresión concreta siguiente:

Sean $p(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i X^{n-i}$ y $q(X) = \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j X^{m-j}$ polinomios en $F[X]$ con $gr(p(X)) = m$ y $gr(q(X)) = n$, $m \geq n$. Entonces:

i) $p_T \oplus q_T = p_T + q_T$ sobre $\{x \in A : \omega(x) = 1\}$. Más precisamente, $(p+q)_T = p_T + f_{(m-n)0} q_T$ sobre A ,

ii) $(pq)_T = \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j \omega^j R_x^{m-j} p_T$ donde R_x es la multiplicación por el elemento genérico x .

Con las operaciones así definidas, $TF(A)$ es una álgebra, $TP(A)$ un ideal de $TF(A)$ y T es un epimorfismo de álgebras. Se tiene

Proposición 2. Sea (A, ω) una álgebra bática. Tenemos los siguientes isomorfismos

i) Si (A, ω) no es train álgebra:

$$\langle X \rangle \cong (TF(A), \oplus, \cdot) \quad y \quad \langle X(X-1) \rangle \cong (TP(A), \oplus, \cdot)$$

ii) Si (A, ω) es una train álgebra determinada por el train polinomio p_T :

$$\langle X \rangle / p \cong (TF(A), \oplus, \cdot) \quad y \quad \langle X(X-1) \rangle / p \cong (TP(A), \oplus, \cdot)$$

Demostración: Sale del isomorfismo canónico $D/\ker T \cong Im(T)$ donde D es $\langle X \rangle$ o $\langle X(X-1) \rangle$ y del hecho que $F[X]$ es un anillo principal.

■

Corolario 2. Sea (A, ω) una álgebra bática.

i) Si (A, ω) no es train álgebra, entonces $\{f_{01}, \dots, f_{0n}, \dots\}$ es una base de $(TF(A), \oplus, \cdot)$ y $\{f_{0i} - f_{(i-1)1} : i \geq 2\}$ es una base de $(TP(A), \oplus, \cdot)$

ii) Si (A, ω) es una train álgebra determinada por el train polinomio p_T de grado n entonces $\{f_{01}, \dots, f_{0(n-1)}\}$ es una base de $(TF(A), \oplus, \cdot)$ y $\{f_{0i} - f_{(i-1)1} : 2 \leq i \leq n-1\}$ es una base de $(TP(A), \oplus, \cdot)$.

La divisibilidad, algoritmo de la división, mínimo común múltiplo (m.c.m.), máximo común divisor (m.c.d.) de dos train polinomios y la propiedad de la descomposición única de un train polinomio pueden ser obtenidos por medio del epimorfismo $\mathcal{T}$ de $\langle X(X-1) \rangle$ en $TP(A)$.

References

- [1] Catalán A.; Costa R., *Acerca de álgebras báficas satisfaciendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$* , Cubo 8 pp. 25 – 29, (1992).
- [2] Catalán A., *E-ideals in baric algebras*, Mat. Contemporanea, Soc. Bras. Mat. 6, pp. 7 – 12, (1994).
- [3] Catalán A.; Costa R.; Mallol C., *E-ideals in baric algebras: Basic Properties*. To appear in Proc. Edinburgh Math. Soc.
- [4] Etherington I. M. H., *Genetic algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinb. 59, pp. 242 – 258,. (1939).
- [5] Mallol C., *A propos des algèbres pondérables*, Cubo 11, pp. 1 – 6, (1995).
- [6] Worz A., *Algebras in genetics*, Lecture. Notes in Biomath. 36, Springer-Verlag, Berlin. (1980).

Recibido : Agosto 30, 1996.

Abdón Catalán

y

Cristián Mallol

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de la Frontera

Casilla 54-D

Temuco-Chile