Proyecciones

Vol. 15, N° 2, pp. 169-177, December 1996

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

DOI: 10.22199/S07160917.1996.0002.00005

SUR L'HOMOLOGIE ELLIPTIQUE DU SPECTRE DE MILNOR

Abdelaziz Kheldouni and Fayçal Lamrini

Université Sidi Mohammed Benabdallah, Marruecos

Abstract

The main purpose of this paper is to give a splitting result of the Hopf algebra $Ell^(Ell)$ for the elliptic spectrum $Ell : Ell^*(Ell) = Hom_{\Omega_U}^*(MU_*(Ell), A) \oplus Ext_{\Omega_U}^{1,*}(MU_*(Ell), A)$, where $A = Ell_*(pt)$.*

1. Introduction

Dans ([4], 9) P. E. Conner et L. Smith ont étudié, en se basant sur les résolutions de U-bordisme d'un CW-complexe fini X , l'existence d'une suite spectrale $(E_r[X], d_r[X])$ qui converge vers $K^*(X)$ et de deuxième terme $E_2^{p,q}[X] = Ext_{\Omega_*^U}^{p,q}(MU_*(X), \mathbf{Z})$. $\mathbf{Z}$ étant muni de sa structure de Ω_*^U -module donnée par le genre de Todd. De plus en remarquant que $Ext_{\Omega_*^U}^{p,q}(MU_*(X), \mathbf{Z}) = 0$ pour $p > 1$, ils ont déduit une suite exacte scindée (cf. [4], Proposition 9.8):

$$0 \rightarrow Ext_{\Omega_*^U}^{1,n-1}(MU_*(X), \mathbf{Z}) \rightarrow K^n(X) \rightarrow Hom_{\Omega_*^U}^{-n}(MU_*(X), \mathbf{Z}) \rightarrow 0(1)$$

qui permet d'identifier le sous-groupe de torsion de $K^*(X)$ à $Ext_{\Omega_*^U}^{1,*}(MU_*(X), \mathbf{Z})$. D'autre part, pour une théorie cohomologique représentée par un MU -spectre module E , un théorème d'Adams ([1], Theorem 13.6), donne une suite spectrale qui converge vers $E^*(X)$ et de deuxième terme $Ext_{\Omega_*^U}^{p,q}(MU_*(X), \pi_*(E))$. La proposition 9.8 de [4] devient une conséquence immédiate du théorème d'Adams. Ceci suggère une généralisation des résultats de ([4], 9) à une théorie cohomologique définie par un groupe formel; travail qui fait l'objet de ce papier. Nous montrons les résultats suivants:

Proposition 3.2.

$Ell_*(MU)$ est un Ω_*^U -module plat

Théorème 3.3.

$$Dimhom_{\Omega_*^U}(-Ell^*(MU)) \leq 1.$$

2. Préliminaires

La théorie cohomologique $MU^*(-)$ associée au spectre de Milnor MU est une théorie multiplicative $\mathbf{C}$ -orientée, universelle pour les cohomologies multiplicatives $\mathbf{C}$ -orientées définies sur la catégorie stable de Boardman. Son groupe formel $F^U(X, Y)$ induit par la $\mathbf{C}$ -orientation est le groupe

formel universel dont le logarithme est donné par la formule de Miscenko [1] :

$$g_U(X) = X + \sum_{n \geq 1} \frac{[CP^n]}{n+1} X^{n+1} \in \Omega_*^U \otimes \mathbf{Q}[[X]].$$

Soit R un anneau gradué muni d'un groupe formel $F(X, Y)$. F est classifié par un genre $\varphi : \Omega_*^U \rightarrow R$ (i.e. φ est un homomorphisme d'anneaux tel que $\varphi_* F^U = F$). On munit alors R d'une structure de Ω_*^U -module via φ , et on considère le foncteur défini sur la catégorie stable de Boardman

$$\mathcal{E}^* : X \rightarrow MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R = \mathcal{E}^*(X). \quad (2)$$

Pour tout entier naturel n , la n -série associée au groupe formel $F(X, Y)$ est définie par récurrence par

$$[1]_F(X) = X,$$

$$[n]_F(X) = F(X, [n-1]_F(X)), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Si p est un nombre premier, on écrit

$$[p]_F(X) = pX + \dots + a_{p,1}X^p + \dots + a_{p,k}X^{p^k} + \dots$$

Théorème 1.1 ([5]): Le foncteur $\mathcal{E}^*(X) = MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R$ définit une théorie cohomologique, si pour tout nombre premier p , la suite $(p, a_{p,i})_{i \geq 1}$ est régulière dans R .

En fait, $\mathcal{E}^*(X)$ est une théorie cohomologique multiplicative $\mathbf{C}$ -orientée (voir [6]). Elle est donc représentée par un spectre-anneau $\mathbf{E}$ dont les applications de structure seront notées $\mu_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ et $\iota_{\mathbf{E}} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{E}$. Notons que la structure de spectre anneau sur $\mathbf{E}$, est celle qui induit la transformation naturelle $\mathcal{E}^*(X) \otimes \mathcal{E}^*(X) \rightarrow \mathcal{E}^*(X)$ obtenue grâce à la structure multiplicative de $MU^*(-)$. De plus, en vertu de l'universalité du cobordisme complexe, il existe une application de spectres $\tilde{\phi} : MU \rightarrow \mathbf{E}$, définissant la transformation naturelle $\phi : MU^*(-) \rightarrow \mathcal{E}^*(-)$ qui classifie $\mathcal{E}^*(X) = MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R$, et telle que $\tilde{\phi}_*(pt) = \varphi$.

La composition $\nu : MU \wedge E \xrightarrow{\tilde{\phi} \wedge 1_E} E \wedge E \xrightarrow{\mu_E} E$, confère à $\mathbf{E}$ une structure de MU -spectre module. Là aussi, on remarque que la transformation $\nu_* : (MU \wedge E)_*(X) \rightarrow E_*(X)$ induite par ν peut être obtenue par la composition suivante

$$\begin{aligned} (MU \wedge \mathbf{E})_*(X) &\simeq (\mathbf{E} \wedge MU)_*(X) \simeq \mathbf{E}_*(MU \wedge X) = \\ &= MU_*(MU \wedge X) \otimes_{\Omega_*^U} R \simeq MU_*(MU) \otimes_{\Omega_*^U} MU_*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R \xrightarrow{\mathcal{M}U \wedge 1 \wedge 1} \Omega_*^U \otimes_{\Omega_*^U} \\ &MU_*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R \simeq MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R = \mathbf{E}_*(X) \cdot \varepsilon_{MU} : MU_*(MU) \rightarrow \Omega_*^U \end{aligned}$$

est l'augmentation de l'algèbre de Hopf $MU_*(MU)$.

3. Sur le théorème du coefficient universel

Soit E un spectre-anneau et F un spectre-module sur E , avec comme applications structurales $\iota : \mathbf{S} \longrightarrow E, \mu : \mathbf{E} \wedge \longrightarrow E$. Pour tout spectre X et tout $\alpha \in F^n(X)$ nous avons un homomorphisme de $\pi_*(E)$ -modules $\zeta_X(\alpha) : E(X) \rightarrow \pi_*(F)$ défini de la manière suivante: étant donnée une application $f : X \rightarrow \Sigma^n F$ représentant α , alors pour tout $u \in E_k(X)$, on pose $\zeta_X(\alpha)(u) = \nu_* \circ f_*(u) \in \pi_{k-n}(F)$. Nous avons ainsi une transformation naturelle :

$$\zeta_X : F^n(X) \rightarrow \text{Hom}_{\pi_*(E)}^{-n}(E_*(X); \pi_*(F)) \quad (2)$$

Les spectres E qui seront utilisés dans ce paragraphe vrifient la condition (C) suivante (voir [1], 13.6) :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} E \text{ est limite inductive d'une famille } \{E_\alpha\} \text{ de sous-spectres finis} \\ E_\alpha \text{ tels que :} \\ \text{i) } E_*(DE_\alpha) \text{ est un } \pi_*(E_\alpha)\text{-module projectif.} \\ \text{ii) } DE_\alpha \text{ est un spectre pour lequel } \zeta_{DE_\alpha} \text{ est un isomorphisme,} \\ \text{où } DE_\alpha \text{ désigne le } S\text{-dual de } E_\alpha. \end{array} \right.$$

L'intérêt de cette condition réside dans le fait qu'elle permet de fabriquer des résolutions du spectre X qui donnent la suite spectrale d'Adams-Novikov. Par exemple les spectres $S, HZ_p, MU, MO, MSp, K, KO$ vérifient la condition (C). Il est bien connu (cf. [1], Theorem 13.6) que si E est un spectre anneau vérifiant (C), et F un spectre module sur E , alors pour tout spectre X , il xiste une suite spectrale qui converge vers $F^*(X)$, de deuxième terme $E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\pi_*(E)}^{p,q}(E_*(X), \pi_*(F))$ et dont le "edge-homomorphisme" coïncide avec la transformation (2). En particulier, en prenant pour E le spectre MU , et pour F le spectre $\mathbf{E}$ représentant la théorie cohomologique $\mathcal{E}^*(X) = MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R$ définie dans 1, nous avons une suite spectrale $\tilde{E}_r^{p,q}$ qui converge vers $\mathcal{E}^*(X)$ de deuxième terme $\tilde{E}_2^{p,q} = \text{Ext}_{\Omega_*^U}^{p,q}(E_*(X), R)$ et dont le "edge-homomorphisme" est la transformation

$$\zeta_X : \mathcal{E}^*(X) \longrightarrow \text{Hom}_{\Omega_*^U}(MU_*(X), R).$$

Comme conséquence immédiate on a :

Corollaire 2.1: Si X est un spectre tel que $MU_*(X)$ est un Ω_*^U -module projectif, alors

$$\zeta_X : \mathcal{E}^*(X) \longrightarrow \text{Hom}_{\Omega_*^U}(MU_*(X), R)$$

est un isomorphisme.

Dans le cas où X est un CW-complexe fini, on peut étendre la proposition 9.5 de [4] à la théorie cohomologique $\mathcal{E}^*(X) = MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} R$. Nous avons alors.

Lemme 2.2: Pour tout $p > 0$ et tout CW-complexe fini X , on a

$$Tor_{p,*}^{\Omega_*^U}(MU_*(X), R) = 0.$$

Démonstration: Il suffit de reprendre la démonstration de ([4], Proposition 9.5) qui s'adapte bien à notre situation.

Nous dduisons de ([2], chap. VI, 4.1.3) et du lemme 2.2.

Proposition 2.3: Pour tout CW-complexe fini X , nous avons un isomorphisme :

$$Ext_R^{n,*}(E_*(X), R) \rightarrow Ext_{\Omega_*^U}^{n,*}(MU_*(X), R).$$

En appliquant ces résultats à la K-théorie, nous retrouvons les conclusions de ([4], 9). En effet, $K^*(X)$ est une théorie cohomologique $\mathbf{C}$ -orientée dont l'anneau de base $K^*(pt)$ est $\mathbf{Z}[u, u^{-1}]$ avec u le générateur de $K^{-2}(pt)$ (voir [1]). Son spectre BU est classifié par une application $\theta : MU \rightarrow K$ qui induit le genre de Todd, $Td : \Omega_*^U \rightarrow \mathbf{Z}[u, u^{-1}]$. De plus nous avons $K^*(X) = MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} \mathbf{Z}[u, u^{-1}]$ (voir [3]), où $\mathbf{Z}[u, u^{-1}]$ est un Ω_*^U -module grâce à Td . En vertu de la proposition 2.3 on obtient l'isomorphisme $Ext_{\mathbf{Z}[u, u^{-1}]}^{n,*}(K_*(X), \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) \simeq Ext_{\Omega_*^U}^{n,*}(MU_*(X), \mathbf{Z}[u, u^{-1}])$. De plus puisque $\mathbf{Z}[u, u^{-1}]$ est un $\mathbf{Z}$ -module libre, $Tor_{\mathbf{Z}}^{n,*}(-, \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) = 0$, donc d'après ([2], chap. VI, 4.1.3), $Ext_{\mathbf{Z}[u, u^{-1}]}^{n,*}(-, \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) = Ext_{\mathbf{Z}}^{n,*}(-, \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) = 0, \forall n > 1$ car $\mathbf{Z}$ est un anneau principal. Donc pour tout CW-complexe fini X et tout $n > 1$, $Ext_{\mathbf{Z}[u, u^{-1}]}^{n,*}(K_*(X), \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) = 0$, d'où $Ext_{\Omega_*^U}^{n,*}(MU_*(X), \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) = 0$. La suite spectrale d'Adams-Novikov est donc triviale pour p différent de 0 et de 1; et d'après ([2], chap. XV 5) nous avons une suite exacte scindée:

$$0 \rightarrow E_2^{1, n-1} \rightarrow K^n(X) \rightarrow E_2^{0, n} \rightarrow 0 \quad (4)$$

ou encore

$$0 \rightarrow Ext_{\Omega_*^U}^{1, n-1}(MU_*(X), \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) \rightarrow K^n(X) \rightarrow H_{\Omega_*^U}^{-n}(MU_*(X), \mathbf{Z}[u, u^{-1}]) \rightarrow 0$$

on retrouve alors le théorème 9.8 de [4].

4. Cas de la cohomologie elliptique

Le genre elliptique est un homomorphisme d'anneaux $f : MU_* \rightarrow A$ où A est une $\mathbf{Q}$ -algèbre, défini par son logarithme g qui est une série formelle donnée par l'intégrale elliptique de première espèce,

$$g(X) = \int_0^X \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}} \quad (5)$$

où $\delta, \varepsilon \in A$. On constate facilement que $g(X)$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$. Si δ et ε sont $\mathbf{Q}$ -algèbriquement indépendants, le théorème du foncteur exact de Landweber est vérifié (cf. [6]). En localisant l'anneau $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$ en $\gamma = \varepsilon, \delta^2 - \varepsilon$ ou $\Delta = \varepsilon(\delta^2 - \varepsilon)^2$, nous obtenons une théorie cohomologique $\mathbf{C}$ -orientée $\mathcal{E}^*(X) = MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} \mathbf{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon, \gamma^{-1}]$, appelée cohomologie elliptique (cf. [6], [7]). L'anneau de base $\mathcal{A}_* = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon, \gamma^{-1}]$ s'identifie à l'anneau de formes modulaires pour le groupe $\Gamma_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \right\}$ dont les coefficients de la q -série appartiennent $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ ayant des pôles à l'infini, en 0 ou aux deux cusp (respectivement). D'après §.1, la cohomologie $\mathcal{E}^*(X) = MU^*(X) \otimes_{\Omega_*^U} \mathcal{A}_*$ est représentée par un spectre-anneau Ell qui est un spectre-module sur MU , et sera noté $Ell^*(X)$. L aussi nous avons une suite spectrale d'Adams-Novikov pour tout spectre X :

$$E_2^{p,*} = Ext_{\Omega_*^U}^{p,*}(MU_*(X), \mathcal{A}_*) \Rightarrow Ell^*(X)$$

Le "edge-homomorphisme" coïncide avec la transformation (2) du §.2 :

$$\zeta_X : Ell^*(X) \rightarrow Hom_{\Omega_*^U}^*(MU_*(X), \mathcal{A}_*)$$

Nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle donnée dans [9], où l'on remplace BP par MU :

Lemme 3.1. Tout $MU_*(MU)$ -comodule est limite inductive filtrée d'une famille de $MU_*(MU)$ -comodules de présentation finie en tant que Ω_*^U -modules.

Proposition 3.2. $Ell^*(MU)$ est un Ω_*^U -module plat.

Démonstration: En utilisant l'unité gauche $\eta_L : \Omega_*^U \rightarrow MU_*(MU)$ et la structure produit de l'algèbroïde de Hopf $MU_*(MU)$, on obtient une action de Ω_*^U sur $\mathcal{E}ll^*(MU) = MU_*(MU) \otimes_{\Omega_*^U} \mathcal{A}_*$ qui lui confère une structure de Ω_*^U -module. Maintenant, pour tout Ω_*^U -module M nous avons :

$$\begin{aligned} Tor_{1,*}^{\Omega_*^U}(M, \mathcal{E}ll^*(MU)) &= Tor_{1,*}^{\Omega_*^U}(M, MU_*(MU) \otimes_{\Omega_*^U} \mathcal{A}_*) \\ &\simeq Tor_{1,*}^{\Omega_*^U}(M \otimes_{\Omega_*^U} MU_*(MU), \mathcal{A}_*) \end{aligned}$$

car $MU_*(MU)$ est libre (cf. Bourbaki chapitre X, §6.6 proposition 8). Par ailleurs, $M \otimes_{\Omega_*^U} MU_*(MU)$ est un $MU_*(MU)$ -comodule, et d'après le lemme 3.1, $M \otimes_{\Omega_*^U} MU_*(MU) = \varinjlim_{\alpha} C_{\alpha}$ où $\{C_{\alpha}\}$ est une famille de $MU_*(MU)$ -comodules de présentation finie en tant que Ω_*^U -modules; ceci donne

$$\begin{aligned} Tor_{1,*}^{\Omega_*^U}(M \otimes_{\Omega_*^U} MU_*(MU), \mathcal{A}_*) &= Tor_{1,*}^{\Omega_*^U}(\varinjlim_{\alpha} C_{\alpha}, \mathcal{A}_*) \approx \\ &\varinjlim_{\alpha} Tor_{1,*}^{\Omega_*^U}(C_{\alpha}, \mathcal{A}_*). \end{aligned}$$

Mais grâce à ([5], Theorem 3.2) on a $Tor_{1,*}^{\Omega_*^U}(C_{\alpha}, \mathcal{A}_*) = 0$ pour tout α ; d'où le résultat.

Théorème 3.3.

$$\dim_{\text{hom}_{\Omega_*^U}}(\mathcal{E}ll_*(MU)) \leq 1.$$

Démonstration: $\mathcal{E}ll_*(MU)$ est un Ω_*^U -module plat (proposition 3.2). De plus, il est dénombrable en tant que module sur Ω_*^U qui est lui même dénombrable donc possède une présentation dénombrable. Le théorème 3.3 découle alors de ([8], Théorème 3.2). ■

Remarque: $E_2^{p,q} = Ext_{\Omega_*^U}^{p,q}(MU_*(\mathcal{E}ll), \mathcal{A}_*) = Ext_{\Omega_*^U}^{p,q}(\mathcal{E}ll_*(MU), \mathcal{A}_*) = 0$ pour p différent de 0 et de 1, grâce au Théorème 3.3. On retrouve alors la suite exacte scindée (4), c'est à dire :

$$0 \rightarrow Ext_{\Omega_*^U}^{1,n-1}(MU_*(\mathcal{E}ll), \mathcal{A}_*) \rightarrow \mathcal{E}ll^n(\mathcal{E}ll) \rightarrow Hom_{\Omega_*^U}^{-n}(MU_*(\mathcal{E}ll), \mathcal{A}_*) \rightarrow 0$$

Et du fait que γ et ε sont de degré 4 et 8 respectivement (c.f [6]), $\mathcal{A}_*$ est alors $4\mathbb{Z}$ -gradué ; et puisque Ω_*^U et $MU_*(Ell)$ tant $2\mathbb{Z}$ -gradués on a le

Corollaire 3.4:

$$Ell^n(Ell) = \begin{cases} Ext_{\Omega_*^U}^{1,n-1}(MU_*(Ell), \mathcal{A}_*) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ Hom_{\Omega_*^U}^{-n}(MU_*(Ell), \mathcal{A}_*) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Références

- [1] J. F. Adams : Stable homotopy and generalised homology. University of Chicago Mathematics Lectures Notes, (1971).
- [2] H. Cartan and S. Eilenberg : Homological Algebra. Princeton University Press (sevent printing 1973).
- [3] P. E. Conner and E. E. Floyd : The relation of Cobordism to K-Theory. Lecture Notes in Math., No 28 Springer Verlag (1966).
- [4] P. E. Conner and L. Smith : On the Complex Bordism of finite Complexes I. I. H. E. S. Pub. Math., No 37 (1969).
- [5] P. S. Landweber : Homological Properties of Comodules over MU (MU) and BP (BP). American Journal of Mathematics 98, pp. 591 – 617 (1976).
- [6] P. S. Landweber : Elliptic Cohomology and Modular Forms. Lecture Notes in Math., No 1326 Springer Verlag (1988).
- [7] P. S. Landweber, D. C. Ravenel, R. E. Stong : Periodic Cohomology Theories defined by Elliptic Curves. Čechcentennial conference proceedings, AMS Contempora y Mathematics 181, pp. 317 – 337 (1995).
- [8] D. Lazar : Autour de la platitude. Bull. Soc. Math. France, No 97, pp. 81 – 128 (1969).
- [9] H. R. Miller and D. C. Ravenel : Morava Stabilizer Algebra and The Localization of Novikov's E_2 -term. Duce Méathematical Journal, 44 (2), pp. 433 – 447 (1977).

Received : October 15, 1995

Abdelaziz Keldouni

^y

Fayçal Lamrini

Département de Mathématique et Informatique

Faculté des Sciences Dhar-Mehraz

Université Sidi Mohammed Benabdallah

B. P. 1796, FES (MAROC)

Marruecos