ALGUNAS CLASES DE ÁLGEBRAS BÁRICAS SOBRE UN CUERPO DE CARACTERÍSTICA 2 *

*Raúl Benavides G. y Cristián Mallol C.
Universidad de la Frontera, Temuco - Chile*

Resumen

En este artículo estudiamos algunas clases de álgebras báricas como, álgebras de Bernstein, Train álgebras y álgebras de Jordan, en cuerpos infinitos de característica 2 y sus relaciones con las álgebras constantes de orden 1.

1. Álgebras Constantes

Sea la terna (A, ω, e) , donde A es una K -álgebra, K cuerpo de característica 2, $\omega : A \rightarrow K$ una forma lineal no nula, $e \in A$ con $\omega(e) \neq 0$ y tal que $x^2 = \omega(x)^2 e$ para todo $x \in A$.

Proposición 1.1. : Son equivalentes las relaciones siguientes:

- (a) $\omega(x)^2 = \omega(x^2)$
- (b) $\omega(e) = 1$
- (c) $I_p(A) = \{e\}$

Demostración : Mostraremos que $(a) \Leftrightarrow (b)$ y $(b) \Leftrightarrow (c)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Tenemos que $e^2 = \omega(e)^2 e$ y así $\omega(e)^2 = \omega(e^2) = \omega(e)^3$, de donde obtenemos $\omega(e)^2[\omega(e) - 1] = 0$, pero como $\omega(e) \neq 0$, entonces $\omega(e) = 1$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Por otro lado, supongamos $\omega(e) = 1$, y como $x^2 = \omega(x)^2 e$, tenemos entonces $\omega(x^2) = \omega(x)^2$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Supongamos $e' \in A$ tal que $e'^2 = e'$, entonces $\omega(e'^2) = \omega(e')$ y así $\omega(e') = \omega(e'^2) = \omega(e')^2 \omega(e)$, de donde $\omega(e')[\omega(e') - 1] = 0$, luego $\omega(e') = 1$. De esta forma $e' = e'^2 = \omega(e')^2 e = e$, es decir, $I_p(A) = \{e\}$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Ahora si $x \in I_p(A)$ entonces $x^2 = x$, luego $e^2 = e$. Además $e^2 = \omega(e)^2 e$ de donde $\omega(e) = \omega(e^2) = \omega(e)^3$ y así $\omega(e)^2[\omega(e) - 1] = 0$, por lo tanto $\omega(e) = 1$.

Proposición 1.2. : Sea (A, ω, e) , entonces existen $e' \in I_p(A)$ y ω' una forma lineal no nula tal que $x^2 = \omega'(x)^2 e'$ para todo $x \in A$.

Demostración: Sea $\lambda = \omega(e) \neq 0$, así $e^2 = \lambda^2 e$ de donde $e' = \frac{e}{\lambda^2}$ es el elemento idempotente, pues $e'^2 = (\frac{e}{\lambda^2})^2 = \frac{e^2}{\lambda^4} = \frac{e}{\lambda^2} = e'$.

Sea $\omega' = \lambda\omega$, entonces $x^2 = \omega(x)^2 e = \frac{\omega'(x)^2}{\lambda^2} \lambda^2 e' = \omega'(x)^2 e'$.

Notamos que las proposiciones 1.1 y 1.2, señalan que ω es quasi multiplicativa y que la existencia de los elementos idempotentes es única. Esto nos hace notar de manera natural (A, ω, e) simplemente como (A, ω) . Más aún, en lo que sigue consideraremos ω multiplicativa. En estas condiciones el k sta

Proposición 1.3. : Hay equivalencia de categorías entre las álgebras constantes $(\mathbf{A}, \omega)$ y los pares $(\mathbf{N}, g)$, donde $\mathbf{N}$ es una nilálgebra de índice 2 y $g \in \text{End}_{\mathbf{K}} \mathbf{N}$.

Demostración: A la álgebra constante $(\mathbf{A}, \omega)$ le asociamos $(\ker \omega, L_e)$ y recíprocamente a $(\mathbf{N}, g)$ se le asocia $(\mathbf{A}, \omega)$ donde $\mathbf{A} = \mathbf{K} \times \mathbf{N}$ con multiplicación dada de la siguiente forma :

$$(\alpha, v)(\alpha', v') = (\alpha\alpha', \alpha g(v') + \alpha' g(v) + vv')$$

y ω definido por $\omega(\alpha, x) = \alpha$. Si ponemos $e = (1, 0)$ e identificamos $(0, v)$ con v , entonces $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}$ y además obtenemos $ev = g(v)$, $v^2 = 0$. Ahora si $x = \alpha e + v$ entonces $x^2 = \omega(x)^2 e$ y así $(\mathbf{A}, \omega)$ es constante.

En lo que sigue, sean $\mathbf{N} = \ker \omega$, $\text{Aut}_e(\mathbf{N}) = \{\phi \in \text{Aut}(\mathbf{N}) / \phi \circ L_e = L_e \circ \phi\}$ y $\text{Der}_e(\mathbf{N}) = \{d \in \text{Der}(\mathbf{N}) / d \circ L_e = L_e \circ d\}$.

Proposición 1.4. : $\text{Aut}(\mathbf{A}) \simeq \text{Aut}_e(\mathbf{N})$ e $\text{Der}(\mathbf{A}) \simeq \text{Der}_e(\mathbf{N})$.

Demostración : A $\phi \in \text{Aut}(\mathbf{A})$ le asociamos su restricción $\phi|_{\mathbf{N}}$. En efecto, si $x \in \mathbf{N}$ y $\phi(x) = \lambda e + y$, $y \in \mathbf{N}$, entonces se tiene $0 = \phi(x^2) = \phi(x)^2 = \lambda^2 e$ de donde $\lambda = 0$ y por lo tanto $\phi(x) \in \mathbf{N}$. Por otro lado $\phi(I_p(\mathbf{A})) \subset I_p(\mathbf{A})$, entonces $\phi(e) = e$, de donde $(\phi \circ L_e)(x) = \phi(ex) = \phi(e)\phi(x) = e\phi(x) = (L_e \circ \phi)(x)$. Recíprocamente, si $\psi \in \text{Aut}_e(\mathbf{N})$, la prolongamos a $\mathbf{A}$ por $\bar{\psi}$ como $\bar{\psi}(e) = e$ y $\bar{\psi}|_{\mathbf{N}} = \psi$. Es claro que $\bar{\psi} \in \text{Aut}(\mathbf{A})$. En forma análoga se prueba la otra afirmación.

Observación 1.5. : Es conocida la afirmación siguiente (ver [2]) :

Si $(\mathbf{A}, \omega)$ es una álgebra constante, son equivalentes:

- a) $\mathbf{A}$ es una álgebra de Jordan.
- b) $(ex)y = e(xy)$ para todo $x, y \in \mathbf{A}$.

Proposición 1.6. : Son equivalentes:

- (a) La categoría de las álgebras constantes de Jordan.
- (b) La categoría de las nilálgebras $\mathbf{N}$, de índice 2, tales que $\mathbf{N} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{Z}$; $\mathbf{F}$ y $\mathbf{Z}$ ideales de $\mathbf{N}$.

Demostración :

(a) $\Rightarrow$ (b) A la álgebra constante (A, ω) , le asociamos $N = \ker \omega$. Como además A es de Jordan (observación 1.5), tenemos que $e(ex) = ex$ ó $L_e^2 x = L_e x$, es decir, L_e es un proyector.

Ahora $F = \{x \in N / ex = x\}$, $Z = \{x \in N / ex = 0\}$ son ideales de N , pues si consideramos $ex = \lambda x$ con $\lambda = 0, 1$, tendremos que $e(xy) = (ex)y = \lambda xy$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea A la extensión de N , $A = Ke \oplus N$ con estructura multiplicativa definida por

$$e^2 = e, ef = f, ez = 0$$

(Como F y Z son ideales de N , entonces es obvio que $FZ \subset F \cap Z = \{0\}$). Ahora si consideramos $x = \alpha e + f + z$ entonces $x^2 = \omega(x)^2 e$ y si $y = \alpha' e + f' + z'$ entonces un cálculo simple muestra que $e(xy) = (ex)y$ para todo $x, y \in A$, es decir, A es una álgebra constante de Jordan.

2. Train álgebras de rango 3

Consideremos una Train álgebra (A, ω) de rango 3, satisfaciendo la t -ecuación (ver [1])

$$(2.1) \quad x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$$

Linealizando esta ecuación tenemos

$$(2.2) \quad x^2y = (1 + \gamma)\omega(y)x^2 - \gamma\omega(x)^2y$$

Ahora si hacemos en (2) $x = e$, $y = e^2$ conseguimos $e^2e^2 = (1 + \gamma)\omega(e^2)e^2 - \gamma\omega(e^2)e^2 = \omega(e^2)e^2 = e^2$. Así hemos probado

Proposición 2.1. : Si A es una T-álgebra de rango 3, entonces existe un elemento idempotente en A .

Proposición 2.2. : Son equivalentes :

a) (A, ω) es una T-álgebra de rango 3, donde $ex = \gamma x$ y $x^2 = 0$, $\forall x \in \ker \omega$.

b) A es una álgebra constante de orden 1.

Demostración :

a) Tomando en (2.2) $x = e$, $y \in \ker \omega$ obtenemos $ey = (1 + \gamma)\omega(y)e - \gamma\omega(e)^2y = \gamma y$. Además si en la misma ecuación hacemos $y = e$ con $\omega(e) = 1$ y $x \in \ker \omega$, obtenemos $ex^2 = (1 + \gamma)x^2$.

Por otro lado $\ker \omega$ es un ideal de $\mathbf{A}$, luego $x^2 \in \ker \omega$ y entonces $ex^2 = \gamma x^2$, de donde $\gamma x^2 = ex^2 = (1 + \gamma)x^2$ y así $x^2 = 0$.

Ahora sea $y = \lambda e + x$, $x \in \ker \omega$, entonces trivialmente se sigue que $y^2 = \omega(y)^2 e$ y $\mathbf{A}$ es constante.

b) Tomando $y = \lambda e + x$ entonces se tiene (1) y así $\mathbf{A}$ es una T-álgebra de rango 3.

Proposición 2.3. : Sea $\mathbf{A}$ una T-álgebra de rango 3, satisfaciendo la ecuación (2.1). Son equivalentes:

- a) $\mathbf{A}$ es de potencia asociativa.
- b) $\gamma \in \{0, 1\}$.
- c) $\mathbf{A}$ es de Jordan.

Demostración :

(a) $\Rightarrow$ (b) Sean $\mathbf{A}$ de potencia asociativa y $x \in \mathbf{A}$ tal que $x = e + z$, $z \in \mathbf{N}$. Entonces tenemos $(e+z)^4 = [(e+z)^2]^2$, de donde $[e(e+z)(e+z)] = e$ y así $\gamma = 0, 1$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $\gamma = 1$, e es neutro multiplicativo y entonces $e(xy) = (ex)y$ para todo $x, y \in \mathbf{A}$.

Si $\gamma = 0$ la ecuación (1) se reduce a $x^3 = \omega(x)x^2$ y $\mathbf{A}$ es una álgebra de Bernstein-Jordan (ver [3]).

(c) $\Rightarrow$ (a) Si $\mathbf{A}$ es de Jordan, entonces desde [3] se sigue que $\mathbf{A}$ es de potencia asociativa.

De la proposición 1.4 y del hecho que $L_e = \gamma I_d$, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.4. : Si $\mathbf{A}$ es una T-álgebra de rango 3, entonces $\text{Aut}(\mathbf{A}) = \text{Aut}(\mathbf{N})$ y $\text{Der}(\mathbf{A}) = \text{Der}(\mathbf{N})$.

Referencias

- [1] Costa. R. : *Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5* . Proc. Edinb. Math.Soc. 33, pp. 61 – 70 (1990).
- [2] Mallol. C. ; Micali. A. ; Ouattara. M. : *Sur les algèbres de Bernstein IV*. Linear Algebra and its Applications 158, pp. 01 – 26 (1991).
- [3] Walcher.S. : *Bernstein algebras which are Jordan algebras*. Arch. Math. Vol. 50, pp. 218 – 222 (1988).

Recibido : Agosto 02, 1995.

Raúl Benavides G.

Cristián Mallol C.

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de la Frontera

Casilla 54-D

Temuco - Chile