Proyecciones
Vol. 13 N°1, pp.19-24 Julio 1994
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

HOMOTOPA DE T-ALGEBRAS DE RANGO 3

RODOLFO BAEZA V. Y RAÚL BENAVIDES G.*

Universidad de La Frontera, Temuco-Chile

Resumen

En este artículo caracterizamos los idempotentes de la homótopa de la T-álgebra $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus U \oplus V$ de rango 3 y probamos que si su homótopa también es de rango 3, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus V$.

*Proyectos DIUFRO 9410, DIUFRO 9202 y FONDECYT 1930173

1. Preliminares

Dada una álgebra $\mathbf{A}$ y un elemento fijo $a \in \mathbf{A}$, Thedy (ver [4]) construye el álgebra homótopa $\mathbf{A}^{(a)}$ manteniendo la misma estructura lineal de $\mathbf{A}$, pero con la nueva multiplicación:

$$x \cdot_a y = (xa)y + x(ay) - a(xy)$$

Evidentemente la conmutatividad de $\mathbf{A}$ implica la conmutatividad de $\mathbf{A}^{(a)}$.

Si $(\mathbf{A}, \omega)$ es una álgebra ponderada y $a \in \mathbf{A}$ es de peso $k \neq 0$, podemos definir la función $\omega' : \mathbf{A}^{(a)} \rightarrow \mathbf{K}$ tal que $\omega'(x) = k\omega(x)$. Como $\omega'(x \cdot_a y) = k\omega(x \cdot_a y) = k\omega(x)\omega(a)\omega(y) = k\omega(x)k\omega(y) = \omega'(x)\omega'(y)$ se tiene que $(\mathbf{A}^{(a)}, \omega')$ es también un álgebra ponderada. Para el elemento $b = k^{-1}a$ de peso 1, consideremos el álgebra ponderada $(\mathbf{A}^{(b)}, \omega)$ y la biyección $\psi : (\mathbf{A}^{(a)}, \omega') \rightarrow (\mathbf{A}^{(b)}, \omega)$ dada por $\psi(x) = kx$. Dado que ψ es lineal, que $\omega(\psi(x)) = \omega(kx) = k\omega(x) = \omega'(x)$, $\forall x \in \mathbf{A}$ y además que $\psi(x \cdot_a y) = k(x \cdot_a y) = k((xa)y + x(ay) - a(xy)) = k^2(x \cdot_b y) = (kx) \cdot_b (ky) = \psi(x) \cdot_b \psi(y)$, se tiene que $(\mathbf{A}^{(a)}, \omega') \cong (\mathbf{A}^{(b)}, \omega)$, (ver González [2]). Notemos que la homótomas producidas por elementos de peso uno no son necesariamente isomorfas, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea $\mathbf{A}$ el álgebra $\langle c_o, c_1 \rangle_{\mathbb{R}}$, cuyo producto está dado por $c_o^2 = c_o + c_1$, $c_o c_1 = c_1 c_o = 3c_1$ y $c_1^2 = c_1$. $\mathbf{A}$ es un álgebra ponderada con homomorfismo peso $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\omega(c_o) = 1$ y $\omega(c_1) = 0$. Nótese que los únicos idempotentes no nulos de $\mathbf{A}^{(c_o)}$ son $c_o - c_1$ y $c_o - \frac{4}{3}c_1$. Además $\mathbf{A}^{(c_o+c_1)}$ no tiene idempotentes no nulos. Entonces $\mathbf{A}^{(c_o)} \not\cong \mathbf{A}^{(c_o+c_1)}$.

En este trabajo $I(\mathbf{A})$ indicará el conjunto de todos los idempotentes no nulos del álgebra $\mathbf{A}$ y desde ahora consideraremos, solamente las homótomas producidas por elementos de peso 1.

Observación. Si $a \in I(\mathbf{A})$ entonces $a \in I(\mathbf{A}^{(a)})$. En particular $e \in I(\mathbf{A}^{(e)})$.

2. Resultados

En esta sección consideraremos una T-álgebra $\mathbf{A}$ de rango 3, cuya t-ecuación es $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$ con $\gamma \neq \frac{1}{2}$, de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y $\text{car} \mathbf{K} \neq 2$. También supondremos que existe un elemento idempotente $e \in \mathbf{A}$ y escribiremos como $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus U \oplus V$, la descomposición de Peirce de $\mathbf{A}$ relativa a e , donde los subespacios U y V corresponden a

$$U = \{x \in \text{Ker } \omega \mid ex = \frac{1}{2}\}, V = \{x \in \text{Ker } \omega \mid ex = \gamma x\}$$

y

$$\text{Ker } \omega = U \oplus V$$

Es sabido desde [1] que en toda T-álgebra $\mathbf{A}$ de rango 3, se satisfacen las siguientes relaciones, entre los subespacios U y V :

$$U^2 \subset V, UV \subset U \text{ y } V^2 = 0$$

Proposición 1. *Sea $(\mathbf{A}, \omega)$ una T-álgebra de rango 3 y $a \in \mathbf{A}$. Si $b \in I(\mathbf{A}^{(a)})$, entonces $\omega(b) = 1$.*

Demostración: Dado que $b \cdot_a b = b$, sabemos que $\omega(b)^2 = \omega(b)$ y en consecuencia $\omega(b) = 0$ o $\omega(b) = 1$.

Si $\omega(b) = 0$, podemos escribir $b = u + v$; $u \in U$, $v \in V$. Además consideremos $a = e + \bar{u} + \bar{v}$ con $\bar{u} \in U$ y $\bar{v} \in V$.

Reemplazando estas expresiones de a y b en la igualdad $b \cdot_a b = b$ y usando algunas relaciones en T-álgebras de rango 3 mencionadas anteriormente, tenemos

$$u = -2u^2\bar{u} + 2\gamma uv + 4v(u\bar{v}) \text{ y } v = (1 - \gamma)u^2 + 4u(\bar{u}v).$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por v y la segunda por u , obtenemos $u^2(\bar{u}v) - 2u(u(\bar{u}v)) = 0$; pero de la identidad de Jacobi, sabemos que $2u(u(\bar{u}v)) = -u^2(\bar{u}v)$, así $uv = 0$. Sustituyendo este valor de uv en las expresiones obtenidas para u y v , vemos que $u = -2u^2\bar{u}$ y $v = (1 - \gamma)u^2$.

De la igualdad $u = -2u^2\bar{u}$ se demuestra que $u^2 = 0$ y en consecuencia $u = v = 0$, es decir $b = 0$.

De esta forma podemos concluir que $\omega(b) = 1$ para todo elemento idempotente no nulo de $\mathbf{A}^{(a)}$. $\square$

Proposición 2. *Sea $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus U \oplus V$ una T-álgebra de rango 3 con $\gamma \neq 1$, $a = e + \bar{u} + \bar{v}$; $\bar{u} \in U$ y $\bar{v} \in V$. Entonces*

$$I(\mathbf{A}^{(a)}) = \{e + u + [-\gamma\bar{v} + (1 - \gamma)(1 - 2\gamma)^{-1}u^2 + 2\gamma(1 - 2\gamma)^{-1}u\bar{u}] : u \in U\}.$$

Demostración: Sea f un idempotente no nulo en $\mathbf{A}^{(a)}$. Por Proposición 1, existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $f = e + u + v$. De la relación $f \cdot_a f = f$, obtenemos $e + u + 2(1 - \gamma)\bar{u}v + 2\gamma u\bar{v} + 2\gamma uv + 4v(u\bar{v}) - u^2\bar{u} + 2u(u\bar{u}) + 2\gamma v + \gamma(2\gamma - 1)\bar{v} + (1 - \gamma)u^2 + 2\gamma u\bar{u} + 4u(\bar{u}v) = e + u + v$. Así vemos que se satisfacen las dos igualdades siguientes:

$$2(1 - \gamma)\bar{u}v + 2\gamma u\bar{v} + 2\gamma uv + 4v(u\bar{v}) - 2u^2\bar{u} = 0 \quad (1)$$

y

$$\gamma(2\gamma - 1)\bar{v} + (1 - \gamma)u^2 + 2\gamma u\bar{u} + 4u(\bar{u}v) = (1 - 2\gamma)v \quad (2)$$

Al multiplicar la igualdad (1) por u y usando el hecho de que $\gamma \neq 1$ tenemos $u(u\bar{v}) = 0$.

Sustituyendo ese valor en la segunda igualdad concluimos que

$$v = -\gamma\bar{v} + (1 - \gamma)(1 - 2\gamma)^{-1}u^2 + 2\gamma(1 - 2\gamma)^{-1}u\bar{u}. \quad \square$$

Corolario 1. *Si la t-ecuación de $\mathbf{A}$ es $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$, entonces $I(\mathbf{A}^{(a)}) = I(\mathbf{A})$, para cualquier $a \in \mathbf{A}$ de peso 1.*

Demostración: En este caso se tiene $\gamma = 0$ y aplicando la Proposición 2 se tiene que $I(\mathbf{A}^{(a)}) = \{\epsilon + u + u^2 : u \in U\}$.

Quattara mostró que si la ecuación de $\mathbf{A}$ es $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$, entonces $\mathbf{A}$ es de Bernstein (ver [3]). Pero es sabido que los idempotentes en las álgebras de Bernstein son exactamente los elementos de la forma $\epsilon + u + u^2$. $\square$

En general los conjuntos $I(\mathbf{A})$ e $I(\mathbf{A}^{(a)})$ no están ordenados por inclusión como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Consideremos la T-álgebra de rango 3 y dimensión 3, $\mathbf{A} = \langle \epsilon, u, v \rangle$, bajo la multiplicación

$\epsilon^2 = \epsilon$, $\epsilon u = \frac{1}{2}u$, $\epsilon v = v$ y los otros productos restantes nulos.

Se trata del caso $\gamma = 1$. Haciendo $a = \epsilon + v$, notamos que el elemento $f = \epsilon - v$ satisface la igualdad $f \cdot_a f = f$, pero $f^2 = f \cdot f = \epsilon - 2v \neq f$, es decir $f \in I(\mathbf{A}^{(a)}) - I(\mathbf{A})$. Recíprocamente, el elemento $\epsilon + u$ es idempotente en $\mathbf{A}$; pero $\epsilon + u \notin I(\mathbf{A}^{(a)})$, pues $(\epsilon + u) \cdot_a (\epsilon + u) = \epsilon + u + v$.

Lema 1. Sea $\mathbf{A}$ una T-álgebra de rango 3, entonces $\forall u, \bar{u} \in U$ y $v, \bar{v} \in V$ son válidas las siguientes igualdades:

- (a) $u(\bar{v}(uv)) = 0$
- (b) $u(\bar{u}(uv)) = -(u\bar{u})(uv)$
- (c) $\bar{u}(u(u\bar{u})) = 0$
- (d) $u(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = 0$
- (e) $v(\bar{u}(\bar{u}(uv))) = 0$
- (f) $v(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv))$ y $u(\bar{u}(\bar{v}(uv))) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv))$
- (g) $(u\bar{u})(\bar{v}(uv)) = \bar{v}(v(u\bar{u}))$
- (h) $\bar{v}(u(\bar{u}(uv))) = -u(\bar{u}(\bar{v}(uv)))$.

Demostración:

(a) $u(\bar{v}(uv)) = -(uv)(u\bar{v})$, por otra parte $u(\bar{v}(uv)) = -u(v(u\bar{v})) = (uv)(u\bar{v})$. Luego $u(\bar{v}(uv)) = 0$.

(b) $u(\bar{u}(uv)) + \bar{u}(u(uv)) + (u\bar{u})(uv) = 0$, pero $u(uv) = 0$, entonces $u(\bar{u}(uv)) = -(u\bar{u})(uv)$.

(c) $\bar{u}(u(u\bar{u})) = \bar{u}(-\frac{1}{2}u^2\bar{u}) = -\frac{1}{2}\bar{u}(\bar{u}u^2) = 0$, pues $\bar{u} \in U$ y $u^2 \in V$.

(d) $u(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = -(u\bar{v})(u(u\bar{u})) = (u\bar{v})(\frac{1}{2}u^2\bar{u}) = -\frac{1}{2}\bar{u}(u^2(u\bar{v})) = \frac{1}{2}(\bar{u}(\bar{v}(u^2u))) = 0$.

(e) $v(\bar{u}(\bar{u}(uv))) = -\frac{1}{2}v(\bar{u}^2(uv)) = \frac{1}{2}\bar{u}^2(v(uv)) = 0$.

(f) $v(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = -\bar{v}(v((u(u\bar{u})))) = \bar{v}((u\bar{u})(uv)) = -\bar{v}(u(\bar{u}(uv)))$ por (b).
 Luego $v(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv))$. Por otro lado tenemos:

$$u(\bar{u}(\bar{v}(uv))) = -u(\bar{u}(v(u\bar{v}))) = u((u\bar{v})(\bar{u}v)) = -(u(\bar{u}v)(u\bar{v})) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv)).$$

$$(g) (u\bar{u})(\bar{v}(uv)) = -\bar{v}((uv)(u\bar{u})) = \bar{v}(v(u(u\bar{u}))).$$

$$(h) \bar{v}(u(\bar{u}(uv))) = -(u\bar{v})(\bar{u}(uv)) = -u(\bar{u}(\bar{v}(uv))) \text{ por (f). } \square$$

Proposición 3. Sea $\mathbf{A}$ una T -álgebra de rango 3 y $\mathbf{A}^{(a)}$ su álgebra homotopa, entonces : $x^3 = 0 \quad \forall x \in \text{Ker } \omega$, donde $x^3 = (x \cdot_a x) \cdot_a x$.

Demostración: Sean $a = \epsilon + \bar{u} + \bar{v}$ y $x = u + v \in \text{Ker } \omega$; con $u, \bar{u} \in U$ y $v, \bar{v} \in V$.
 Así

$$\begin{aligned} x^2 &= x \cdot_a x = 2(ax)x - ax^2 = (1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u} \text{ y} \\ x^3 &= \{[(1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u}](\epsilon + \bar{u} + \bar{v})\}(u + v) + \\ &\quad \{(u + v)(\epsilon + \bar{u} + \bar{v})\}[(1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u}] - \\ &\quad (\epsilon + \bar{u} + \bar{v})\{[(1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u}](u + v)\}. \end{aligned}$$

En el desarrollo del segundo miembro usamos las relaciones entre los subespacios U, V (dadas en [1]) y resultados del Lema 1 anterior obteniendo lo que se quería, es decir $x^3 = 0$. $\square$

Proposición 4. Si $\mathbf{A}$ T -álgebra de rango 3 cuya homotopa también es una T -álgebra de rango 3 entonces $\mathbf{A} = \mathbf{K}\epsilon \oplus V$.

Demostración: Sea $\mathbf{A}$ una T -álgebra de rango 3. Si su homotopa $\mathbf{A}^{(a)}$ es también una T -álgebra de rango 3, ella debe satisfacer una ecuación de la forma:

$$x^3 - (1 + \delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 0, \quad \forall x \in \mathbf{A}$$

Consideremos un elemento $x \in \mathbf{A}$ con $x = \alpha\epsilon + u + v$. Si $x^2 = \alpha^2\epsilon + u' + v'$ y $x^3 = \alpha^3\epsilon + u'' + v''$, donde $x^2 = x \cdot_a x$ es el producto en la homotopa $\mathbf{A}$, entonces

$$\alpha(1 + \delta)u' = u'' + \alpha^2\delta u \quad (1)$$

y

$$\alpha(1 + \delta)v' = v'' + \alpha^2\delta v \quad (2)$$

Un cálculo directo muestra que:

$$u' = \alpha[u + 2\gamma u\bar{v} + 2(1 - \gamma)\bar{u}v] + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}(uv).$$

$$v' = \alpha^2\gamma(2\gamma - 1)\bar{v} + 2\alpha\gamma(u\bar{u} + v) + (1 - \gamma)u^2 - 4\bar{u}(uv).$$

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{\alpha}{2}[u + 2\gamma u\bar{v} + 2(1 - \gamma)\bar{u}v] + \frac{\alpha^2}{2}\{[\alpha(u + 2\gamma u\bar{v} + 2(1 - \gamma)\bar{u}v) + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2] + \\ &\quad 2\gamma[\alpha(u + 2\gamma u\bar{v} + 2(1 - \gamma)\bar{u}v) + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2]\bar{v} + 2(1 - \gamma)\bar{u}[\alpha^2\gamma(2\gamma - 1)\bar{v} + \\ &\quad 2\alpha\gamma(u\bar{u} + v) + (1 - \gamma)u^2 - 4\bar{u}(uv)]\} - 2\{\bar{v}(u[\alpha^2\gamma(2\gamma - 1)\bar{v} + 2\alpha\gamma(u\bar{u} + v) + (1 - \gamma)u^2 - 4\bar{u}(uv)]) + \\ &\quad \bar{v}([\alpha(u + 2\gamma u\bar{v} + 2(1 - \gamma)\bar{u}v) + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2]v) + \bar{u}(u[\alpha(u + \end{aligned}$$

$$2\gamma u\bar{v} + 2(1-\gamma)\bar{u}v + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2)) + \gamma\{u[\alpha^2\gamma(2\gamma-1)\bar{v} + 2\alpha\gamma(u\bar{u}+v) + (1-\gamma)u^2 - 4\bar{u}(uv)] + [\alpha(u+2\gamma u\bar{v} + 2(1-\gamma)\bar{u}v) + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2]v\}.$$

$$v'' = \alpha\alpha^2\gamma(2\gamma-1)\bar{v} + \alpha\gamma(u\bar{u}+v) + \alpha^2\gamma\{[\alpha(u+2\gamma\bar{v} + 2(1-\gamma)\bar{u}v) + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2]\bar{u} + [\alpha^2\gamma(2\gamma-1)\bar{v} + 2\alpha\gamma(u\bar{u}+v) + (1-\gamma)u^2 - 4\bar{u}(uv)]\} + (1-\gamma)u[\alpha(u+2\gamma u\bar{v} + 2(1-\gamma)\bar{u}v) + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2] - 2\{\bar{u}(u[\alpha^2\gamma(2\gamma-1)\bar{v} + 2\alpha\gamma(u\bar{u}+v) + (1-\gamma)u^2 - 4\bar{u}(uv)]) + \bar{u}([\alpha(u+2\gamma u\bar{v} + 2(1-\gamma)\bar{u}v) + 2\gamma uv - 4\bar{v}(uv) - 2\bar{u}u^2]v)\}.$$

Supongamos que $\gamma \neq 0$. Haciendo $x = \alpha\epsilon$ y usando la ecuación (2) obtenemos que $\alpha^3\gamma(2\gamma-1)(1+\delta)\bar{v} = \alpha^3\gamma(2\gamma-1)(1+\alpha\gamma)\bar{v}$, es decir $\alpha^3\gamma(2\gamma-1)(\delta-\alpha\gamma)\bar{v} = 0$. Siendo $\gamma \neq 0$, podemos escoger α tal que $\delta-\alpha\gamma \neq 0$ y en tal caso $\bar{v} = 0$. Para $x = \alpha\epsilon + u$ la ecuación (1) indica que $\frac{\alpha}{2}(\alpha-1)^2u + (2\alpha\delta + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha^2\gamma - \alpha\gamma^2)\bar{u}u^2 - \alpha^3\gamma(1-\gamma)u\bar{u}^2 = 0$.

En particular si $u = \bar{u}$ entonces $\alpha(\alpha-1)\bar{u} = 0$ de donde $\bar{u} = 0$, luego $U = \{0\}$.

Usando el hecho que $U = \{0\}$ y la ecuación (2), se tiene que $\alpha(\alpha\delta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\gamma\delta + \gamma + 2\alpha^2\gamma^2)v = 0$, entonces $v = 0$, de donde $V = \{0\}$.

Luego $\mathbf{A} = \mathbf{K}\epsilon$ que es de rango 2. **Contradicción** con la hipótesis, luego es imposible que $\gamma \neq 0$.

Como $\gamma = 0$, la t-ecuación de $\mathbf{A}$ es $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Para $x = \alpha\epsilon + u$ la ecuación (1) indica que $\frac{\alpha}{2}(\alpha-1)^2u + 2\alpha\delta\bar{u}u^2 = 0$. Como esta igualdad es válida para todo $u \in U$, haciendo $u = \bar{u}$ tenemos que $\bar{u} = 0$ y así $\alpha(\alpha-1)^2u = 0$ de donde $u = 0$. Luego $U = \{0\}$ y la ecuación (2) indica que $\alpha^2\delta v = 0$ de donde $\delta = 0$, salvo que $V = \{0\}$; pero el último caso se trata de $\mathbf{A} = \mathbf{K}\epsilon$ que es de rango 2. Luego $\mathbf{A} = \mathbf{K}\epsilon \oplus V$ y la álgebra homótopa es de la forma $\mathbf{A}^{(\epsilon+\bar{v})}$.

Recíprocamente, si $\mathbf{A} = \mathbf{K}\epsilon \oplus V$ tal que $x^3 - \omega(x)x^2 = 0 \ \forall x \in \mathbf{A}$, entonces $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. □

REFERENCIAS

- [1] Costa R., *Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5* , Proc. Edinb. Math. Soc. **33**, 61-70 (1990).
- [2] Gonzalez S., *Homotope Algebra of Bernstein Algebra*, Submitted.
- [3] Ouattara M., *Sur les T-algebres de Jordan*, Linear Algebra and its Applications. **144**, 11-21 (1991).
- [4] Thedy A., *Mutationen und polarisierte Fundamentalformel*, Math. Annalen. **177**, 235-246 (1968).

Recibido: Marzo 3, 1994.

Raúl Benavides y Rodolfo Baeza
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Frontera
Casilla 54-D, Temuco-Chile.