Proyecciones

Vol. 11 N° 1, pp.45-62 Mayo 1992

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

**EXISTENCIA Y COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE UNA
CLASE DE ECUACIONES CON RETARDO**

*JULIO GALLARDO**

Universidad de La Frontera, Temuco, Chile

*MANUEL PINTO***

Universidad de Chile, Santiago, Chile.

By means of Tychonoff's Theorem on the fixed point, we obtain existence theorems and asymptotic formulae for the solutions of a certain class of delay-differential equations

* Research supported by Facultad de Ciencias and Proyectos D.I. 120-2-60 Universidad de La Serena

** Research supported by grants D.T.I. Universidad de Chile E 3063-9222, and Fondecyt 0855-91.

1. Introducción.

Sean τ y b dos números reales positivos, $I = [0, \infty)$ y $B_n[0, b] \subseteq \mathbf{R}^n$ la bola cerrada centrada en el origen y de radio b . Sea $B : I \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ una función matricial. En lo sucesivo, $|\cdot|$ representa una norma espectral de matrices. Definamos $\dot{B}(t) = B(t)$ si $t \geq 0$, $\dot{B}(t) = 0$ si $t < 0$ y $\|B_t\| = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} |\dot{B}(s)|$, $\|B_t\|_2 = \sup_{t-2\tau \leq s \leq t} |B(s)|$ para $t \geq 0$ y $\|B\|_\infty = \sup_{s \geq 0} |B(s)|$.

Sea $r : I \times B_n[0, b] \rightarrow [0, \tau]$ una función continua y considere para $t \geq 0$:

$$m_\rho(t) = \sup_{|\Phi^{-1}(t)z| \leq \rho} r(t, z), \quad \rho > 0,$$

donde Φ es una matriz fundamental del sistema

$$\dot{y} = A(t)y.$$

Para Φ acotada, nosotros denotamos $m_b = m_{\varrho_0}$, donde $\varrho_0 = b/\|\Phi\|_\infty$.

Finalmente, se definen las funciones:

$$\lambda_b(t) = |A(t)| \|A_t\| \cdot |\Phi^{-1}(t)| \|\Phi_t\|_2 \cdot m_b(t)$$

y

$$\lambda_\rho(t) = |A(t)| \|A_t\| \cdot |\Phi^{-1}(t)| \|\Phi_t\|_2 \cdot m_\rho(t)$$

Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1. Supongamos que Φ es acotada, que $\lambda_b \in L_1(I)$ y sea $0 < \rho \leq \frac{b}{\|\Phi\|_\infty}$. Entonces

- i) Para cada $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| < \rho$ y $t_0 \geq 0$ que satisfagan $|\xi| + 3\rho \int_{t_0}^\infty \lambda_b(s) ds \leq \rho$, existe una solución x de la ecuación

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t - r(t, x(t)))$$

definida para $t \geq t_0$ que satisface $|\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho$ y

$$(2) \quad x(t) = \Phi(t)[\xi + 0(\int_t^\infty \lambda_b(s)ds)], \quad t \rightarrow \infty$$

- ii) Además, dada cualquier solución x de (1) definida para $t \geq s_0$, que satisfaga $|\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho$, para $t \geq s_0$; existe $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| \leq \rho$, tal que se verifica (2).

Este resultado mejora el obtenido por Cooke en [3], quien estableció:

Teorema 2. Sea $r(u)$ definida, no negativa y continua para $|u| \leq b$ y supongamos que las siguientes condiciones son satisfechas:

$$r(0) = 0, \quad \int_{t_0}^\infty m(t)dt < \infty,$$

donde

$$m(t) = \sup_{|u| \leq be^{-at}} r(u)$$

Entonces, existe $c' > 0$ con la propiedad siguiente: Si c está en $[-c', c']$, hay una solución $u(t)$ de la ecuación

$$(*) \quad \dot{u}(t) = -au(t - r(u(t))), \quad a > 0$$

definida en una vecindad de $+\infty$, que satisface

$$(**) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)e^{at} = c$$

Recíprocamente, suponiendo condiciones bajo las cuales la solución de (*) está únicamente determinada por una función inicial, entonces cada solución de (*) definida en una vecindad de $+\infty$ y que sea suficientemente pequeña sobre un intervalo inicial adecuado, satisface (**) para alguna constante c .

Las mejoras son evidentes:

1. La ecuación (1) es vectorial y (*) es escalar
2. Se cambio la constante $a > 0$ por $A(t)$ matriz continua

3. Se cambio un $r: [-b, +b] \rightarrow [0, \tau]$ por $r: I \times B_n[0, b] \rightarrow [0, \tau]$
4. En nuestro resultado, para cada $|\xi| < b$, existe solución x de (1) que satisface (2)

Cooke solo puede asegurar que para cada c en un intervalo contenido en $(-\frac{b}{4}, +\frac{b}{4})$, existe solución x de (*) que satisface (**).

5. En nuestro resultado, cualquier solución x de (1) que verifica $|\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho$, satisface la fórmula asintótica (2). Cooke necesita que x sea suficientemente chica en cierto intervalo inicial, para que se verifique (**).

En [4, 8-10] se han obtenido fórmulas asintóticas para retardos dependientes sólo del tiempo. En [11], la ecuación estudiada no es asintóticamente parecida a una ecuación ordinaria. En [7], se insinúa por primera vez la clase de funciones de Lipschitz C' usada en la demostración de la parte i) del Teorema 1. En [5, 7] se estudian ecuaciones con retardos dependientes tanto del tiempo como del estado.

2. Demostración del Teorema 1.

Parte ii) Sea x una solución de (1), definida sobre $[s_0, +\infty)$. Entonces

$$y(t) = x(t) - \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)] ds$$

donde $t_0 \geq s_0 + \tau$, es una solución de $\dot{y} = A(t)y$.

En efecto:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{x}(t) - \Phi(t)\Phi^{-1}(t)A(t)[x(t - r(t, x(t))) - x(t)] \\ &\quad - A(t)\Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)] ds \\ &= A(t)x(t - r(t, x(t))) - A(t)x(t - r(t, x(t))) + A(t)x(t) \\ &\quad - A(t)\Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)] ds \\ &= A(t)y(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $y(t) = \Phi(t)c$ y entonces

$$x(t) = \Phi(t)[c + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)A(s)[x(s - r(s, x(s))) - x(s)]ds]$$

Además

$$|\Phi^{-1}(s)A(s)[x(s - r(s, x(s))) - x(s)]| \leq \rho\lambda_b(s)$$

En efecto: Dados $t, t' \geq s_0 + \tau$, $0 \leq t - t' \leq \tau$, como x es derivable sobre $[s_0, +\infty)$, se tiene:

$$x(t) - x(t') = \int_{t'}^t \dot{x}(s)ds$$

Pero

$$\begin{aligned} |\dot{x}(s)| &= |A(s)x(s - r(s, x(s)))| \leq |A(s)||x(s - r(s, x(s)))| \\ &= |A(s)||\Phi(s - r(s, x(s)))\Phi^{-1}(s - r(s, x(s)))x(s - r(s, x(s)))| \\ &\leq \rho|A(s)||\Phi(s - r(s, x(s)))|, \end{aligned}$$

puesto que $s - r(s, x(s)) \geq s_0$ y por lo tanto $|\dot{x}(s)| \leq \rho|A(s)||\Phi_s|$, con lo cual

$$|x(t) - x(t')| \leq \int_{t'}^t |\dot{x}(s)|ds \leq \int_{t'}^t \rho|A(s)||\Phi_s|ds$$

y como $0 \leq t - t' \leq \tau$, entonces

$$|A(s)| \leq \|A_t\| \quad \text{y} \quad \|\Phi_s\| \leq \|\Phi_t\|_2$$

De donde:

$$|x(t) - x(t')| \leq \rho\|A_t\|_2\|\Phi_t\|_2(t - t')$$

para cualquier $t, t' \geq s_0 + \tau$ y $0 \leq t - t' \leq \tau$.

Así, para $s \geq s_0 + 2\tau$, se tiene que $s - r(s, x(s)) \geq s_0 + \tau$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |\Phi^{-1}(s)A(s)[x(s - r(s, x(s))) - x(s)]| &\leq |\Phi^{-1}(s)||A(s)|\rho|A(s)||\Phi_s|_2r(s, x(s)) \\ &\leq \rho|A(s)||A_s||\Phi^{-1}(s)||\Phi_s|_2m_b(s) \\ &= \rho\lambda_b(s) \end{aligned}$$

Con esto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} x(t) = & \Phi(t) \left[c + \int_{t_0}^{\infty} \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s, r(s, x(s))) - x(s)] ds \right. \\ & \left. - \int_t^{\infty} \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)] ds \right] \end{aligned}$$

Es decir

$$x(t) = \Phi(t) \left[\xi + 0 \left(\int_t^{\infty} \lambda_b(s) ds \right) \right], \quad t \rightarrow \infty,$$

donde

$$\xi = c + \int_{t_0}^{\infty} \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)] ds$$

que necesariamente verifica $|\xi| \leq \rho$, ya que $|\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho$, para $t \geq s_0$.

Parte i) Sea $E = \mathcal{C}([t_0 - \tau, +\infty), \mathbf{R}^n)$ el espacio vectorial topológico de las funciones continuas en $[t_0 - \tau, +\infty)$, dotado de la topología compacto-abierta. Sea $C \subseteq E$ definido por $x \in C$ si y sólo si x es constante sobre $[t_0 - \tau, t_0]$, $|\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho$, para $t \geq t_0$ y $|x(t) - x(t')| \leq 3\rho \|A_t\| \|\Phi_t\|_2 (t - t')$ para $t, t' \geq t_0, 0 \leq t - t' \leq \tau$.

Definamos la función

$$\begin{aligned} T: C &\rightarrow E \\ x &\rightarrow T(x) = y \end{aligned}$$

dada por

$$y(t) = \Phi(t) \left[\xi - \int_t^{\infty} \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)] ds \right], \quad t \geq t_0$$

$$y(t) = y(t_0); \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0$$

T está bien definida pues:

$$(3) \quad |\Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)]| \leq 3\rho \lambda_b(s)$$

y claramente $y \in E$.

Debemos probar que T verifica:

1. $T(C) \subseteq C$.
2. T es continua sobre C , en la topología compacta abierta.
3. C es cerrado, convexo y compacto.

Usando entonces el teorema del punto fijo de Tychonoff [6], podemos asegurar que existe $x \in C$ tal que $T(x) = x$, es decir:

$$x(t) = \Phi(t) \left[\xi - \int_t^\infty \Phi^{-1}(s) A(s) [x(s - r(s, x(s))) - x(s)] ds \right], \quad t \geq t_0$$

$$x(t) = x(t_0), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

Derivando, se obtiene:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t - r(t, x(t))) \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

y teniendo en cuenta (3), se tiene:

$$x(t) = \Phi(t) \left[\xi + O\left(\int_t^\infty \lambda_b(s) ds\right) \right], \quad t \rightarrow \infty.$$

Demostración de (1). Dado $x \in C$, sea $y = T(x)$.

Es obvio, por la definición de T , que y es constante sobre $[t_0 - \tau, t_0]$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\Phi^{-1}(t)y(t)| &\leq |\xi| + \int_t^\infty |\Phi^{-1}(s)| |A(s)| |x(s - r(s, x(s))) - x(s)| ds \\ &\leq |\xi| + \int_t^\infty |\Phi^{-1}(s)| |A(s)| 3\rho \|A_s\| \|\Phi_s\|_2 \cdot m_b(s) ds \\ &\leq |\xi| + 3\rho \int_{t_0}^\infty \lambda_b(s) ds \leq \rho \quad \text{para todo } t \geq t_0 \end{aligned}$$

Además, para $s \geq t_0$,

$$\dot{y}(s) = A(s)y(s) + A(s)[x(s - r(s, x(s))) - x(s)]$$

Si suponemos $s - r(s, x(s)) \geq t_0$, entonces, como

$$|\Phi^{-1}(s)y(s)| \leq \rho, \quad |\Phi^{-1}(s)x(s)| \leq \rho \quad \text{para } s \geq t_0,$$

se tiene:

$$|\Phi^{-1}(s - r(s, x(s)))x(s - r(s, x(s)))| \leq \rho,$$

entonces:

$$\begin{aligned} |\dot{y}(s)| &\leq |A(s)||y(s)| + |A(s)||x(s - r(s, x(s)))| + |A(s)||x(s)| \\ &= |A(s)||\Phi(s)\Phi^{-1}(s)y(s)| \\ &\quad + |A(s)||\Phi(s - r(s, x(s)))\Phi^{-1}(s - r(s, x(s)))x(s - r(s, x(s)))| \\ &\quad + |A(s)||\Phi(s)\Phi^{-1}(s)x(s)| \\ &\leq \rho|A(s)||\Phi(s)| + \rho|A(s)||\Phi(s - r(s, x(s)))| + \rho|A(s)||\Phi(s)| \\ &\leq 2\rho|A(s)||\Phi(s)| + \rho|A(s)||\Phi_s|. \end{aligned}$$

Si suponemos $s - r(s, x(s)) \leq t_0$, entonces, como $x(s - r(s, x(s))) = x(t_0)$ se tendra $|\Phi^{-1}(t_0)x(t_0)| \leq \rho$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |\dot{y}(s)| &\leq |A(s)||\Phi(s)\Phi^{-1}(s)y(s)| + |A(s)||\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0)| \\ &\quad + |A(s)||\Phi(s)\Phi^{-1}(s)x(s)| \\ &\leq \rho|A(s)||\Phi(s)| + \rho|A(s)||\Phi(t_0)| + \rho|A(s)||\Phi(s)| \\ &\leq 2\rho|A(s)||\Phi(s)| + \rho|A(s)||\Phi_s|. \end{aligned}$$

Luego, para $t, t' \geq t_0$, $0 \leq t - t' \leq \tau$, se tiene:

$$\begin{aligned} |y(t) - y(t')| &\leq \int_{t'}^t |\dot{y}(s)| ds \leq \int_{t'}^t (2\rho|A(s)||\Phi_s| + \rho|A(s)| \cdot \|\Phi_s\|) ds \\ &\leq \int_{t'}^t 3\rho\|A_t\| \cdot \|\Phi_t\|_2 ds = 3\rho\|A_t\| \cdot \|\Phi_t\|_2(t - t'), \end{aligned}$$

ya que $0 \leq t - t' \leq \tau$ y $t' \leq s \leq t$ implica

$$|A(s)| \leq \|A_t\| \quad \text{y} \quad |\Phi(s)| \leq \|\Phi_s\| \leq \|\Phi_t\|_2.$$

Así hemos probado que $T(C) \subseteq C$

Demostración de (2). Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en C y x en C tal que $x_n \rightarrow x$ en la topología compacta abierta.

Debemos probar que $T(x_n) \rightarrow T(x)$.

En primer lugar, veamos que para cualquier $s \geq t_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{-1}(s)A(s)[(x(s - r(s, x(s))) - x_n(s - r(s, x_n(s)))) + (x_n(s) - x(s))] = 0$$

Para abreviar escribamos

$$\Delta_n(x, s) = A(s)[(x(s - r(s, x(s))) - x_n(s - r(s, x_n(s)))) + (x_n(s) - x(s))]$$

y sea $t_0 \leq s \leq L$, con L arbitrario fijo.

Con esto

$$|\Phi^{-1}(s)\Delta_n(x, s)| \leq M|(x(s - r(s, x(s))) - x_n(s - r(s, x_n(s)))) + (x_n(s) - x(s))|$$

para todo $s \in [t_0, L]$, para cierta constante M

Además, por la continuidad uniforme de x sobre $[t_0 - \tau, L]$, la de r sobre $[t_0, L] \times B_n[0, b]$ y la convergencia uniforme de x_n hacia x sobre $[t_0 - \tau, L]$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $|t - t'| < \delta$; $t, t' \in [t_0 - \tau, L]$ implican $|x(t) - x(t')| < \varepsilon/M$. Además, existe $\delta' > 0$ tal que

$$(s, x), (s, x') \in [t_0, L] \times B_n[0, b]; |(s, x) - (s, x')| < \delta'$$

implica $|r(s, x) - r(s, x')| < \delta$ y finalmente existe N tal que $n \geq N$ implica

$$|x_n(s) - x(s)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

y

$$|x_n(s) - x(s)| < \delta', \text{ para } s \in [t_0 - \tau, L].$$

Por lo tanto, para $n \geq N$, $|(s, x(s)) - (s, x_n(s))| < \delta'$ y como

$$(s, x(s)), (s, x_n(s)) \in [t_0, L] \times B_n[0, b]$$

se tiene

$$|r(s, x(s)) - r(s, x_n(s))| < \delta$$

o equivalentemente

$$|(s - r(s, x(s))) - (s - r(s, x_n(s)))| < \delta.$$

donde

$$s - r(s, x(s)), s - r(s, x_n(s)) \in [t_0 - \tau, L].$$

Esto implica

$$|x(s - r(s, x(s))) - x(s - r(s, x_n(s)))| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Por otro lado, como $s \in [t_0, L]$ y $s - r(s, x_n(s)) \in [t_0 - \tau, L]$, $n \geq N$ implica $|x_n(s) - x(s)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ y

$$|x_n(s - r(s, x_n(s))) - x(s - r(s, x_n(s)))| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Todo lo anterior permite que, para $n \geq N$

$$\begin{aligned} |\Phi^{-1}(s)\Delta_n(x, s)| &\leq M(|x(s - r(s, x(s))) - x(s - r(s, x_n(s)))| \\ &\quad + |x(s - r(s, x_n(s))) - x_n(s - r(s, x_n(s)))| + |x_n(s) - x(s)|) \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

o sea, cualquiera sea $s \geq t_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{-1}(s)\Delta_n(x, s) = 0$.

Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, ya que por (3) $|\Phi^{-1}(s)\Delta_n(x, s)| \leq 6\rho\lambda_b(s)$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{\infty} |\Phi^{-1}(s) \Delta_n(x, s)| ds = 0$$

y por lo tanto, dado cualquier compacto $[t_0, T]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(t)| \int_{t_0}^{\infty} |\Phi^{-1}(s) \Delta_n(x, s)| ds = 0,$$

uniformemente sobre $[t_0, T]$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} |T(x_n)(t) - T(x)(t)| &= |\Phi(t) \int_t^{\infty} \Phi^{-1}(s) \Delta_n(x, s) ds| \\ &\leq |\Phi(t)| \left| \int_t^{\infty} \Phi^{-1}(s) \Delta_n(x, s) ds \right| \\ &\leq |\Phi(t)| \int_{t_0}^{\infty} |\Phi^{-1}(s) \Delta_n(x, s)| ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

uniformemente sobre $[t_0, T]$.

Demostración de (3). C es evidentemente cerrado y convexo. Probaremos que C es compacto. Veamos que fijado un compacto $[t_0, L]$, cada $x \in C$ es Lipschitziana sobre $[t_0, L]$, con una misma constante de Lipschitz y por lo tanto C es equicontinua sobre $[t_0, L]$.

En efecto, dados $t, t' \in [t_0, L]$, $t \geq t'$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$t' + (n-1)\tau < t \quad \text{y} \quad t' + n\tau \geq t.$$

Definamos $t'_i = t' + i\tau$, para $i = 1, \dots, n-1$.

Con esto:

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(t')| &= |x(t) - x(t'_{n-1})| + |x(t'_{n-1}) - x(t'_{n-2})| + \cdots + |x(t'_1) - x(t')| \\
&\leq 3\rho \|A_t\| (t - t'_{n-1}) + 3\rho \|A_{t'_{n-1}}\| (t'_{n-1} - t'_{n-2}) \\
&\quad + \cdots + 3\rho \|A_{t'_1}\| (t'_1 - t') \\
&\leq 3\rho \bar{A} (t - t'_{n-1}) + 3\rho \bar{A} (t'_{n-1} - t'_{n-2}) + \cdots + 3\rho \bar{A} (t'_1 - t') \\
&= 3\rho \bar{A} (t - t'), \quad \text{donde } \bar{A} = \max_{s \in [t_0 - \tau, L]} |\dot{A}(s)|
\end{aligned}$$

Además, dada $x \in C$

$$|x(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho |\Phi(t)| \leq \rho M \max_{t \in [t_0, L]} |\Phi(t)|,$$

o sea C es uniformemente acotado sobre $[t_0, L]$.

Por lo tanto, dada cualquier sucesión $\{x_n\}_n$ en C , podemos aplicar el teorema de Arzela-Ascoli sobre $[t_0, t_0 + 1]$, para obtener una subsucesión que converga uniformemente a cierta función sobre $[t_0, t_0 + 1]$. En seguida, a esta subsucesión obtenida, se le aplica Arzela-Ascoli, para obtener una subsucesión, que converga uniformemente a cierta función sobre $[t_0, t_0 + 2]$. Continuando con este procedimiento, obtenemos una subsucesión de $\{x_n\}_n$ que converge a una función x , uniformemente sobre compactos. Por (3), x pertenece a C . Esto prueba que C es secuencialmente compacto, o equivalentemente, compacto.

Esto termina la demostración.

En el caso $b = \infty$, no es necesario que Φ sea acotada y se establece el siguiente corolario.

Corolario 1. Supongamos que para $\rho > 0$, $\lambda_\rho \in L_1(I)$.

- i) Entonces, para cada $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| < \rho$ y $t_0 \geq 0$ que satisfagan $|\xi| + 3\rho \int_{t_0}^{\infty} \lambda_\rho(s) ds \leq \rho$, existe una solución x de (1) definida para $t \geq t_0$, que satisface $|\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho$ para $t \geq t_0$ y la formula asintótica

$$(4) \quad x(t) = \Phi(t) \left[\xi + O \left(\int_t^{\infty} \lambda_\rho(s) ds \right) \right], \quad t \rightarrow \infty.$$

- ii) Para cualquier solución x de (1) definida para $t \geq s_0$, que satisfaga $|\Phi^{-1}(t)x(t)| \leq \rho$ para $t \geq s_0$, existe $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| \leq \rho$ tal que se verifica (4).

3. Ejemplos

1. Sea $\gamma(t) = |A(t)| \cdot \|A_t\| \cdot |\Phi^{-1}(t)| \cdot \|\Phi_t\|_2$ y supongamos $\gamma \in L_1(I)$. Entonces, el Teorema 1 es cierto cualquiera sea el comportamiento acotado del retardo $r = r(t, x)$.

Así, consideremos la ecuación

$$(5) \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{t+1} x(t - r(t, x(t))),$$

donde $r : I \times \mathbf{R} \rightarrow [0, \tau]$ es cualquiera.

Se tiene $\Phi(t) = t + 1$, $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{t+1}$, $\|\Phi_t\|_2 = t + 1$, y

$$\|A_t\| = \begin{cases} \frac{1}{t - \tau + 1} & \text{si } t \geq \tau \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$(6) \quad \begin{aligned} \gamma(t) &= |A(t)| \|\Phi^{-1}(t)\| \|\Phi_t\|_2 \\ &= \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t-\tau+1} \cdot \frac{1}{t+1} (t+1) = \frac{1}{(t+1)(t-\tau+1)} \end{aligned}$$

si $t \geq \tau$, y claramente $\gamma \in L_1(I)$.

Aplicando el corolario: Como $\lambda_\rho \in L_1(I)$, para todo $\rho > 0$,

- i) Dado cualquier ξ en $\mathbf{R}$ sea $\rho > 0$ tal que $|\xi| < \rho$ y $t_0 \geq 0$, de manera que $|\xi| + 3\rho \int_{t_0}^{\infty} \lambda_\rho(s) ds \leq \rho$. Entonces existe solución x de (5) definida para $t \geq t_0$ que verifica $|x(t)| \leq \rho(t+1)$ y

$$x(t) = (t+1)(\xi + 0(\int_t^\infty \lambda_\rho(s)ds)), \quad t \rightarrow \infty$$

Notemos que por (6) $|\lambda_\rho(t)| \leq M \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, para cierta constante M .

Esto nos permite escribir:

$$(7) \quad x(t) = (t+1)(\xi + 0(\frac{1}{t})), \quad t \rightarrow \infty$$

ii) Cualquier solución x de (5) definida para $t \geq s_0$, que satisfaga $|x(t)| \leq \rho(t+1)$ para $t \geq s_0$, tiene la siguiente expresión asintótica (7) para algún $|\xi| \leq \rho$.

2. Dada la ecuación $\dot{x}(t) = A(t)x(t-r(t))$, donde $r: I \rightarrow [0, \tau]$, supongamos que $\gamma(t) \cdot r(t)$, (donde $\gamma(t)$ fue definida en ejemplo 1) está en $L_1(I)$. Entonces, el corolario es aplicable.

Veamos la siguiente ecuación:

$$(8) \quad \dot{x}(t) = tx(t - \frac{1}{(t+1)^\alpha}), \quad \text{con } \alpha > 3$$

Aquí $A(t) = t$, $\Phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, $\|\Phi_t\|_2 = e^{\frac{t^2}{2}}$, $\|A_t\| = t$ y $|\Phi^{-1}(t)| = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Por lo tanto, $\lambda_\rho(t) = t \cdot t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{(t+1)^\alpha} = \frac{t^2}{(t+1)^\alpha}$.

Luego, aplicando corolario, parte (i):

Para cualquier $\xi \in \mathbf{R}$, sea $\rho > 0$ con $|\xi| < \rho$. Escogemos $t_0 \geq 0$ suficientemente grande, de modo que $|\xi| + 3\rho \int_{t_0}^\infty \lambda_\rho(s)ds \leq \rho$. Entonces, existe solución x de (7), definida para $t \geq t_0$, que satisface $|x(t)| \leq \rho e^{\frac{t^2}{2}}$, para $t \geq t_0$ y

$$(9) \quad x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} [\xi + 0(\int_t^\infty \lambda_\rho(s)ds)], \quad t \rightarrow \infty$$

y de la parte (ii): Toda solución x de (7) definida para $t \geq s_0$, que satisfaga $|x(t)| \leq \rho e^{\frac{t^2}{2}}$ para $t \geq s_0$, para algún $\rho > 0$, satisface (8), para algún $\xi \in \mathbf{R}$, $|\xi| \leq \rho$.

3. Consideremos ahora la ecuación (1), suponiendo $r(t, z) \leq Kr_1(t)$ para $t \geq 0$, donde K es alguna constante positiva y supongamos $\gamma \cdot r_1 \in L_1(I)$.

Entonces nuestros resultados se aplican.

Veamos la ecuación

$$(10) \quad \dot{x}(t) = x \left(t - \frac{1}{(1 + tx(t)^2)(t+1)^2} \right)$$

Aquí $A(t) = 1$ y $r : I \times \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$.

$$r(t, z) = \frac{1}{(1 + tx(t)^2)(t+1)^2}$$

Se cumple $r(t, z) \leq r_1(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$ y

$$\gamma(t)r_1(t) = |A(t)| |A_t| |\Phi^{-1}(t)| |\Phi_t|_2 \cdot \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2}$$

esta en $L_1(I)$.

Por corolario, (ii): Para cualquier solución x de (10) definida para $t \geq s_0 \geq 0$ que satisfaga $|x(t)| \leq \rho e^t$ para $t \geq s_0$, existe ξ en $\mathbf{R}$, $|\xi| \leq \rho$ tal que

$$x(t) = e^t [\xi + 0(\int_t^\infty \frac{ds}{(1+s)^2})], \quad t \rightarrow \infty$$

o bien

$$(11) \quad x(t) = e^t [\xi + 0(\frac{1}{1+t})], \quad t \rightarrow \infty$$

Por (i): Dado cualquier ξ en $\mathbf{R}$ y $\rho > 0$ tal que $|\xi| < \rho$, escogiendo $t_0 \geq 0$ de manera que $|\xi| + 3\rho \int_{t_0}^{\infty} \lambda_\rho(s) ds \leq \rho$, existe x solución de (10) definida sobre $[t_0, +\infty)$ que satisface $|x(t)| \leq \rho e^t$ y la fórmula (11).

4. Conviene destacar que si la condición $\lambda_1 \in L_1(I)$ no se cumple, no necesariamente cualquier solución x de (1) satisface $x(t) = \Phi(t)[\xi + o(1)]$, $t \rightarrow \infty$. En efecto, basta considerar la ecuación

$$(12) \quad \dot{x}(t) = -x(t - \frac{\pi}{2})$$

En este caso $A(t) = -1$ y por lo tanto

$$\Phi(t) = e^{-t} \text{ y } \|\Phi_t\|_2 = e^{-(t-2 \cdot \frac{\pi}{2})} = e^\pi \cdot e^{-t} \text{ si } t \geq \pi$$

Luego

$$\lambda_\rho(t) = |A(t)| \cdot \|A_t\| \|\Phi^{-1}(t)\| \cdot \|\Phi_t\|_2 \cdot m_\rho(t) = e^\pi \cdot \frac{\pi}{2} \notin L_1(I).$$

Por otra parte $x(t) = \text{sent}$ es solución de (12) y

$$\Phi^{-1}(t)x(t) = e^t \text{sent}$$

no es acotada.

5. Consideremos la ecuación

$$(13) \quad \dot{x}(t) = Ax(t - r(t, x(t))),$$

donde A es una matriz $n \times n$ constante con valores propios no nulos con parte real cero y simples. Si $m_i \in L_1(I)$, entonces, nuestros resultados son aplicables.

En efecto, bajo estas condiciones $\Phi(t)$ y $\Phi^{-1}(t)$ son acotados, es decir, existe constante K tal que $|\Phi(t)| \leq K$ y $|\Phi^{-1}(t)| \leq K$. Luego

$$\lambda_i(t) = |A(t)| \|A_t\| \|\Phi_t\|_2 |\Phi^{-1}(t)| \cdot m_i(t)$$

satisface:

$$|\lambda_i(t)| \leq |A|^2 K^2 \cdot m_i(t).$$

Por lo tanto $\lambda_i \in L^1(I)$.

Apliquemos por ejemplo el teorema:

- i) Dado $0 < \rho \leq \frac{b}{\|\Phi\|_\infty}$ y ξ en $\mathbf{R}$ tal que $|\xi| < \rho$, escogemos $t_0 \geq 0$ de manera que $|\xi| + 3\rho \int_{t_0}^\infty \lambda_b(s) ds \leq \rho$. Entonces existe solución x de (13) definida sobre $[t_0, +\infty)$, que verifica

$$(14) \quad x(t) = e^{tA} [\xi + 0(\int_t^\infty \lambda_b(s) ds)], \quad t \rightarrow \infty$$

- ii) Para cualquier solución x de (13) que satisface $|e^{-tA} x(t)| \leq \rho$, existe ξ en $\mathbf{R}^n$, $|\xi| \leq \rho$ tal que se verifica (14).

REFERENCIAS

- [1] Cooke, K.: Functional differential equations close to differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72**, 285-288, 1966.
- [2] Cooke, K.: Functional differential equations with asymptotically vanishing lag, *Rend. Circ. Mat. Palermo XVI*, 39-56, 1967.
- [3] Cooke, K.: Asymptotic theory for the delay-differential equations $u'(t) = -au(t - r(u(t)))$, *J. Math. Anal. Appl.* **19**, 160-173, 1967.
- [4] Donoso, A.; Pinto, M.: Asymptotic behavior of solution of $x'(t) = A(t)x(t - r(t))$, *Pre-print University of Chile*, 1992.
- [5] Gallardo, J.; Pinto, M.: Asymptotic integration of delay-differential systems with time and state dependent, *Submitted*.
- [6] Hale, J.: Functional differential equations, *Springer-Verlag*, 1977.

- [7] Pinto, M.: Asymptotic integration of the functional differential equations, $y'(t) = a(t)y(t - r(t, y))$, *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, To appear.
- [8] Pinto, M.: Green-Liouville formulac for second order delay differential equations, *Submitted*,
- [9] Pinto, M.: Uniform asymptotic stability of solutions of $y'(t) = f(t, y(t - r(t)))$, *Submitted*,
- [10] Pinto, M.: Functional differential equations close to ordinary differential equations, *Submitted*,
- [11] Pinto, M.: Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equations $x'(t) = a(t)x(r(t)) + bx(t)$, $b \in \mathbf{R}$, *Proyecciones* , Vol 10, 59-76, 1991.

Julio Gallardo P.
Departamento de Matemática
Universidad de La Frontera
Casilla 54-D, Temuco, Chile

Manuel Pinto
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Casilla 653, Santiago, Chile