Proyecciones

Vol. 12 N° 1, pp.21-33 Junio 1993

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

**AUTO-ACCESIBILIDAD EN SISTEMAS DE CONTROL
SINGULARES***

HERNAN HENRIQUEZ M.

Universidad de Santiago, Santiago, Chile.

GENARO CASTILLO G.

Universidad de Talca, Talca, Chile.

Resumen

En este trabajo se presenta un concepto de auto-accesibilidad para sistemas de control lineales singulares y se caracterizan los sistemas auto-accesibles en término de sus parámetros. Además se relaciona la auto-accesibilidad con la estabilidad del sistema y se establece una propiedad geométrica de las trayectorias de auto-accesibilidad.

---

* Trabajo parcialmente financiado por Proyecto FONDECYT 92-185 y DICYT. Proyecto 04-9133HM.

1. Introducción.

En este trabajo consideraremos sistemas de control lineales descritos por la ecuación

$$(1) \quad E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ representan el estado y control, respectivamente. $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices constantes. El sistema se denomina normal cuando la matriz E es no singular y singular en caso contrario. La solubilidad de la ecuación (1) depende del par (E, A) . Este se llama regular cuando $\det(\lambda E - A)$ no es idénticamente igual a cero. En este caso el sistema (1) puede descomponerse, mediante una transformación de coordenadas, en dos subsistemas:

$$(2) \quad \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t)$$

$$(3) \quad N \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t)$$

denominados sub-sistema lento y sub-sistema rápido, respectivamente. En estas ecuaciones $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$ y N es una matriz nilpotente de índice h . Como el sub-sistema lento es un sistema normal, su solución se expresa mediante la fórmula de variación de constantes

$$x_1(t) = e^{A_1 t} x_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-s)} B_1 u(s) ds.$$

mientras que la solución del sub-sistema rápido se obtiene por la fórmula

$$x_2(t) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t).$$

donde $u^{(i)}(t)$ denota la i -ésima derivada del control u . Por este motivo restringiremos el espacio de controles al conjunto C_p^{h-1} formado por las funciones $u(\cdot)$ que son seccionalmente de clase $h-1$. En el desarrollo que sigue usaremos la notación

$$\langle A, B \rangle = \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B].$$

A continuación consideraremos un sistema de control singular regular representado en su forma estándar por las ecuaciones (2)-(3). Por este motivo el vector de estado $x(t)$ se identifica con el par $(x_1(t), x_2(t))$.

Definición 1. Un vector $w \in \mathbb{R}^n$ se dice alcanzable si existe una condición inicial $x_1(0)$, un control admisible $u(\cdot) \in C_p^{h-1}$ y $t_1 > 0$ tal que $x(t_1) = (x_1(t_1), x_2(t_1)) = w$.

El conjunto

$$R(x_1(0)) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \text{existen } t_1 > 0 \text{ y } u(\cdot) \in C_p^{h-1} \text{ tal que } x(t_1) = w\}$$

se llama conjunto de alcanzabilidad desde la condición inicial $x_1(0)$. Ha sido demostrado en [3] que

$$R(0) = \langle A_1, B_1 \rangle \oplus \langle N, B_2 \rangle$$

Llamaremos conjunto de accesibilidad a

$$R := \bigcup_{x_1(0) \in \mathbb{R}^{n_1}} R(x_1(0)) = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \langle N, B_2 \rangle$$

La controlabilidad de un sistema singular se define de la misma forma que para los sistemas lineales normales.

Definición 2. El sistema (1) se dice controlable si para todo $t_1 > 0$, y todo par de vectores $x(0) \in \mathbb{R}^n$ y $w \in \mathbb{R}^n$ existe $u(\cdot) \in C_p^{h-1}$ tal que $x(t_1) = w$.

El siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [3], caracteriza la controlabilidad de sistemas singulares.

Teorema 1. Todo sistema singular regular verifica las siguientes propiedades

- (i) El sub-sistema lento es controlable si, y solamente si,

$$\text{rang}[\lambda E - A, B] = n, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}$$

- (ii) Las siguientes condiciones son equivalentes

(a) El sub-sistema rápido es controlable.

(b) $\text{rang}[B_2, NB_2, \dots, N^{h-1}B_2] = n_2$.

(c) $\text{rang}[N, B_2] = n_2$

(d) $\text{rang}[E, B] = n$

(iii) Las siguientes condiciones son equivalentes :

- (a) El sistema (1) es controlable.
- (b) Los sub-sistemas lento y rápido son controlables.
- (c) $\text{rang}[B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1] = n_1$ y $\text{rang}[B_2, N B_2, \dots, N^{h-1} B_2] = n_2$.
- (d) $\text{rang}[\lambda E - A, B] = n$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, y $\text{rang}[E, B] = n$.

Definición 3. El sistema singular (1) se dice R -controlable si los estados en R son controlables .

Se deduce de los resultados precedentes la siguiente caracterización de la R -controlabilidad.

Teorema 2. Las siguientes condiciones son equivalentes :

- (a) El sistema (1) es R -controlable.
- (b) El sub-sistema lento es controlable.
- (c) $\text{rang}[\lambda E - A, B] = n$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (d) $\text{rang}[B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1] = n_1$.

2. Auto-accesibilidad de sistemas singulares.

En esta sección seguimos considerando un sistema de control singular regular descrito por la ecuación (1) y representado en su forma estandar por las ecuaciones (2)-(3).

Cuando un sistema ha sido controlado, esto es, ha sido posicionado en un estado deseado, nos interesa mantenerlo en ese estado. Normalmente esto es imposible debido a las perturbaciones que actúan sobre él. Si el sistema es sacado de su estado, la controlabilidad nos garantiza la posibilidad de volverlo al estado inicial, sin embargo esto puede obtenerse también si el sistema tiene una propiedad más débil que la controlabilidad, la que se denomina auto-accesibilidad. Este concepto fue introducido por A. Bacciotti en [1] y posteriormente estudiado por Barbanti [2] para sistemas descritos por ecuaciones integrales y por Henríquez [4] para sistemas lineales distribuidos. A continuación introduciremos un concepto de auto-accesibilidad para sistemas singulares, con el cual podremos extender a este contexto los resultados obtenidos anteriormente en [4] y [5].

Defici3n 4. Un vector $w \in \mathbb{R}^n$ se dice auto-accesible en $[0, t_1]$ si existe $u(\cdot) \in C_p^{h-1}$ tal que $x(0) = x(t_1) = w$. Diremos tambi3n que w es auto-accesible si lo es en el intervalo $[0, t_1]$, para todo $t_1 > 0$.

Defici3n 5. El sistema de control (1) se llama auto-accesible (respectivamente, en $[0, t_1]$) si todo estado $w \in \mathbb{R}^n$ es auto-accesible (respectivamente, en $[0, t_1]$).

De acuerdo a estas definiciones, la propiedad de auto-accesibilidad representa la capacidad del sistema de retornar a un estado inicial. El siguiente teorema caracteriza los estados auto-accesibles.

Lema 1. Para cualquier conjunto de vectores $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, h-1$, y todo par de n3meros t_1, t_2 distintos, existe un polinomio vectorial f , con valores en $\mathbb{R}^n$ y grado menor o igual a $2h-1$, tal que $f^{(i)}(t_1) = x_i$ y $f^{(i)}(t_2) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, h-1$.

Demostraci3n. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y sean z_i , $i = 0, 1, \dots, h-1$, vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un polinomio g de grado $h-1$ tal que $g^{(i)}(t_0) = z_i$. Si definimos el polinomio f en la forma

$$f(t) = (t - t_1)^h g_2(t) + (t - t_2)^h g_1(t),$$

usando la idea anterior podemos determinar g_1 y g_2 de modo que f verifique las condiciones del enunciado.

Teorema 3. Un vector $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^n$ es auto-accesible si, y solamente si, $A_1 w_1 \in \langle A_1, B_1 \rangle$ y $w_2 \in \langle N, B_2 \rangle$.

Demostraci3n. Si w es auto-accesible entonces para cada tiempo $t > 0$ existe un control $u(\cdot)$ para el cual la soluci3n $x(t)$ de la ecuaci3n (2) verifica la relaci3n

$$w_1 = x_1(t) = e^{A_1 t} w_1 + \int_0^t e^{A_1(t-s)} B_1 u(s) ds$$

luego

$$w_1 - e^{A_1 t} w_1 = \int_0^t e^{A_1(t-s)} B_1 u(s) ds \in \langle A_1, B_1 \rangle$$

y en consecuencia

$$-A_1 \int_0^t e^{A_1 s} w_1 ds = \int_0^t e^{A_1(t-s)} B_1 u(s) ds \in \langle A_1, B_1 \rangle$$

Definiendo la matriz $M := -\int_0^t e^{A_1 s} ds$ entonces es bien conocido que M es invertible para $0 < t < \epsilon$, para cierto $\epsilon > 0$ y que el espacio $\langle A_1, B_1 \rangle$ es invariante para M . Como $A_1 M w_1 \in \langle A_1, B_1 \rangle$ entonces $A_1 w_1 \in M^{-1} \langle A_1, B_1 \rangle \subseteq \langle A_1, B_1 \rangle$.

Por otra parte, como

$$w_2 = x_2(t) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \in \langle N, B_2 \rangle$$

obtenemos la afirmación.

Recíprocamente si $A_1 w_1 \in \langle A_1, B_1 \rangle$ y $w_2 \in \langle N, B_2 \rangle$ entonces, para cada $t_1 > 0$ podemos afirmar que

$$w_1 - e^{A_1 t_1} w_1 = A_1 M w_1 \in M \langle A_1, B_1 \rangle \subseteq \langle A_1, B_1 \rangle$$

Modificando levemente la demostración del teorema 2-1.1 de [3], por el uso del lema precedente en lugar del lema 2-1.2 utilizado en [3], podemos afirmar que el vector $(w_1 - e^{A_1 t_1} w_1, w_2)$ es alcanzable desde $(0, w_2)$ y, en consecuencia, existe un control $u(\cdot) \in C_p^{h-1}$ tal que la respectiva solución $x(\cdot)$ satisface $x(0) = 0$ y

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 - e^{A_1 t_1} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} e^{A_1(t_1-s)} B_1 u(s) ds \\ - \sum_{i=1}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t_1) \end{bmatrix}$$

Resulta de lo anterior que

$$w_1 = e^{A_1 t_1} w_1 + \int_0^{t_1} e^{A_1(t_1-s)} B_1 u(s) ds$$

y

$$w_2 = - \sum_{i=1}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t_1),$$

lo cual muestra que el vector $w = (w_1, w_2)$ es auto-accesible en el intervalo $[0, t_1]$.

Podemos ahora establecer el siguiente resultado.

Corolario 1. Considere las siguientes afirmaciones .

- (a) El sistema (1) es auto-accesible.
- (b) El espacio $\text{Im}(A_1) \subseteq \langle A_1, B_1 \rangle$ y $\mathbb{R}^{n_2} = \langle N, B_2 \rangle$.
- (c) El sub-sistema lento es auto-accesible y el sub-sistema rápido es controlable.
- (d) $\text{rang}[\lambda E - A, B] = n$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ y $\text{rang}[E, B] = n$.

Entonces $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d)$.

Demostración. La equivalencia de las condiciones (a), (b) y (c) es consecuencia inmediata del teorema precedente. Para demostrar que cualquiera de estas condiciones implica (d) introduciremos algunas notaciones. Sea Y_1 el subespacio de $\mathbb{R}^{n_1}$ formado por los vectores x_1 tal que $A^i x_1 = 0$, para algún $i \geq 1$. Es bien conocido que existe un número natural k tal que, si $Y_2 := \text{Im}(A_1^k)$, entonces $\mathbb{R}^{n_1} = Y_1 \oplus Y_2$. Si denotamos por $y_i := \pi_i(x_1)$, $i = 1, 2$, las componentes de x_1 en Y_i , respectivamente, entonces el subsistema lento se descompone a su vez en dos subsistemas

$$(4) \quad \dot{y}_1(t) = A_{11}y_1(t) + B_{11}u(t),$$

$$(5) \quad \dot{y}_2(t) = A_{12}y_2(t) + B_{12}u(t),$$

donde A_{1i} indica la restricción de A_1 a Y_i y $B_{1i} := \pi_i B_1$, $i = 1, 2$. Usaremos también la notación n_{1i} para la dimensión de Y_i , de modo que $n_1 = n_{11} + n_{12}$. En consecuencia, escogiendo bases adecuadas, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \text{rang}[\lambda E - A, B] &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & \lambda N - I_{n_2} & B_2 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n_{11}} - A_{11} & 0 & 0 & B_{11} \\ 0 & \lambda I_{n_{12}} - A_{12} & 0 & B_{12} \\ 0 & 0 & \lambda N - I_{n_2} & B_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si suponemos que el sistema (1) es auto-accesible, entonces $\text{Im}(A_1) \subseteq \langle A_1, B_1 \rangle$. Resulta de esto que $\text{Im}(A_{12}) \subseteq \langle A_{12}, B_{12} \rangle$ y como A_{12} es un isomorfismo entonces el sistema (5) es controlable y por el criterio de Hautus ([6]) podemos afirmar que $\text{rang}[\lambda I_{n_{12}} - A_{12}, B_{12}] = n_{12}$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por otra parte como el único valor propio posible de A_{11} es 0, entonces $\text{rang}[\lambda I_{n_{11}} - A_{11}] = n_{11}$, todo $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$. En consecuencia $\text{rang}[\lambda E - A, B] = n$, para todo $\lambda \neq 0$. Se completa la demostración observando que la controlabilidad del sistema rápido implica que $\text{rang}[E, B] = n$.

Es fácil construir ejemplos para verificar que las condición (d) no implica (a). No obstante, si se verifica (d) y además $A_1(Y_1) \subseteq \langle A_1, B_1 \rangle$, entonces el sistema (1) es auto-accesible. La situación anterior se presenta, por ejemplo, cuando $Y_1 = \text{Ker} A$, lo que es equivalente a que la multiplicidad algebraica del valor propio 0 de A sea menor o igual a 1.

El siguiente corolario justifica las afirmaciones efectuadas al inicio de esta sección sobre la propiedad de auto-accesibilidad.

Corolario 2. Sean $0 < t_1 < t_2$. Si w es un estado auto- accesible del sistema (1) y $z = x(t_1)$, siendo $x(\cdot)$ la trayectoria correspondiente a un control admisible $u(\cdot)$ con condición inicial $x(0) = w$, entonces existe un control admisible $v(\cdot)$ definido en $[t_1, t_2]$ tal que la trayectoria correspondiente satisface las condiciones $y(t_1) = z$ y $y(t_2) = w$.

Demostración. Supongamos que $w = (w_1, w_2)$ y que $z = (z_1, z_2)$. Entonces

$$z_1 = e^{A_1 t_1} w_1 + \int_0^{t_1} e^{A_1(t_1-s)} B_1 u(s) ds.$$

Como $A_1 w_1 \in \langle A_1, B_1 \rangle$ de las propiedades de invarianza de este espacio se deduce que $w_1 - e^{A_1(t_2-t_1)} z_1 \in \langle A_1, B_1 \rangle$. Además tanto w_2 como z_2 pertenecen a $\langle N, B_2 \rangle$. De las propiedades de controlabilidad de estos espacios se deduce la existencia de un control $v_1(\cdot)$ definido en el intervalo $[0, t_2 - t_1]$ tal que la trayectoria $\tilde{y}(\cdot)$ correspondiente al control v_1 , satisface las condiciones $\tilde{y}(0) = (0, z_2)$ y $\tilde{y}(t_2 - t_1) = (w_1 - e^{A_1(t_2-t_1)} z_1, w_2)$. Si definimos el control $v(\cdot)$ por la expresión $v(s) := v_1(s - t_1)$ para $s \in [t_1, t_2]$, es fácil verificar que la trayectoria $y(\cdot)$ correspondiente a $v(\cdot)$ y con condición inicial $y(t_1) = z$ satisface las condiciones afirmadas.

Definición 6. Diremos que el sistema (1) es R-auto-accesible si todo vector $w \in R$ es auto-accesible.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior

Corolario 3. Considere las siguientes condiciones :

- (a) El sistema (1) es R-auto-accesible.
- (b) El sistema lento es auto-accesible.
- (c) $\text{Im}(A_1) \subseteq \langle A_1, B_1 \rangle$.
- (d) $\text{rang}[\lambda E - A, B] = n$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$.

Entonces $(a) \leftrightarrow (b) \leftrightarrow (c) \rightarrow (d)$.

Un problema fundamental en teoría de control es el relativo a la estabilizabilidad del sistema. A continuación estudiaremos algunas relaciones entre auto-accesibilidad y estabilidad. Si denotamos por $\sigma(E, A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda E - A) = 0\}$ el espectro del par (A, E) entonces [3] el sistema (1) es estable si, y solamente si, $\sigma(E, A) \subseteq \mathbb{C}^-$, donde $\mathbb{C}^- := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) < 0\}$. Por otra parte, el sistema (1) se llama estabilizable si existe una realimentación del tipo $u = Fx + v$ tal que

el sistema

$$(6) \quad E\dot{x}(t) = (A + B F)x(t) + Bv(t)$$

es estable (esto incluye la condición de regularidad).

Del teorema 3.1-2 en [3] se obtiene la siguiente propiedad.

Proposición 1. Si el sistema (1) es auto-accesible entonces el sistema (3)-(5) es estabilizable.

Demostración. Es suficiente observar que el sistema formado por las ecuaciones (3) y (5) es controlable.

La auto-accesibilidad junto a la estabilidad nos ofrecen también un criterio de controlabilidad.

Proposición 2. Si el sistema (1) es auto-accesible (respectivamente, R-auto-accesible) y estabilizable entonces (1) es controlable (resp., R-controlable).

Demostración. Existe una matriz F tal que $\sigma(E, A + B F) \subseteq \mathbb{C}^-$. Además, como

$$\text{rang}[\lambda E - A - B F, B] = \text{rang}[\lambda E - A, B], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

entonces $\text{rang}[\lambda E - A, B] = n$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. La afirmación es ahora consecuencia del teorema 1-(iii) y del Corolario 3.

Por otra parte, es claro de la representación estandard del sistema (1) que $\text{rang}(E) = n_1 + \text{rang}(N)$. A continuación siempre supondremos que $n_{11} \geq 1$.

Teorema 4. Si el sistema (1) es auto-accesible, entonces para cualquier conjunto simétrico $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ con $\text{rang}(E) - n_{11}$ elementos, existe una matriz F tal que el sistema (6) tiene espectro $\sigma(E, A + B F) = \Lambda \cup \{0\}$.

Demostración. Procediendo como en la demostración del Corolario 1, el sistema (1) se puede descomponer en tres subsistemas con ecuaciones (3), (4), (5). El sub-sistema descrito por (5)-(3) es un sistema singular en el espacio de estado $X = Y_2 \oplus \mathbb{R}^{n_2}$, determinado por las matrices

$$E' = \begin{bmatrix} I_{n_{12}} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \text{ y } A' = \begin{bmatrix} A_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Por nuestros resultados previos este sistema es controlable y por el teorema 3-3.2 en [3], existe una aplicación lineal $K : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\sigma(E', A' + B K) = \Lambda$.

Si definimos $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $F(y_1 + y_2 + x_2) = K(y_2 + x_2)$ entonces $\sigma(E, A + B F) = \Lambda \cup \{0\}$.

De manera similar, utilizando el teorema 3-3.4 de [3] en lugar del teorema 3-3.2, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5. Sea Λ un subconjunto simétrico de $\mathbb{C}$ con $n - n_{11}$ elementos. Si el sistema (1) es auto-accesible, entonces existen matrices F_1 y F_2 tal que $\sigma(E + B F_2, A + B F_1) = \Lambda \cup \{0\}$.

3. Una propiedad geométrica de las trayectorias de auto-accesibilidad

Sea $t_1 > 0$ y $u(\cdot)$ un control admisible definido en el intervalo $[0, t_1]$. Diremos que la trayectoria $x(\cdot)$ correspondiente al control $u(\cdot)$ es una trayectoria de auto-accesibilidad si $x(0) = x(t_1)$. En la sección anterior hemos establecido que un sistema singular puede retornar a sus estados auto-accesibles. En esta sección mostraremos que las trayectorias de auto-accesibilidad de un estado auto-accesible no pueden escogerse arbitrariamente pequeñas.

Definición 7. Diremos que un vector (x_1, x_2) es un estado de equilibrio del sistema singular en la forma estandar (2)-(3) si existe un vector $u \in \mathbb{R}^m$ tal que $A_1 x_1 + B_1 u = 0$ y $x_2 + B_2 u = 0$.

El conjunto S formado por los estados de equilibrio es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$. Si $x = (x_1, x_2)$ es un estado de equilibrio, entonces escogiendo el control constante $u(t) = u$, la trayectoria correspondiente permanece estacionaria en x .

A continuación mostraremos que la integral de una trayectoria de auto-accesibilidad es un estado de equilibrio.

Proposición 3. Si $x(\cdot)$ es una trayectoria de auto-accesibilidad del sistema singular (2)-(3) en el intervalo $[0, t_1]$, entonces el estado

$$y = \int_0^{t_1} x(s) ds$$

pertenece a S .

Demostración. Como $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es una trayectoria de auto-accesibilidad del sistema (2)-(3), entonces existe un control $u(\cdot) \in C_p^{h-1}$ definido en $[0, t_1]$ tal que

$$x_1(t) = e^{A_1 t} w_1 + \int_0^t e^{A_1(t-s)} B_1 u(s) ds$$

y

$$x_2(t) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t),$$

para todo $0 \leq t \leq t_1$ y donde $x(0) = x(t_1) = w = (w_1, w_2)$. Considerando que $x_1(t)$ es la trayectoria de un sistema normal, por los resultados establecidos en [5], podemos afirmar que

$$A_1 \int_0^{t_1} x_1(t) dt = -B_1 \int_0^{t_1} u(t) dt.$$

Por otra parte, de la expresión para $x_2(t)$ y del hecho que $N^h = 0$ deducimos

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} x_2(t) dt &= - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 \int_0^{t_1} u^{(i)}(t) dt \\ &= -B_2 \int_0^{t_1} u(t) dt - N \left[\sum_{i=1}^{h-1} N^{i-1} B_2 \left(u^{(i-1)}(t_1) - u^{(i-1)}(0) \right) \right] \\ &= -B_2 \int_0^{t_1} u(t) dt, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración.

Para establecer nuestro próximo resultado introduciremos previamente algunas notaciones. Hemos mencionado anteriormente que existen transformaciones de coordenadas P y Q que permiten descomponer el sistema (1) en los subsistemas (2) y (3). Supongamos que P es la matriz que efectúa la transformación $x = P(x_1, x_2)$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $\rho(x)$ a la distancia de (x_1, x_2) al subespacio S , definida por

$$\rho(x) := d((x_1, x_2), S) := \inf \{ \| (x_1, x_2) - y \| : y \in S \},$$

siendo $\| \cdot \|$ una norma en $\mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$.

Téorema 6. Si w es un estado auto-accesible en $[0, t_1]$ del sistema (1) y $x(\cdot)$ es una trayectoria admisible tal que $x(0) = x(t_1) = w$, entonces

$$\max \{ \| w - x(t) \| : 0 \leq t \leq t_1 \} \geq \frac{1}{\| P^{-1} \|} \rho(w).$$

Demostración. Definamos el vector $y = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} (x_1(t), x_2(t)) dt$. Por la proposición anterior sabemos que $y \in S$ y como y también pertenece a la adherencia de la envolvente convexa de la imagen de la función $(x_1(\cdot), x_2(\cdot))$, entonces podemos establecer las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} d((w_1, w_2), S) &\leq \|(w_1, w_2) - y\| \\ &\leq \sup\{ \|(w_1, w_2) - z\| : z \in \overline{c(Im(x_1(\cdot), x_2(\cdot)))} \} \\ &= \max\{ \|(w_1, w_2) - (x_1(t), x_2(t))\| : 0 \leq t \leq t_1 \}. \end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \|x(t) - w\| &= \|P[(x_1(t), x_2(t)) - (w_1, w_2)]\| \\ &\geq \frac{1}{\|P^{-1}\|} \|(x_1(t), x_2(t)) - (w_1, w_2)\| \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq t_1} \|x(t) - w\| &\geq \frac{1}{\|P^{-1}\|} d((w_1, w_2), S) \\ &= \frac{1}{\|P^{-1}\|} \rho(w). \end{aligned}$$

REFERENCIAS

- [1] Bacciotti, A.: Auto-accésibilit par familles symtriques de champs de vecteurs. *Ricerche di Automatica*, 7(1976), 189-197.
- [2] Barbanti, L.: Linear Volterra-Stieltjes integral equations and control. *Proc. Equadiff 82*, Wurtzburg, 1982.
- [3] Dai, L.: Singular control systems. *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, 118, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [4] Henrquez, H.: Auto-accsibilidade de sistemas de controle lineares em espaos de Banach. *Anais do 1 Congresso Latino-Americano de Automtica, Campina Grande, Brasil*, Vol. 3(1984), 860-865.
- [5] Henrquez, H.; Rodrguez, A.; Castillo, G.: A geometric property of control systems with state in a Banach space. *Systems and Control Letters*, 8(1987), 225-229.
- [6] Kailath, T.: *Linear Systems* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

Recibido: 20 Noviembre de 1992.

Hernán Henríquez M.
Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación
Universidad de Santiago de Chile
Casilla 5659, Correo 2, Santiago, Chile

Genaro Castillo G.
Departamento de Matemática
Universidad de Talca
Campus Lircay, Talca, Chile