ALGUNAS ALGEBRAS DE BERNSTEIN*

MICHAEL NEUBURG Y AVELINO SUAZO
Universidad de La Serena, La Serena, Chile.

Abstract

Sea (A, ω) una álgebra ponderada sobre un cuerpo K con $\text{caract}(K) \neq 2$. Se dice que A es una K -álgebra de Bernstein si la identidad $(x^2)^2 = \omega^2(x)x^2$ es válida en A . Es sabido que con respecto a un idempotente no nulo e , A se puede descomponer en una suma directa de subespacios $A = Ke \oplus U \oplus V$. En este trabajo se encuentran subespacios de A cuya dimensión no dependen de la elección del idempotente no nulo e , lo cual permite construir álgebras de Bernstein no isomorfas de dimensión $n + 1$.

* Financiado por la Dirección de Investigación-Universidad de La Serena y por FONDECYT N° 0165-91, Chile.

1. Introducción

En lo que sigue K es un cuerpo infinito de característica distinta de 2 y A es una K -álgebra conmutativa de dimensión finita.

Si $\omega : A \longrightarrow K$ es un homomorfismo no nulo de K -álgebras, entonces el par ordenado (A, ω) es llamado una álgebra ponderada. Una álgebra de Bernstein es una álgebra ponderada (A, ω) tal que la identidad $(x^2)^2 = \omega^2(x)x^2$ es válida en A . Esta definición fue introducida por P. Holgate [3], quien modeló en términos algebraicos un problema de genética de poblaciones.

Es sabido que en estas álgebras el homomorfismo es únicamente determinado y que el conjunto de idempotentes viene dado por $I_p(A) = \{x^2/x \in A, \omega(x) = 1\}$. Con respecto a un idempotente no nulo e , A se puede descomponer en la suma directa de subespacios vectoriales $A = Ke \oplus U \oplus V$ donde $U = \{x \in Ker\omega/ex = \frac{1}{2}x\}$, $V = \{y \in Ker\omega/ey = 0\}$ y $Ker\omega = U \oplus V$. Ver [6] para información.

Las siguientes identidades son válidas en cualquier álgebras de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ (Ver [6]) para $u \in U$; $v \in V$; $x, y \in Ker\omega$ y $u_1, u_2, u_3 \in U$:

$$(1.1) \quad (y^2)^2 = 0$$

$$(1.2) \quad u^3 = 0$$

$$(1.3) \quad u(uv) = 0$$

$$(1.4) \quad uv^2 = 0$$

$$(1.5) \quad (uv)^2 = u^2v^2 = 0$$

$$(1.6) \quad x^2y^2 + 2(xy)^2 = 0$$

$$(1.7) \quad x^2(xy) = 0$$

$$(1.8) \quad (u_1u_2)u_3 + (u_2u_3)u_1 + (u_3u_1)u_2 = 0$$

De las identidades anteriores se puede demostrar que:

$$(1.9) \quad UV \subset U$$

$$(1.10) \quad U^2 \subset V$$

$$(1.11) \quad V^2 \subset U$$

$$(1.12) \quad UV^2 = \langle 0 \rangle$$

$$(1.13) \quad U^2V^2 = \langle 0 \rangle$$

Los idempotentes de $A = Ke \oplus U \oplus V$ tienen la forma $e + u + u^2$ con $u \in U$. De aquí se obtiene que las dimensiones de los subespacios U y V son invariantes; es decir no dependen de la elección del idempotente e . Se dice que A es de tipo $(p+1, q)$ si $\dim U = p$, $\dim V = q$ y $\dim A = p+q+1$.

Otros subespacios de dimensión invariante son U^2 , $UV + V^2$ y $N_U = \langle u \in U / u^2 = 0 \rangle$. Si en la descomposición $A = Ke \oplus U \oplus V$ se tiene $UV = \langle 0 \rangle$, entonces $N_V = \langle v \in V / v^2 = 0 \rangle$ es de dimensión invariante.

Si se tiene $A = Ke \oplus U \oplus V = Ke_o \oplus U_o \oplus V_o$ donde $e_o = e + u_o + u_o^2$ con $u_o \in U$, entonces

$$(1.14) \quad U_o = \{u + 2uu_o / u \in U\}, \quad y$$

$$(1.15) \quad V_o = \{v - 2(u_o + u_o^2)v / v \in V\}$$

Las funciones

$$\delta : U \longrightarrow U_o \quad y \quad \Psi : V \longrightarrow V_o \quad \text{tales que}$$

$$(1.16) \quad \delta(u) = u + 2uu_o \quad y \quad \Psi(v) = v - 2(u_o + u_o^2)v$$

resultan ser lineales biyectivas.

2. Subespacios de dimensión invariante.

Proposición 2.1. Si $A = Ke \oplus U \oplus V$ es una álgebra de Bernstein, entonces los subespacios $An(U) = \{x \in U/xu = 0, \forall u \in U\}$ y $An(Ker\omega) = \{x \in Ker\omega/xy = 0, \forall y \in Ker\omega\}$ son de dimensión invariante.

Demostración: Sea $A = Ke_0 \oplus U_0 \oplus V_0$ la descomposición de A con respecto al idempotente $e_0 = e + u_0 + u_0^2$ con $u_0 \in U$. Para demostrar que $dim An(U)$ es un invariante; de (1.14) y (1.16) basta verificar que $ux = 0 \forall x \in U$ si y sólo si $(u + 2uu_0)(x + 2xu_0) = 0 \forall x \in U$. Si $ux = 0 \forall x \in U$, entonces $(u + 2uu_0)(x + 2xu_0) = u(x + 2xu_0) = ux + 2u(xu_0) = 2u(xu_0)$. De (1.8) se concluye que $u(xu_0) = 0$. Inversamente si $(u + 2uu_0)(x + 2xu_0) = 0 \forall x \in U$, entonces $(u + 2uu_0)(x + 2xu_0) = ux + 2u(xu_0) + 2(uu_0)x + 4(uu_0)(xu_0) = 0$ con lo cual $ux = 0 \forall x \in U$, dado que $ux \in V$ y los sumandos restantes son elementos de U .

Puesto que $Ker\omega$ no depende de la elección del idempotente, $An(Ker\omega)$ es un subespacio invariante.

Proposición 2.2. Si $A = Ke \oplus U \oplus V$ es una álgebra de Bernstein con $U^2 = \langle 0 \rangle$, y $A = Ke_0 \oplus U_0 \oplus V_0$ es la descomposición con respecto al idempotente $e_0 = e + u_0 + u_0^2$ con $u_0 \in U$; entonces:

- a) $U = U_0$
- b) $UV = U_0V_0$
- c) $(UV)V = (U_0V_0)V_0$

Demostración: De (1.14), $U_0 = \{u + 2uu_0/u \in U\}$. Como por hipótesis $U^2 = \langle 0 \rangle$ se obtiene $U_0 = U$ con lo que se demuestra (a). De (1.9), (1.15) y la hipótesis $U_0V_0 = \langle (u + 2uu_0)(v - 2u_0v)/u \in U, v \in V \rangle = \langle uv/u \in U, v \in V \rangle = UV$, con ésto se tiene (b). La afirmación (c) es una conclusión de (a) y (b).

Proposición 2.3. Si $A = Ke \oplus U \oplus V$ es una álgebra de Bernstein con $U^2 = \langle 0 \rangle$, entonces los subespacios $N := \langle u \in U/ \text{ existe } v \in V \text{ tal que } uv = u \rangle$ y $M := \langle v \in V/ \text{ existe } u \in U \text{ no nulo tal que } uv = u \rangle$ son de dimensión invariante.

Demostración: Sea $A = Ke_0 \oplus U_0 \oplus V_0$ la descomposición de A con respecto al idempotente $e_0 = e + u_0 + u_0^2$, $u_0 \in U$. Como $U^2 = \langle 0 \rangle$, de la proposición 2.2. se tiene $U_0 = U$. Además por (1.15) $V_0 = \{v - 2u_0v/v \in V\}$. Dado que $uv = u$ si y sólo si $u(v - 2u_0v) = u$, se tiene que N y M son subespacios de dimensión invariante.

Proposición 2.4. Si $A = Ke \oplus U \oplus V$ es una álgebra de Bernstein con $UV = \langle 0 \rangle$, entonces los subespacios V^2 y $An(V) = \{v \in V/vz = 0 \forall z \in V\}$ son de dimensión invariante.

Demostración: Sea $A = Ke_0 \oplus U_0 \oplus V_0$ descomposición de A relativa al idempotente $e_0 = e + u_0 + u_0^2$, $u_0 \in U$. Como $UV = \langle 0 \rangle$ se tiene

$$V_0 = \langle v - 2vu_0^2/v \in V \rangle$$

$$V_0^2 = \langle v_1 - 2v_1u_0^2)(v_2 - 2v_2u_0^2)/v_1, v_2 \in V \rangle$$

$$= \langle v_1v_2 - 2v_1(v_2u_0^2) - 2v_2(v_1u_0^2) + 4(v_1u_0^2)(v_2u_0^2)/v_1, v_2 \in V \rangle$$

$$= V^2$$

dado que $v_1(v_2u_0^2), v_2(v_1u_0^2)$ son elementos de $UV = \langle 0 \rangle$ y $(v_1u_0^2)(v_2u_0^2)$ pertenece a $UV^2 = \langle 0 \rangle$.

Dimensión de $An(V)$ es un invariante. Esto es consecuencia de: $v \in An(V)$ si y sólo si $v - 2vu_0^2 \in An(V_0)$; en efecto, si $v \in An(V)$ entonces $v - 2vu_0^2 = v$, luego $\forall z \in V$, se tiene: $(v - 2vu_0^2)(z - 2zu_0^2) = v(z - 2zu_0^2) = -2v(zu_0^2) \in UV = \langle 0 \rangle$, de donde $v - 2vu_0^2 \in An(V_0)$. Inversamente si $v - 2vu_0^2 \in An(V_0)$ entonces $\forall z \in V$, $(v - 2vu_0^2)(z - 2zu_0^2) = 0$. Se obtiene $vz - 2v(zu_0^2) - 2z(vu_0^2) + 4(vu_0^2)(zu_0^2) = 0$, de donde $vz = 0$, dado que $v(zu_0^2), z(vu_0^2)$ pertenecen a $UV = \langle 0 \rangle$ y $(vu_0^2)(zu_0^2) \in UV^2 = \langle 0 \rangle$. Se ha demostrado que $v \in An(V)$.

3. Algebras de Bernstein no Isomorfas

A continuación utilizando los resultados anteriores se construirán álgebras de Bernstein no isomorfas de tipo $(p+1, q)$ con $p+q = n$. A será una K -álgebra conmutativa de dimensión $n+1$ y K un cuerpo infinito de característica distinta de 2.

Proposición 3.1. Supongamos que la K -álgebra A admite un idempotente no nulo e y una descomposición en suma directa de subespacios $A = Ke \oplus U \oplus V$. Si:

- $eu = \frac{1}{2}u \forall u \in U$, $ev = 0 \forall v \in V$, $U^2 = \langle 0 \rangle$, $UV \subset U$; $V^2 \subset U$ entonces la función lineal $\omega : A \rightarrow K$ definida por $\omega(e) = 1$, $\omega(u) = 0 \forall u \in U$, $\omega(v) = 0 \forall v \in V$; es un homomorfismo no nulo de K -álgebra y A es álgebra de Bernstein.
- $eu = \frac{1}{2}u \forall u \in U$, $ev = 0 \forall v \in V$, $U^2 \subset V$, $UV = V^2 = \langle 0 \rangle$; entonces la función lineal $\omega : A \rightarrow K$ definida por $\omega(e) = 1$, $\omega(u) = 0 \forall u \in U$, $\omega(v) = 0 \forall v \in V$; es un homomorfismo no nulo de K -álgebra y A es álgebra de Bernstein.

Demostración: Se demostrará sólo la parte (a) puesto que la demostración de (b) es similar.

Fácilmente se demuestra que $\omega : A \longrightarrow K$ es homomorfismo de K-álgebras. Para demostrar que A es álgebra de Bernstein, sea $x = \alpha e + u + v$ con $\alpha \in K$, $u \in U$ y $v \in V$ un elemento cualquiera de A .

$$x^2 = \alpha^2 e + u^2 + v^2 + 2\alpha eu + 2\alpha ev + 2uv = \alpha^2 e + \alpha u + 2uv + v^2.$$

Por hipótesis $2uv + v^2 = u' \in U$ y así $x^2 = \alpha^2 e + \alpha u + u'$. Se obtiene $(x^2)^2 = \alpha^4 e + \alpha^3 u + \alpha^2 u' = \alpha^2(\alpha^2 e + \alpha u + u') = \omega^2(x)x^2$.

La proposición que se enuncia a continuación se entrega sin demostración y corresponden a resultados dados en [4] por C. Mallol.

Proposición 3.2.

- a) Para $p \in \mathbb{Z}^+$ existe una única álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ tal que $\dim U = p$ y $\dim V = 0$.
- b) Para $q \in \mathbb{Z}^+$ existe una única álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ tal que $\dim U = 0$ y $\dim V = q$.
- c) Para $p, q \in \mathbb{Z}^+$ existe una única álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ tal que $\dim U = p$, $\dim V = q$ y $UV + V^2 = U^2 = \langle 0 \rangle$.

Notar que de la proposición 3.2 para $n \in \mathbb{Z}^+$ es posible construir $n + 1$ álgebras de Bernstein no isomorfas de dimensión $n + 1$.

Proposición 3.3. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$; entonces:

- a) Para todo entero t con $1 \leq t \leq p$ y todo entero s con $1 \leq s \leq \min\{t, q\}$ existe una K-álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ de tipo $(p + 1, q)$ tal que $\dim U^2 = s$, $UV + V^2 = \langle 0 \rangle$ y $\dim An(U) = p - t$.
- b) Para todo entero t con $1 \leq t \leq q$ y todo entero s con $1 \leq s \leq \min\{t, p\}$ existe una K-álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ tal que $U^2 = \langle 0 \rangle$, $\dim(UV + V^2) = s$, $UV = \langle 0 \rangle$ y $\dim An(V) = q - t$.

Demostración: Para demostrar (a) consideremos el K-espacio vectorial A de base $\{e, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ en el cual se define la estructura de álgebra conmutativa dada por la tabla de multiplicación: $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, 2, \dots, p$; $u_i^2 = v_i$ si $1 \leq i \leq s$; $u_i^2 = v_s$ si $s \leq i \leq t$; otros productos ceros. Si $U = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ y $V = \langle v_1, \dots, v_q \rangle$ entonces por (b) de la proposición 3.1, $A = Ke \oplus U \oplus V$ es una K-álgebra de Bernstein que verifica $UV = V^2 = \langle 0 \rangle$. Por la definición del producto $U^2 = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, es decir $\dim U^2 = s$. Sólo falta demostrar que $\dim An(U) = p - t$.

Sea $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \in An(U)$, entonces $\forall x_i \in K \ i = 1, 2, \dots, p$

$$\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \right) \left(\sum_{i=1}^p x_i u_i \right) = 0$$

de donde $\alpha_1 x_1 = \dots = \alpha_{s-1} x_{s-1} = \alpha_s x_s + \dots + \alpha_t x_t = 0$.

Se obtiene $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, t$. Se concluye que $\dim An(U) = p - t$.

La demostración de (b) es similar a la demostración de (a) considerando un K-espacio vectorial A de base $\{e, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ y definiendo una estructura de K-álgebra conmutativa por los productos $e^2 = e; eu_i = \frac{1}{2}u_i \ i = 1, \dots, p; v_i^2 = u_i \text{ si } 1 \leq i \leq s; v_i^2 = u_s \text{ si } s \leq i \leq t; \text{ otros productos ceros.}$

Notar que tanto en (a) como en (b) de la proposición 3.3 para distintos valores de t y s se obtienen álgebras no isomorfas. Esto es consecuencia de las proposiciones 2.1. y 2.4.

Es posible encontrar una fórmula que dé cuenta del número de álgebras de Bernstein de dimensión $n + 1$ con $n \geq 2$ que pueden construirse con la parte (a) de la proposición 3.3.

Si $p \leq q$ existen $(1/2)p(p+1)$ álgebras y si $p > q$ existen $(1/2)q(q+1) + (p-q)q$ álgebras. Sea $\dim U = n - k, \dim V = k$ con $k = 1, 2, \dots, n - 1$ y k_0 el menor entero tal que $n \leq 2k_0$. Se tiene $n - k \leq k$ para $k = k_0, \dots, n - 1$ y $n - k > k$ para $k = 1, 2, \dots, k_0 - 1$. Por lo tanto existen

$$\sum_{k=k_0}^{n-1} (1/2)(n-k)(n-k+1) + \sum_{k=1}^{k_0-1} ((1/2)k(k+1) + ((n-k)-k)k)$$

álgebras no isomorfas; ésto es:

$$(1/6)(n-1)n(n+1) - (1/2)(k_0-1)(n^2 - 2nk_0 + (2/3)k_0(2k_0-1) + n - k_0)$$

álgebras de dimensión $n + 1$.

La misma fórmula da cuenta del número de álgebras de Bernstein no isomorfas de dimensión $n + 1$ con $n \geq 2$ que pueden ser construidas con la parte (b) de la proposición (3.3).

Proposición 3.4. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Para todo entero s, t con $1 \leq s < p$ y $1 \leq t < q$ existe una K-álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ de tipo $(p+1, q)$ tal que $\dim An(U) = p - s, \dim An(V) = q - t, \dim U^2 = \dim V^2 = 1$ y $UV = \langle 0 \rangle$.

Demostración: En el K-espacio vectorial A de base $\{e, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ basta definir la estructura de K-álgebra conmutativa dada por los productos: $e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, \dots, p$; $u_i^2 = v_q$ si $1 \leq i \leq s$; $v_i^2 = u_p$ si $1 \leq i \leq t$ los otros productos ceros. Si $U = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ y $V = \langle v_1, \dots, v_q \rangle$ entonces $A = Ke \oplus U \oplus V$ es una K-álgebra de Bernstein que verifica las condiciones de la proposición.

Como consecuencia de las proposiciones 2.1 y 2.4 las álgebras construidas en la proposición anterior no son isomorfas para cada valor de s y cada valor de t .

Notar que en la proposición 3.4., si $\dim U = n - k$, $\dim V = k$ con $k = 2, \dots, n - 2$ y $n \geq 4$; existen $\sum_{k=2}^{n-2} (n - k - 1)(k - 1) = (1/6)(n - 1)(n - 2)(n - 3)$ álgebras no isomorfas de dimensión $n + 1$.

Proposición 3.5. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq k \leq p$. Para todo entero s tal que $1 \leq s \leq k$ y $k - s \leq 2q - 1$, existe una K-álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ de tipo $(p + 1, q)$ tal que $U^2 = \langle 0 \rangle$, $\dim(UV + V^2) = k$ y $\dim UV = \dim(UV) = \dim V = s$.

Demostración: Sea A el K-espacio vectorial de base $\{e, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$. Se define en A la estructura de K-álgebra conmutativa dada por: $e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, 2, \dots, p$; $u_i v_1 = u_i$ si $1 \leq i \leq s$; $v_i v_j = u_{i+j+s-1}$ si $i + j + s - 1 \leq k$; otros productos ceros.

Si $U = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ y $V = \langle v_1, \dots, v_q \rangle$ entonces por (a) de la proposición 3.1., $A = Ke \oplus U \oplus V$ es una álgebra de Bernstein que cumple con el enunciado de la proposición.

Dado que $\dim(UV + V^2)$ siempre es un invariante, y por la proposición 2.2.; se obtienen álgebras no isomorfas para diferentes valores de k y de s .

Para contar las álgebras de Bernstein de dimensión $n + 1$ que pueden construirse de la proposición 3.5.; se debe analizar el número de álgebras en los casos en que $p \leq 2q - 1$ y $p > 2q - 1$.

Si $p \leq 2q - 1$ existen $(1/2)p(p + 1)$ álgebras, si $p > 2q - 1$ existen $2pq - 2q^2 + q$ álgebras. Sea $\dim U = n - k$, $\dim V = k$ con $k = 1, 2, \dots, n - 1$; y t_0 el menor entero para el cual $n + 1 \leq 3t_0$.

Se obtiene que existen

$$\sum_{k=t_0}^{n-1} (1/2)(n - k)(n - k + 1) + \sum_{k=1}^{t_0-1} (2(n - k)k - 2k^2 + k)$$

álgebras; es decir es posible construir

$$(1/6)(n-1)n(n+1) + (1/2)(t_0-1)(3nt_0 + 3t_0 - 3t_0^2 - n^2 - n)$$

álgebras no isomorfas de dimensión $n+1$.

Proposición 3.6. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y $p \geq 2$. Para todo entero k, s con $2 \leq k \leq p$ y $1 \leq s < k$, existe una K-álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ de tipo $(p+1, q)$ tal que $U^2 = \langle 0 \rangle$, $\dim(UV + V^2) = k$, $\dim UV = \dim(UV)V = k$ y $\dim N = s$.

Demostración: Sea A el K-espacio vectorial de base $\{e, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$. Se define en A la estructura de álgebra conmutativa dada por: $e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, 2, \dots, p$; $u_i v_1 = u_i$ si $1 \leq i \leq s$, $u_i v_1 = \sum_{j=1}^i u_j$ si $s < i \leq k$; otros productos ceros.

Si $U = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ y $V = \langle v_1, \dots, v_q \rangle$ por (a) de la proposición 3.1. $A = Ke \oplus U \oplus V$ es álgebra de Bernstein que verifica el enunciado de la proposición. Sólo se demostrará que $\dim N = s$.

Sea $(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i)(\sum_{i=1}^q \beta_i v_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$, se obtiene

$$\begin{aligned} & \beta_1(\alpha_1 + \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_k)u_1 + \beta_1(\alpha_2 + \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_k)u_2 + \dots + \\ & \beta_1(\alpha_s + \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_k)u_s + \beta_1(\alpha_{s+1} + \alpha_{s+2} + \dots + \alpha_k)u_{s+1} + \dots + \\ & \beta_1 \alpha_k u_k = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i; \text{ de donde } \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_p = 0 \quad y \end{aligned}$$

$$(\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_1 \alpha_{s+1} + \dots + \beta_1 \alpha_k = 0$$

$$(\beta_1 - 1)\alpha_2 + \beta_1 \alpha_{s+1} + \dots + \beta_1 \alpha_k = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(\beta_1 - 1)\alpha_s + \beta_1 \alpha_{s+1} + \dots + \beta_1 \alpha_k = 0$$

$$(\beta_1 - 1)\alpha_{s+1} + \dots + \beta_1 \alpha_k = 0$$

$$\vdots$$

$$(\beta_1 - 1)\alpha_k = 0$$

El sistema tiene solución no trivial si $\beta_1 = 1$, en tal caso $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_k = 0$. Se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^s \alpha_i u_i\right) v_1 = \sum_{i=1}^s \alpha_i (u_i v_1) = \sum_{i=1}^s \alpha_i u_i;$$

de donde $N = \langle u_1, \dots, u_s \rangle$.

De las proposiciones (2.2) y (2.3) para diferentes valores de k y s se obtienen álgebras de Bernstein no isomorfas.

Con la proposición 3.6 se pueden construir $(1/2)(p-1)p$ álgebras no isomorfas cuando $\dim U = p$. Luego si $\dim U = n-k$, $\dim V = k$ con $k = 1, \dots, n-2$; existen

$$\sum_{k=1}^{n-2} (1/2)(n-k-1)(n-k) = (1/6)(n-2)(n-1)n$$

álgebras no isomorfas de dimensión $n+1$.

Proposición 3.7. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y $p \geq 2$. Entonces para todo entero k con $1 \leq k < p$ es posible construir álgebras de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ de tipo $(p+1, q)$ de modo que:

- a) $U^2 = \langle 0 \rangle$, $\dim(UV + V^2) = k$, $\dim UV = k$, $\dim(UV)V = k-1$ y $N = \langle 0 \rangle$.
- b) $U^2 = \langle 0 \rangle$, $\dim(UV + V^2) = k$, $\dim UV = k$, $\dim(UV)V = k-1$, $N = \langle 0 \rangle$ y $\dim V^2 = 1$ invariante.
- c) $U^2 = \langle 0 \rangle$; $\dim(UV + V^2) = k+1$, $\dim UV = k$ y $\dim(UV)V = k-1$.

Demostración: Sea A el K -espacio vectorial de base $\{e, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$. Sea $U = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ y $V = \langle v_1, \dots, v_q \rangle$. Para demostrar (a) se define en A la estructura de k -álgebra conmutativa dada por: $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, 2, \dots, p$; $u_i v_1 = u_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k$ otros productos ceros. Por la proposición 3.1. A es una K -álgebra de Bernstein, además $N = \langle 0 \rangle$, en efecto, si para

)

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \in U \text{ existe } \sum_{i=1}^q \beta_i v_i \in V \text{ tal que}$$

$$\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i\right) \left(\sum_{i=1}^q \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$$

se obtiene

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_1 u_{i+1} = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$$

de donde $\alpha_i = 0$ $i = 1, 2, \dots, p$. Dado que $(UV)V = \langle u_3, \dots, u_{k+1} \rangle$, se obtiene que $\dim(UV)V = k - 1$.

Para demostrar (b) se define en A la estructura de K-álgebra conmutativa dada por: $e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, 2, \dots, p$; $u_i v_1 = u_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k$; $v_1^2 = u_2$ otros productos ceros. De la Proposición 3.1. A es de Bernstein. En forma análoga a la demostración de (a) se obtiene $N = \langle 0 \rangle$. Se demostrará a continuación que $\dim V^2 = 1$ es un invariante, para ésto consideremos un idempotente no nulo $e_0 = e + u_0 + u_0^2$. En la descomposición $A = Ke_0 \oplus U_0 \oplus V_0$ se tiene por (1.15) que $V_0 = \{v - 2u_0v/v \in V\}$. Notar que para todo $v \in V$ los productos $u_0v \in \langle u_2, \dots, u_{k+1} \rangle$, luego $v(u_0v) = 0$. Se concluye que $(v - 2u_0v)^2 = v^2$, es decir $V_0^2 = V^2 = \langle u_2 \rangle$.

Para demostrar (c) se define en A la estructura de K-álgebra conmutativa dada por: $e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, 2, \dots, p$; $u_{i+1}v_1 = u_i$ si $1 \leq i \leq k$; $v_1^2 = u_p$ otros productos ceros.

Notar que en cada álgebra construida en la proposición 3.7 si $\dim U = n - k$ y $\dim V = k$ con $k = 1, \dots, n - 2$; existen $\sum_{k=1}^{n-2} (n - k - 1) = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ álgebras no isomorfas de dimensión $n + 1$.

Proposición 3.8. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y $q \geq 2$. Para todo entero s con $1 \leq s \leq q$ existe una K-álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ de tipo $(p + 1, q)$ tal que $U^2 = \langle 0 \rangle$, $\dim(UV + V^2) = 1$, $\dim UV = \dim(UV)V = 1$ y $\dim M = s$.

Demostración: En el K-espacio vectorial A de base $\{e, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ se define la estructura de K-álgebra conmutativa dada por: $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, \dots, p$; $u_1v_i = u_1$ si $1 \leq i \leq s$; $v_1v_2 = u_1$ otros productos ceros. Si $U = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ y $V = \langle v_1, \dots, v_q \rangle$ A es una K-álgebra de Bernstein. Claramente $\dim UV = \dim(UV)V = 1$, y además $\dim M = s$; en efecto: si para $\sum_{i=1}^q \beta_i v_i$ existe $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ no nulo tal que $(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i)(\sum_{i=1}^q \beta_i v_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ se obtiene $\sum_{i=1}^s \beta_i = 1$ de donde $M = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$.

De la proposición 2.3 se obtiene que para diferentes valores de s las álgebras construidas son no isomorfas. Además, se pueden construir $\frac{1}{2}(n - 2)(n + 1)$ álgebras no isomorfas de dimensión $n + 1$.

Proposición 3.9. Las álgebras de Bernstein de tipo $(p + 1, q)$ construidas anteriormente son no isomorfas.

Demostración: Para realizar la demostración se construirá una tabla con las álgebras encontradas en las proposiciones anteriores. En la descomposición $A =$

$Ke \oplus U \oplus V$; $\{u_1, \dots, u_p\}$ es base para U ; $\{v_1, \dots, v_q\}$ es base para V ; $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $i = 1, 2, \dots, p$; $ev_i = 0$ $i = 1, 2, \dots, q$. Los subespacios que aparecen en las tablas sólo se indica su dimensión en los casos en que éstos resultan ser de dimensión invariante.

Por los subespacios que son de dimensión invariante, para demostrar lo que se desea sólo basta verificar lo siguiente:

- a) Las álgebras (4) y (5) de la tabla no son isomorfas. Para que la álgebra (4) sea isomorfa a la álgebra (5) se tendría que tener en (4) $k = s$, con esto $\dim N = k$. Sin embargo en (5) $\dim N = s < k$.
- b) Las álgebras (6) y (7) de la tabla no son isomorfas. Si se supone que existe isomorfismo y de acuerdo a (15), hay en (7) un idempotente $e_0 = e + u_0 + u_0^2$ con $u_0 \in U$ tal que $V_0^2 = \langle 0 \rangle$; esto es $(v - 2u_0v)^2 = 0 \forall v \in V$. Si $v = v_1$; $v_1(u_0v_1) \in \langle u_3, \dots, u_k \rangle$. Dado que $v_1^2 = u_2$ se obtiene $(v_1 - 2u_0v_1)^2 = v_1^2 - 4v_1(u_0v_1) \neq 0$, lo que es una contradicción.
- c) Las álgebras (4) y (9) de la tabla no son isomorfas. Si existe isomorfismo en (4) se tiene $k = s = 1$ con esto $u_1v_1 = u_1$ y $V^2 = \langle 0 \rangle$. En (9) $s = 1$ y además debe existir idempotente $e_0 = e + u_0 + u_0^2$ con $u_0 \in U$ tal que $V_0^2 = \langle 0 \rangle$, es decir $(v - 2u_0v)^2 = 0 \forall v \in V$. Si $v = v_1$ y $u_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$, $(v_1 - 2u_0v_1)^2 = -4v_1(u_0v_1) = -4\alpha_1 u_1 = 0$, es decir $\alpha_1 = 0$. Si $v = v_1 + v_2$ se tiene $(v_1 + v_2 - 2u_0(v_1 + v_2))^2 = 2v_1v_2 = 2u_1 \neq 0$ lo que es una contradicción.

Observación: En las diferentes álgebras de Bernstein construidas en las proposiciones anteriores, se han encontrado fórmulas que permiten saber el número de álgebras de dimensión $n + 1$ que se pueden construir con cada proposición. Sumando dichas fórmulas y considerando además las álgebras de Bernstein triviales; es decir aquellas en las cuales $(\ker \omega)^2 = \langle 0 \rangle$, se obtiene el siguiente resultado: Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$ se pueden construir: $(1/6)(5n^3 + 3n^2 - 14n + 12) - (k_0 - 1)(n^2 + n + k_0((4/3)k_0 - 2n - 5/3)) + (1/2)(t_0 - 1)(3nt_0 + 3t_0 - 3t_0^2 - n^2 - n)$ álgebras de Bernstein no isomorfas de dimensión $n + 1$; donde k_0 es el menor entero para el cual $n \leq 2k_0$ y t_0 es el menor entero para el cual $n + 1 \leq 3t_0$. Reemplazando en la fórmula n por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 se obtiene respectivamente los siguientes números: 6, 20, 47, 90, 154, 241, 356, 502, 683.

Algebras de Bernstein cons-	Dimensión de los subespacios						
truidas en las proposiciones anteriores	U^2	$UV + V^2$	UV	$(UV) \mathbb{V}An(U)$	$An(V)$	N	
Para $s, t \in Z$ con $1 \leq t \leq p$ y $1 \leq s \leq \min\{t, q\}$ se define $u_i^2 = v_i$ si $1 \leq i \leq s$, $u_i^2 = v_s$ si $s \leq i \leq t$.	s	0	0	0	$p-t$	q	$-$ (1)
Para $s, t \in Z$ con $1 \leq t < p$ y $1 \leq s < q$ se define $u_i^2 = v_q$ si $1 \leq i \leq s$, $v_i^2 = u_p$ si $1 \leq i \leq t$.	1	1	$-$	$-$	$p-s$	$q-t$	$-$ (2)
Para $s, t \in Z$ con $1 \leq t \leq q$ y $1 \leq s \leq \min\{t, q\}$ se define $v_i^2 = u_i$ si $1 \leq i \leq s$, $v_i^2 = u_s$ si $s \leq i \leq t$.	0	s	0	0	p	$q-t$	0 (3)
Para $s, k \in Z$ con $1 \leq k \leq p$, $1 \leq s \leq k$ y $k-s \leq 2q-1$ se define $u_i v_1 = u_i$ si $1 \leq i \leq s$, $v_i v_j = u_{i+j+s-1}$ si $i+j+s-1 \leq k$.	0	k	s	s	p	$-$	s (4)
Sea $p \geq 2$. Para $k, s \in Z$ con $2 \leq k \leq p$ y $1 \leq s < k$ se define $u_j v_j = u_j$ si $1 \leq i \leq s$, $u_i v_1 = \sum_{j=1}^i u_j$ si $s < i \leq k$.	0	k	k	k	p	$-$	s (5)
Sea $p \geq 2$. Para $k \in Z$ con $1 \leq k < p$, se define $u_i v_1 = u_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k$.	0	k	k	$k-1$	p	$-$	0 (6)
Sea $p \geq 2$. Para $k \in Z$ con $1 \leq k < p$, se define $u_i v_1 = u_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k$, $v_1^2 = u_2$.	0	k	k	$k-1$	p	$-$	0 (7)
Sea $p \geq 2$. Para $k \in Z$ con $1 \leq k < p$, se define $u_{i+1} v_1 = u_i$ si $1 \leq i \leq k$, $v_1^2 = u_p$.	0	$k+1$	k	$k-1$	p	$-$	0 (8)
Sea $q \geq 2$. Para $s \in Z$ con $1 \leq s \leq q$, se define $u_1 v_i = u_1$ si $1 \leq i \leq s$, $v_1 v_2 = u_1$.	0	1	1	1	p	$-$	1 (9)

REFERENCES

- [1] *Burgueño, C.; Neuburg, M.; Suazo, A.: Totally Orthogonal Bernstein Algebras. Arch. Math., Vol.56, pp 349-351, 1991.*
- [2] *Cortés Gracia, Teresa: Algebras de Bernstein: Determinación A Partir del Retículo de Subálgebras y Modularidad. Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 1990.*
- [3] *Holgate, P.: Genetic Algebras Satisfying Bernstein's Stationary Principle. J. London Math. Soc., 2, 9, pp 612-623, 1975.*
- [4] *Mallol, C.: A Propos des Algèbras de Bernstein. Thèse d'Etat Université de Montpellier II, France, Décembre, 1989.*
- [5] *Suazo, A.: Clasificación de las álgebras de Bernstein de dimensión 4. Revista Cubo, 4, pp 82-91, 1988.*
- [6] *Wörz-Busekros, A.: Algebras in Genetic. Lecture Notes in Biomathematics 36, Berlín Heidelberg New York, 1980.*

Recibido : 18 de Marzo de 1992.

Avelino Suazo Delgado
Department of Mathematics
Universidad de La Serena
Benavente 980, La Serena, Chile

Michael Neuburg Grund
Department of Mathematics
Universidad de La Serena
Benavente 980, La Serena, Chile