PROYECCIONES

Revista de Matemática Vol. 10 Pág. 43-51

1991 - ISSN 0716-0917

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

CARACTERIZACION DE OPERADORES DE IMAGEN CERRADA

Mercedes Fernández Miranda

A B S T R A C T

En el presente artículo se caracterizan en una C^ -álgebra los elementos para los cuales existen inversos generalizados. Según el teorema de representación, dichos elementos corresponderían en $L(H)$ a los operadores que tienen una imagen cerrada.*

El resultado de este artículo es de importancia para la construcción del espacio de Hilbert asociado a una C^ -álgebra.*

1. DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En todo el trabajo H designará un espacio de Hilbert, $L(H)$ el espacio de los operadores lineales continuos de H en H , M una C^* -álgebra, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos.

Teoremas de referencia

I Teorema de representación:

Para toda C^* -álgebra M existe un espacio de Hilbert H tal que M admite una representación fiel como sub álgebra de $L(H)$.

II Teorema de caracterización de operadores de imagen cerrada en $L(H)$:

Si A pertenece a $L(H)$, entonces:

A es un operador de imagen cerrada si y solamente si $c(A) > 0$.

Definición 1

Sea M una álgebra asociativa en $\mathbb{C}$.

Una $\ast$ álgebra de Banach M se llamará $\mathbb{C}^\ast$ álgebra si además satisface:

$$\text{Para todo } x \text{ en } M : |x^\ast x| = |x|^2$$

Nota

En todo el artículo se supondrá que M es una $\mathbb{C}^\ast$ álgebra con identidad, lo cual, fácilmente demostrable, no constituye de ninguna manera una restricción.

Definición 2

Sea A en M , se define **resolvente de A** , $R_e(A)$, como el conjunto: $R_e(A) = \{g \text{ en } \mathbb{C} : A - gI \text{ es invertible}\}$, donde I es el operador identidad. El **espectro** de A , $S_p(A)$ es el complemento de $R_e(A)$ en los números complejos.

Definición 3

Diremos que A es un elemento positivo de M ($A \geq 0$) si:

- I) A es hermitiano ($A = A^\ast$)
- II) $S_p(A)$ está contenido en los reales positivos.

Designaremos por M^+ el conjunto de los elementos positivos de M .

Definición 4

Si A y B en M son hermitianos, diremos que:

$A \leq B$ si existe C en M^+ tal que $B = A + C$.

Nota

$\leq$ es una relación de orden parcial en el conjunto de los elementos hermitianos de M .

A continuación se listan una serie de teoremas. Para mayor detalle consultar [1] y [2].

Proposición 5

M^+ es un cono convexo.

Proposición 6

Si A pertenece a M^+ entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

I $A \geq 0$

II Existe x en M tal que: $A = x^* x$

Proposición 7

Si A y B pertenecen a M^+ y son tales que $AB = BA$ entonces AB pertenece a M^+ .

Proposición 8

Si A y B son hermitianos y tales que $0 \leq A \leq B$, entonces

$$\|A\| \leq \|B\|$$

Proposición 9

Si A pertenece a M tal que $AA^* = A^*A$, entonces: para todo n natural se cumple

$$\|A^n\| = \|A\|^n$$

Proposición 10

Si A es hermitiano y $\|A\| \leq 1$, entonces:

$$I - A \text{ pertenece a } M^+$$

Proposición 11

Si $\dagger$ pertenece a M y A pertenece a M^+ , entonces:

$$\dagger^* A \dagger \text{ pertenece a } M^+$$

Terminamos la sección 1 definiendo en una C^* -álgebra los conceptos de **conorma**, **inverso generalizado** e **inverso de Moore-Penrose**, fundamentales para la caracterización buscada.

Definición 12

- Si A pertenece a M^+ , la conorma de A , $c(A)$, se define por:
 $c(A) = \inf \{ \text{Sp}(A) \setminus \{0\} \}$, si $A \neq 0$ (Si $A = 0$, $c(A) = 1$).
- Si A pertenece a M , la conorma de A , $c(A)$, se define por:
 $c(A) = (c(A^*A))^{1/2}$

Nota

Utilizando el teorema de representación de Gelfand y Neimark se demuestra que si $M = L(H)$ y $N(A)$ es el núcleo de A , $c(A)$, se define por:

$$c(A) = \inf_{u \in N(A)^\perp \setminus \{0\}} \|Au\| / \|u\| \quad (\text{Si } A = 0, c(A) = 1).$$

Proposición 13

Si A pertenece a M^+ , entonces: $A^2 - c(A)A \geq 0$.

Definición 14

Si A pertenece a M , diremos que B perteneciente a M es un **inverso generalizado de A** , que se designará por $B(INV)A$, si:

$$BAB = B \quad y \quad ABA = A$$

Definición 15

Si A pertenece a M , diremos que B perteneciente a M es **inverso de Moore-Penrose de A** , que se designará por $B = IMP(A)$, si:

$$I \quad B(INV)A$$

$$II \quad (AB)^* = AB, \quad (BA)^* = BA$$

2. OBTENCION DEL TEOREMA DE CARACTERIZACION EN M

Previo a la formulación del teorema de caracterización necesitamos los siguientes teoremas que demostraremos a continuación y que se basan en los teoremas listados anteriormente.

Proposición 16

Si A pertenece a M , entonces para todo g real positivo $g \geq \|A\|$ y para todo T que pertenece a M se cumple:

$$\|(I - AA^*/g^2)AT\| \leq (I - c^2(A)/g^2)\|AT\|$$

Demostración

Suponemos que $A \neq 0$ y que $c(A) > 0$ (si no la proposición es evidente).

$$\text{Sea } D = A^*A/g^2 \quad y \quad c = c(D) = c(A^*A/g^2) = c^2(A)/g^2 \leq 1:$$

$$\begin{aligned} (16.1) \quad (1-c)^2 D - (I-D)^2 D &= D(D-cI) (I-cI + I-D) = \\ &= (I-cI + I-D) D(D-cI) \end{aligned}$$

Aplicando la Prop. 13 con $A = D$ obtenemos:

$$(16.2) \quad D(D-cI) = D^2 - cD \quad \text{perteneciente a } M^+$$

Además, aplicando la Prop. 5 y la Prop. 6, D pertenece a M^+ . Como $g^2 \geq \|A^*A\|$ se deduce que $\|D\| \leq 1$, luego según la Prop. 10 :

$$(16.3) \quad I - D \text{ pertenece a } M^+$$

Como $c \leq \|D\| < 1$:

$$(16.4) \quad I - cI \text{ pertenece a } M^+.$$

De (16.3), de (16.4) y de la Prop. 5 deducimos

$$(16.5) \quad I - cI + I - D \text{ pertenece a } M^+.$$

De (16.1), (16.2), (16.5) y de la Prop. 7 obtenemos:

$$(16.6) \quad (I - c)^2 D - (I - D)^2 D \text{ pertenece a } M^+.$$

De (16.6) y la Prop. 11 con $A = (I - D)^2 D - (I - D)^2 D$:

$$T^* [(I - c)^2 D - (I - D)^2 D] T \text{ pertenece a } M^+. \text{ Es decir:}$$

$$T^* (I - D)^2 D T \leq T^* (I - c)^2 D T$$

$$T^* (I - A^* A / g^2)^2 (A^* A / g^2) T \leq (1 - c)^2 T^* (A^* A / g^2) T$$

$$T^* (I - A^* A / g^2)^2 A^* A T \leq (1 - c)^2 T^* A^* A T$$

$$[(I - A A^* / g^2) A T]^* [(I - A A^* / g^2) A T] \leq (1 - c)^2 (A T)^* A T$$

Aplicando la Prop. 8 obtenemos:

$$\|[(I - A A^* / g^2) A T]^* [(I - A A^* / g^2) A T]\| \leq (1 - c)^2 \|(A T)^* A T\|$$

Por lo tanto:

$$\|(I - A A^* / g^2) A T\|^2 \leq (1 - c)^2 \|A T\|^2$$

Entonces, como $c = c^2(A)/g^2$, para todo T que pertenece a M se cumple:

$$\|(I - A A^* / g^2) A T\| \leq (I - c^2(A)/g^2) \|A T\|$$

Corolario 17

Si A pertenece a M , entonces, para todo real positivo g , $g \geq \|A\|$, para todo T que pertenece a M y para todo n natural se cumple :

$$a) \quad \|(I - A A^* / g^2)^n A T\| \leq (I - c^2(A)/g^2)^n \|A T\|$$

$$b) \quad \|(I - A^* A / g^2)^n A^* T\| \leq (I - c^2(A)/g^2)^n \|A^* T\|$$

Demostración

a) Por inducción sobre j .

Es evidente para $j = 0$. Supongamos el corolario demostrado para j . Luego de Prop. 16 obtenemos:

$$\begin{aligned} \|(I - \Lambda \Lambda^* / g^2)^{j+1} AT\| &= \|(I - \Lambda \Lambda^* / g^2) (I - \Lambda \Lambda^* / g^2)^j AT\| \\ &= \|(I - \Lambda \Lambda^* / g^2) \wedge (I - \Lambda \Lambda^* / g^2)^j T\| \\ \|(I - \Lambda \Lambda^* / g^2)^{j+1} AT\| &\leq (1 - c^2(A) / g^2) \|(I - \Lambda \Lambda^* / g^2)^j AT\| \end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis de inducción se deduce:

$$\|(I - \Lambda \Lambda^* / g^2)^{j+1} AT\| \leq (1 - c^2(A) / g^2)^{j+1} \|AT\|, \quad \text{lo que establece a).}$$

b) Se deduce inmediatamente de a) en razón de la simetría entre Λ y Λ^* .

Teorema 18

Si A pertenece a M y $c(A) > 0$, entonces:

$$\text{existe } B = \text{IMP}(A)$$

Demostración

Si $A = 0$ tomamos $B = 0$.

Si $A \neq 0$, $0 < c(A) \leq \|\Lambda\|$, entonces $0 \leq 1 - c^2(A) / \|\Lambda^* \Lambda\| < 1$.

Luego, utilizando el Corolario 17 (haciendo $g_j = \|\Lambda\|$ y $T = I / \|\Lambda^* \Lambda\|$) obtenemos que la serie $\sum_{j \geq 0} (I - \Lambda^* \Lambda / \|\Lambda^* \Lambda\|)^j \Lambda^* / \|\Lambda^* \Lambda\|$, converge normalmente en M .

Entonces, si $B = \sum_{j \geq 0} (I - \Lambda^* \Lambda / \|\Lambda^* \Lambda\|)^j \Lambda^* / \|\Lambda^* \Lambda\|$ tenemos que B pertenece a M .

Como AB y BA son límites de operadores hermitianos entonces:

$$(18.1) \quad (AB)^* = AB, \quad (BA)^* = BA.$$

Además,

$$(18.2) \quad \Lambda B \Lambda = \Lambda \quad B \Lambda B = B$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \Lambda B \Lambda &= \sum_{j \geq 0} \Lambda (I - \Lambda^* \Lambda / \|\Lambda^* \Lambda\|)^j \Lambda^* \Lambda / \|\Lambda^* \Lambda\| \\ &= \sum_{j \geq 0} (I - \Lambda \Lambda^* / \|\Lambda \Lambda^*\|)^j [(I - \Lambda \Lambda^* / \|\Lambda \Lambda^*\|) \Lambda] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \geq 0} (I - AA^* / \|AA^*\|)^j A - \sum_{j \geq 1} (I - AA^* / \|AA^*\|)^j A = A$$

porque las dos series convergen.

Sea:

$$B_n = \sum_{n \geq j \geq 0} (I - A^*A / \|A^*A\|)^j A^* / \|A^*A\|, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

Entonces, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ donde

$$B_n = A^* \sum_{n \geq j \geq 0} (I - AA^* / \|AA^*\|)^j / \|AA^*\|$$

$$\text{Como } BAB = \lim_{n \rightarrow \infty} BAB_n, \quad BAA^* = A^*B^*A^* = A^* :$$

$$BAB = \lim_{n \rightarrow \infty} BAA^* \sum_{n \geq j \geq 0} (I - AA^* / \|AA^*\|)^j / \|AA^*\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} A^* \sum_{n \geq j \geq 0} (I - AA^* / \|AA^*\|)^j / \|AA^*\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n \geq j \geq 0} (I - A^*A / \|A^*A\|)^j A^* / \|A^*A\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B. \quad \text{De (18.1) y (18.2) se deduce que } B(\text{IMP})A.$$

Proposición 19

Si A pertenece a M tal que $c(A) > 0$, entonces:

$$\text{IMP}(A^*A) = \text{IMP}(A) \text{IMP}(A^*).$$

Corolario 20

Si A pertenece a M y A es hermitiano, entonces $\text{IMP}(A)$ es hermitiano.

Proposición 21

Si A y B pertenecen a M tal que $B(\text{INV})A$, entonces existe C en M tal que $C = \text{IMP}(A)$.

Proposición 22

Si A pertenece a M^+ , $A \neq 0$ y $B = \text{IMP}(A)$, entonces: $\|B\| c(A) = 1$.

Demostración

Por definición A es hermitiano, luego, según el corolario 20, B también lo es. Entonces, como $(AB)^* = AB$, A y B hermitianos, obtenemos:

$$(22.1) \quad AB = BA.$$

Sea:

$$(22.2) \quad C(g) = (-1/g) (I - BA) + \sum_{n \geq 0} g^n B^{n+1}$$

Por fórmula de Cauchy, el radio de convergencia r de la serie es:

$$r = 1 / [\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|B^n\|)^{1/n}]$$

y como B es hermitiano, utilizando la Prop. 9, $\|B\|^n = \|B^n\|$, luego:

$$(22.3) \quad r = 1 / [\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|B\|)^{n/n}] = 1 / \|B\|$$

$$\text{Por otra parte: } C(g) (A - gI) = (A - gI) C(g) = I$$

En efecto:

$$\begin{aligned} (A - gI) C(g) &= (A - gI) [(-1/g) (I - BA) + \sum_{n \geq 0} g^n B^{n+1}] \\ &= -(A - ABA)/g + I - BA + \sum_{n \geq 0} A g^n B^{n+1} - \sum_{n \geq 0} g^{n+1} B^{n+1} \\ &= I - BA + \sum_{n \geq 0} A g^n B^{n+1} - \sum_{n \geq 0} g^{n+1} B^{n+1} \\ &= I - \sum_{n \geq 1} g^n (I - AB) B^n \end{aligned}$$

$$\text{De (22.1): } (A - gI) C(g) = I - \sum_{n \geq 1} g^n (I - AB) B^n = I$$

$$\text{De la misma manera se demuestra: } C(g) (A - gI) = I$$

Entonces, $(0, r)$ está contenido en $R_e(A)$ y r pertenece a $S_p(A)$, luego $c(A) = r$. Por lo tanto,

$$\|B\| c(A) = 1.$$

Corolario 23

Si A pertenece a M , $A \neq 0$ y $B = \text{IMP}(A)$, entonces:

$$\|B\| c(A) = 1.$$

Demostración

Como $B = \text{IMP}(A)$ de Prop. 19: $BB^* = \text{IMP}(A^*A)$

Según la Prop. 6, A^*A pertenece a M^+ y de la Prop. 22, obtenemos:

$\|BB^*\| c(A^*A) = 1$. Como M es una C^* álgebra: $\|BB^*\| = \|B\|^2$, luego aplicando $c(A^*A) = c(A)^2$, se deduce:

$$\|B\| c(A) = 1$$

Corolario 24

Si A pertenece a M y $B(INV)A$, entonces:

$$\|B\| c(A) \geq 1$$

Demostración

Como $B(INV)A$ por la Prop. 21, existe C tal que $C = IMP(A)$, luego $\|C\| \leq \|B\|$; entonces de Corolario 23 se deduce la tesis.

Teorema 25

Si A pertenece a M , $A \neq 0$, entonces:

$c(A) > 0$ si y solamente si existe B en M tal que $B(INV)A$.

Demostración

->) Como $c(A) > 0$, aplicando teorema 18, existe $C = IMP(A)$, luego $C(INV)A$.

<-) Si $B(INV)A$, de Corolario 24, $\|B\| c(A) \geq 1$, luego $c(A) > 0$.

A través de los teoremas desarrollados y los teoremas de referencia, podemos afirmar que el **Teorema 25** presenta en una C^* álgebra una caracterización de los elementos correspondientes a los operadores que tienen una imagen cerrada en el ámbito de $L(H)$.

REFERENCIAS

- [1] NASHED, M.Z., Generalized inverses and Applications, Academic Press, (1976).
- [2] SAKAI, S., C^* -algebras and W^* -algebras, Springer Verlag, Berlin, (1971).

Mercedes Fernández Miranda
 Departamento de Matemáticas
 Universidad de Antofagasta
 Angamos 0601 - fax 247786
 Antofagasta - CHILE