UNA NOTA SOBRE LA COMPACIDAD DE FAMILIAS RESOLVENTES DE OPERADORES.

Carlos Lizama Y.

RESUMEN

En este trabajo se caracteriza familias resolventes de operadores $R(t)$ para una ecuación de tipo Volterra definida en un espacio de Banach con la propiedad adicional que $R(t) - I$ es un operador compacto para cada $t > 0$. En particular, este resultado extiende una caracterización similar para semigrupos de operadores efectuada por J.R. Cuthbert [1] y para familias Coseno de Operadores realizada por H. Henríquez [4].

INTRODUCCION

Sea X un espacio de Banach y sea A un operador lineal cerrado no acotado con dominio $D(A)$ denso en X . Sea $k \in L^2_{loc}(R_+)$. En este trabajo consideramos la ecuación de tipo Volterra:

$$(1.1) \quad u(t) = f(t) + \int_0^t k(t-s)Au(s)ds; \quad t \in J := [0, T]$$

donde $f \in C(J; X)$.

El estudio de la ecuación (1.1) ha adquirido gran interés en los

últimos años debido a sus diversas aplicaciones en teoría de viscoelasticidad, biología y otras áreas. Ver [10] para ejemplos y referencias adicionales.

Definición 1.1.

Una familia fuertemente continua $\{R(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineales y acotados en X que conmuta con A y satisface la ecuación:

$$(1.2) \quad R(t)x = x + \int_0^t k(t-s)AR(s)xdx; \quad t \geq 0, x \in D(A)$$

se llama FAMILIA RESOLVENTE para la ecuación (1.1).

Se observa que una familia resolvente es única si existe [2]. Además, la existencia de una familia resolvente permite resolver, vía la fórmula de variación de parámetros, la ecuación (1.1).

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de familias resolventes en términos solamente del núcleo $k(t)$ y el operador A han sido obtenidas por Da Prato y Ianelli [2] (ver también [3,10]).

El estudio de diversas propiedades de las familias resolventes tales como regularidad, positividad, periodicidad, continuidad uniforme, aproximación u otras, se realiza actualmente por diversos autores bajo distintas hipótesis sobre el núcleo k y el operador A (ver por ejemplo [2,3,7,8,9,10] y las referencias citadas en estos artículos).

En este trabajo, se caracteriza la compacidad de $R(t) - I$ para cada $t > 0$ solo en términos del operador A y bajo condiciones de regularidad del núcleo k . En particular, tomando $k(t) \equiv 1$ y $k(t) \equiv t$ se reobtienen resultados de las teorías de Semigrupos y Familias Coseno de Operadores que habían sido estudiadas por J. Cuthbert [1] y H. Henríquez [5] (ver también [4,6]).

2. FAMILIAS RESOLVENTES TALES QUE $R(t) - I$ ES COMPACTO PARA CADA $t > 0$

A través de este trabajo consideraremos la siguiente hipótesis:

(H_k) $k \in L^2_{loc}(R_+)$ posee una transformada de Laplace absolutamente convergente :

$$\hat{k}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} k(t) dt$$

para $\operatorname{Re} \lambda \geq w$

y $\hat{k}(\lambda) \neq 0$ para $\operatorname{Re} \lambda \geq w$

Denotemos por $k^{*n} \equiv k * k * \dots * k$ la convolución n -veces de la función k donde por definición :

$$(k * k)(t) = \int_0^t k(t-s)k(s)ds$$

En [9] se demostró que si $k(t)$ es una función continua y el operador A para la ecuación (1.1) es acotado, entonces la familia resolvente para la ecuación (1.1) existe y es dada explícitamente por:

$$(2.1) \quad R(t) = I + \int_0^t Q(s) ds$$

donde

$$(2.2) \quad Q(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} k(s) {}^*n A^n$$

Proposición 2.1.

Supongamos que k es una función continua y que en la ecuación (1.1) el operador A es compacto. Entonces existe la familia resolvente para la ecuación (1.1) y además $R(t) - I$ es compacto para cada $t > 0$.

Demostración.

La existencia de la familia resolvente fue observada en la discusión previa. Por otra parte, ya que el conjunto de operadores compactos es un subespacio lineal cerrado de $B(X)$, se tiene que $Q(s)$ es un operador compacto para cada $s > 0$.

Finalmente, ya que la integral (en el sentido de Bochner) de una familia de operadores compactos define también un operador compacto [11 corolario 2.3] se obtiene que

$$R(t) - I = \int_0^t Q(s) ds$$

es un operador compacto para cada $t > 0$.

El principal resultado de esta nota es la siguiente caracterización :

Teorema 2.2.

Supongamos que existe una familia resolvente $\{R(t)\}_{t \geq 0}$ para la ecuación (1.1) y que k es una función continua que satisface (H_k) . Supongamos además que existen constantes $M \geq 0$ y $\omega \geq 0$ tales que

$$(2.3) \quad \|R(t)\| \leq M e^{\omega t} \text{ para } t \geq 0$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- (a) $R(t) - I$ es compacto para cada $t > 0$
- (b) A es compacto.

Demostración

En vista de las condiciones (2.3) y (H_k) se tiene que para cada $\lambda > \omega$ el operador $(\lambda - \hat{k}(\lambda)A)$ es invertible y además :

$$H(\lambda) \equiv (\lambda - \hat{k}(\lambda)A)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} R(t) dt \quad ; \quad \lambda > \omega$$

(ver Da Prato - Iannelli [2]. Luego :

$$\lambda H(\lambda) - I = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} (R(t) - I) dt \quad ; \quad \lambda > \omega.$$

Por lo tanto, por hipótesis y [11, corolario 2.3] se obtiene que para cada $\lambda > \omega$ el operador $\lambda H(\lambda) - I$ es compacto, luego, el rango del operador $\lambda H(\lambda) = (I - \hat{k}(\lambda)A)^{-1}$ es cerrado (Alternativa de Fredholm). Pero $\text{Ran}(I - \hat{k}(\lambda)A)^{-1} = D(A)$ es denso en X . Esto prueba que A es un operador acotado.

Por otra parte de las identidades

$$(I - \hat{k}(\lambda)A)^{-1} - I = \hat{k}(\lambda)A(I - \hat{k}(\lambda)A)^{-1}$$

$$A = [\hat{k}(\lambda)A(I - \hat{k}(\lambda)A)^{-1}](1/\hat{k}(\lambda) - A)$$

donde $\lambda > \omega$, se obtiene que A es un operador compacto.

Corolario 2.3.

Supongamos que A es el generador infinitesimal de un C_0 -Semi-grupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en X . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (a) $T(t) - I$ es compacto para cada $t > 0$
- (b) A es compacto.

Corolario 2.4.

Supongamos que A es el generador infinitesimal de una familia coseno de operadores $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ en X . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (a) $C(t) - I$ es compacto para cada $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (b) A es compacto.

Finalmente, como una aplicación, se considera una extensión de resultados de Henríquez [5].

Sea $\mu \in \mathbb{C}$ y $t \in [0, T]$. Se define

$$r(t, \mu) = 1 + \int_0^t q(s, \mu) ds \quad t \geq 0$$

donde

$$q(s, \mu) := \sum_{n=1}^{\infty} k^{*n}(s) \mu^* \quad s \geq 0$$

En [8, Teor. 2.3] se probó que en general vale la inclusión espectral

$$r(t, \sigma(A)) \subseteq \sigma(R(t)) \quad t \geq 0$$

donde $\sigma(A)$ denota el espectro del operador A .

Definimos los conjuntos :

$$J := \{t > 0 : R(t) \text{ no es invertible en } B(X)\}$$

$$Z_r := \bigcap_{\lambda \in \sigma_p(A)} \{t > 0 : r(t, \lambda) = 0\}$$

Teorema 2.5.

Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.2, suponga que $R(t) - I$ es un operador compacto para cada $t > 0$. Entonces :

- (a) Existe una constante $\eta > 0$ tal que para cada $t \in (0, \eta)$ el operador $R(t)$ es invertible en $B(X)$.
- (b) $J \subseteq (\eta, \infty) \cap Z_r$

Demostración

(a) Como A es un operador acotado, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} R(t) = I$$

Luego, existe $\eta > 0$ tal que para cada $t \in (0, \eta)$:

$$\|R(t) - I\| < 1$$

Esto implica que $R(t)$ es invertible en $B(X)$.

(b) Sea $t_0 > 0$ tal que $R(t_0)$ no es invertible en $B(X)$. Entonces $0 \in \sigma(R(t_0))$. Luego $-1 \in \sigma(R(t_0) - I)$. Como $R(t_0) - I$ es compacto, entonces $-1 \in \sigma_p(R(t_0) - I)$ o equivalentemente $0 \in \sigma_p(R(t_0))$.

Como A es acotado entonces $\sigma_p(R(t_0)) = r(t_0, \sigma_p(A))$ ([9, corolario 2.3]) y se obtiene así que $t_0 \in Z_r$. La parte (a) completa la afirmación.

Observación 2.6.

Como A es un operador compacto entonces, más precisamente, se tiene bajo las condiciones del Teorema 2.5 :

$$Z_r = \bigcup_n \{t > 0 : r(t, \lambda_n) = 0\}$$

donde cada λ_n es un valor propio de A y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.R. CUTHBERT, Operator semigroups such that $T(t) - I$ is compact for all $t > 0$. Z. Wahr. 18 (1971), 9-16.
- [2] G. Da Prato and M. Iannelli, Linear integrodifferential equations in Banach spaces. Rend. Sem. Math. Padova 62 (1980), 207-219.
- [3] R. Grimmer and J. Pruss, On linear Volterra equations in Banach spaces, Comp. and Math. with Appl. 11(1985), 189-205.
- [4] H. Henríquez, Una propiedad de compacidad para familias coseno de operadores. Atas do décimo quarto colóquio brasileiro de Matemática, Vol. I, (1985), 71-80.
- [5] H. Henríquez, Cosine operator families such that $C(t) - I$ is compact, for all $t > 0$. Indian J. Pure Appl. Math., 16(2) (1985), 143-152.
- [6] H. Henríquez, Una nota sobre la compacidad de funciones coseno de operadores, Rev. Proyecciones, 13(1987), 35-46.
- [7] C. Lizama, On an extension of the Trotter-Kato theorem for resolvent families of operators. J. Int. Eq. and Appl. 2(2)(1990), 269-280.
- [8] C. Lizama, A characterization of periodic resolvent operators, Results in Math. 18(1990), 93-105.
- [9] C. Lizama, Familias resolventes uniformemente continuas de operadores, Rev. Contribuciones, por aparecer.
- [10] J. Pruss, Positivity and regularity of hyperbolic Volterra equations in Banach spaces. Math. Ann. 279(1987), 317-344.

- [11] L. Weiss, A generalization of the Vidav-Jorgens perturbation theorem for Semigroups and its application to transport theory. J. Math. Anal. and Appl. 129, (1988), 6-23.

Carlos Lizama Y.
Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Casilla 5659 - Correo 2
Santiago - CHILE