Proyecciones

Vol. 11 N° 1, pp.77-87 Mayo 1992

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

**CONJUNTOS DE CANTOR DINAMICAMENTE DEFINIDOS
CON $HD = d \in]0, 1[$**

RODRIGO BAMON*

Universidad de Chile, Santiago, Chile

SERGIO PLAZA**

Universidad de Santiago, Santiago, Chile

Resumen.

En este trabajo, construimos una aplicación lineal por pedazos, $L_{\lambda_1, \lambda_2} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, donde λ_1, λ_2 son parámetros reales, con la propiedad siguiente: dado $d \in]0, 1[$, existe una curva $v(\lambda_1) = (x(\lambda_1), y(\lambda_2))$ tal que si vértices de L_{λ_1, λ_2} están sobre esta curva, entonces $HD(K_{\lambda_1, \lambda_2}) = C(K_{\lambda_1, \lambda_2}) = d$, donde HD es la dimensión de Hausdorff y C es la capacidad límite del conjunto de Cantor K_{λ_1, λ_2} generado por L_{λ_1, λ_2} .

* Proyecto FONDECYT 1059/89

** Proyecto FONDECYT 901/90.DICYT 9133 P S.

1. Introducción.

Una partición de Markov para un conjunto de Cantor $K \subset \mathbb{R}$, (i.e., un conjunto cerrado perfecto con interior vacío), es un par (P, ψ) , donde $P = \{K_1, \dots, K_n\}$ es una colección finita de intervalos cerrados disjuntos, y ψ es una función de clase C^1 definida en una vecindad de $U_{i=1}^n K_i$, tales que

- i) $K \subset U_{i=1}^n K_i$ y $\partial K_i \subset K$.
- ii) para cada $i = 1, \dots, n$, $\psi(K_i)$ es un intervalo, envoltura convexa en $\mathbb{R}$ de un número finito de intervalos de P ;
- iii) para cada $i \geq 1$ y n suficientemente grande, $\psi^n(K \cap K_i) = K$, es decir, ψ es topológicamente mezclante (mixing), lo cual significa que, dados abiertos $U, V \subset K$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\psi^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Decimos que K es dinámicamente definido, si

- a) existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < |\lambda| < 1$, tal que $\lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$ es una vecindad de 0 en K (λ es llamado factor de escala de K);
- b) existe una partición de Markov (P, ψ) para K ,
- c) $\psi : K \rightarrow K$ es una función $C^{1+\epsilon}$ y expansora, en el sentido que ψ puede ser extendida a una aplicación $C^{1+\epsilon}$ a una vecindad de K y para cada $x \in K$, $|\psi'(x)| > 1$.

Si (P, ψ) es una partición de Markov para K , definamos $K^1 = K_1^1 \cup \dots \cup K_n^1$ y para $m \geq 2$, $K^m = \psi^{-m+1}(K^1)$, entonces $K = \bigcap_{m \geq 0} K^m$ es un conjunto de Cantor dinámicamente definido por ψ . En este caso decimos que K es un conjunto de Cantor **casi-homogéneo**. Si para cada, $1 \leq i \leq n$, $\psi_i = \psi|_{K_i} : K_i \rightarrow K^0$ es afín y sobreyectiva, donde K^0 es el menor intervalo cerrado que contiene a K^1 , decimos que K es un conjunto de **Cantor homogéneo**.

Ahora revisaremos los conceptos de **Dimensión de Hausdorff y Capacidad Límite**. Sea (X, d) espacio métrico.

Dimensión de Hausdorff

Sea $U \subset X$, el diámetro de U es $|U| = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$. Si $E \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ y para cada $i \in I$, $0 \leq |U_i| \leq \delta$, decimos que $\{U_i\}_{i \in I}$ es un δ -cubrimiento de E .

Para cada $E \subset X$, $s > 0$, $\delta > 0$ definimos la (s, δ) -medida de Hausdorff de E como

$$H_{\delta}^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i \in I} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento numerable de } E \right\}$$

Es claro que $\delta' < \delta$ implica $H_{\delta'}^s(E) \geq H_{\delta}^s(E)$, luego la función $\delta \rightarrow H_{\delta}^s(E)$ es no creciente, esto permite definir la s -medida de Hausdorff de E como $H^s(E) = \sup_{\delta > 0} H_{\delta}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} H_{\delta}^s(E)$. Dado $E \subset X$ (fijo) la función $s \rightarrow H^s(E)$ tiene el siguiente gráfico

Figura 1

y existe un único $d \geq 0$, tal que

$$H^s(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } s < d \\ 0 & \text{si } s > d \end{cases}$$

Definimos la dimensión de Hausdorff de E , $HD(E)$, como el único valor d anterior, es decir, $HD(E) = \sup\{s \geq 0 : H^s(E) = +\infty\} = \{s \geq 0 : H^s(E) = 0\} = d$.

Capacidad Limite

Sea $A \subset X$ compacto, Dado $\epsilon > 0$, denotamos por $n(\epsilon, A)$ el número mínimo de bolas de radio ϵ necesario para cubrir A . La capacidad límite de A , es definida como:

$$C(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \frac{\ln(n(\epsilon, A))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}$$

Si $K \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Cantor dinámicamente definido, entonces $[P - T]$ se tiene que $HD(K) = C(K)$, es decir, la capacidad límite y la dimensión de Hausdorff de conjuntos de Cantor dinámicamente definidos coinciden, en general se tiene el siguiente

Teorema. (F Takens [3]) Si $K \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Cantor homogéneo o casi-homogéneo, entonces $HD(K) = C(K)$. Además, si K es definido como antes por K^1 y K^0 y una aplicación $\psi: K^1 \rightarrow K^0$, entonces $C(K)$ depende continuamente de los datos (K^0, K^1, ψ) . esto es, depende continuamente de los puntos extremos de K^0 y de K^1 y de ψ en la topología C^1 . Más aún, si denotamos por $\lambda_{j,\min}^m, \lambda_{j,\max}^m$ el valor mínimo y máximo de la derivada de $\psi^m = \psi \circ \psi \circ \dots \circ \psi$ (m-veces) sobre K_j y la expansión mínima de ψ por $\lambda = \min_i \lambda_{i,\min}^1$, y el recíproco de la expansión máxima de ψ por $\lambda = (\max_i \lambda_{i,\max}^1)^{-1}$, entonces

$$\lambda^N \leq \lambda_{i,\min}^N \leq \lambda_{i,\max}^N \leq \lambda^{-N}$$

Si $d_{\max}^n$ es el único valor tal que

$$\sum_i (\lambda_{i,\min}^n)^{-d_{\max}^n} = 1$$

y $d_{\min}^n$ es el único valor tal que

$$\sum_i (\lambda_{i,\max}^n)^{-d_{\min}^n} = 1$$

entonces $0 < d_{\min}^n \leq d_{\max}^n$ y $C(K) = HD(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\max}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\min}^n$

2. Resultado.

Sea $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Consideremos la aplicación lineal por pedazos $L_\alpha: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $L_\alpha(0) = L_\alpha(1) = 0$, $L_\alpha(\alpha) = L_\alpha(1 - \alpha) = 1$ (ver Figura 2), denotemos por $K_\alpha = \bigcap_{m \geq 0} K_\alpha^m$ donde $K_\alpha^m = \psi^{-m+1}(K^1)$ y $K^1 = [0, \alpha] \cup [1 - \alpha, 1]$. De [1], se tiene que $C(K_\alpha) = HD(K_\alpha) = \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{1}{\alpha})}$

Figura 2

Ahora consideremos números positivos λ_1, λ_2 , los cuales representan las pendientes de las aplicaciones lineales por pedazos como muestra la Figura 3. Note que L_{λ_1, λ_2} es simétrica.

Figura 3

Sea $K_{\lambda_1, \lambda_2} = \cap_{m \geq 1} L_{\lambda_1, \lambda_2}^{-m+1}(K^1)$ el conjunto de Cantor generado por L_{λ_1, λ_2} . Tenemos que K_{λ_1, λ_2} es un conjunto de Cantor casi-homogéneo dinámicamente definido.

Teorema. Dado $d \in]0, 1[$, existe una curva de valores de los parámetros $v(d) = (x(\lambda_1), y(\lambda_2))$ tal que si $L_{\lambda_1(d), \lambda_2(d)}$ denota la aplicación lineal por pedazos asociada a $\lambda_1(d), \lambda_2(d)$ como antes, cuyos vértices están sobre la curva $c(d)$. Entonces $HD(K_{\lambda_1(d), \lambda_2(d)}) = C(K_{\lambda_1, \lambda_2}) = d$.

Demostración: Fijado $\lambda_1 \in]1, \frac{1-\alpha}{\alpha}[$, la pendiente λ_2 varía desde la pendiente $m = \frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\alpha(\lambda_1-1)}$ de la recta que une los puntos $(\frac{\alpha}{\lambda_1}, \alpha)$ y $(\alpha, 1)$, a la pendiente $+\infty$ de la recta vertical $x = \alpha$, es decir, $\lambda_2 \in]\frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\alpha(\lambda_1-1)}, +\infty[$. Observe que pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(\alpha, 1 - \alpha)$ es una cota superior para las pendientes λ_1 en este sector.

Ahora tomando $\lambda_1 \in [\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$, la pendiente λ_2 varía entre las pendientes de las rectas que pasan por los puntos $(\frac{1-\alpha}{\lambda_1}, \alpha)$ y $(\alpha, 1)$, $(\frac{1-\alpha}{\lambda_1}, 1 - \alpha)$ y $(\alpha, 1)$, i.e., desde $m_1 = \frac{\lambda_1 \alpha}{\alpha(\lambda_1-1)}$ a $m_2 = \frac{\lambda_1 \alpha}{\alpha(\lambda_1+1)-1}$, luego fijado $\lambda_1 \in [\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$, se tiene que $\lambda_2 \in [\frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\alpha(\lambda_1-1)}, \frac{\lambda_1 \alpha}{\alpha(\lambda_1+1)-1}]$.

Sea $K^1 = K_1^1 \cup K_1^2$ Donde $K_1^1 = [0, \alpha]$ y $K_1^2 = [1 - \alpha, 1]$. Para $m \geq 1$, sea $K_{\lambda_1, \lambda_2}^m = L_{\lambda_1, \lambda_2}^{-m+1}(K^1)$ y denotemos sus componentes conexas por $K_1^m, K_2^m, \dots$. Es claro que $K_{\lambda_1, \lambda_2}^m$ tiene 2^m componentes conexas y que $K_{\lambda_1, \lambda_2} = \cap_{m \geq 1} K_{\lambda_1, \lambda_2}^m$.

Dinámica Simbólica

Procedemos inductivamente como sigue:

-Para cada componente conexa de K^1 asignamos los símbolos "1" para los puntos en K_1^1 y "2" para los puntos en K_2^1 .

-Para cada componente conexa de K^2 , le asignamos los símbolos "11", "12", "22", "21", del siguiente modo: a un punto de K^1 se le asigna el símbolo "11" si él y su imagen pertenecen a K_1^1 , este conjunto corresponde a K_1^2 , a un punto de K^1 se le asigna el símbolo "12" si él está en K_1^1 y su imagen está en K_2^1 , este conjunto de puntos corresponde a K_2^2 , a un punto se le asigna el símbolo "22" si él y su imagen están en K_2^1 , este conjunto de puntos corresponde a K_4^2 , finalmente a un punto se le asigna el símbolo "21" si está en K_2^1 y su imagen está en K_1^1 , este conjunto de puntos corresponde a K_3^2 , y así sucesivamente. Tenemos que para $x \in K^1$, la pendiente de L_{λ_1, λ_2} en ese punto está, dada por la lista siguiente

símbolo de x	→	pendiente de L_{λ_1, λ_2} en x
1	→	λ_1
2	→	λ_2

Para $x \in K^2$, la pendiente de L_{λ_1, λ_2} en ese punto, es dada por la siguiente lista:

símbolo de x	↔	pendiente de $L_{\lambda_1, \lambda_2}^2$ en x
11	→	λ_1^2
12	→	$\lambda_1 \lambda_2$
21	→	$\lambda_1 \lambda_2$
22	→	λ_2^2

Análogamente para $K^3 = \cap_{i=1}^8 K_i^3 = L_{\lambda_1, \lambda_2}^{-3}(K^1)$, tenemos

símbolo de $x \leftrightarrow$ pendiente de $L_{\lambda_1, \lambda_2}^{-3}$ en x

111	$\rightarrow$	λ_1^3
112	$\rightarrow$	$\lambda_1^2 \lambda_2$
121	$\rightarrow$	$\lambda_1^2 \lambda_2$
211	$\rightarrow$	$\lambda_1^2 \lambda_2$
122	$\rightarrow$	$\lambda_1 \lambda_2^2$
212	$\rightarrow$	$\lambda_1 \lambda_2^2$
221	$\rightarrow$	$\lambda_1 \lambda_2^2$
222	$\rightarrow$	λ_2^3

y así sucesivamente para $K_{\lambda_1, \lambda_2}^m$ $m \geq 4$. De este modo podemos describir el itinerario de cada punto de K^1 bajo los iterados de $L_{\lambda_1, \lambda_2}^m$, $m \geq 1$, y además conocemos la pendiente de ese iterado de L_{λ_1, λ_2} en dicho punto. Del Teorema de Takens, tenemos que $HD(K_{\lambda_1, \lambda_2}) = C(K_{\lambda_1, \lambda_2}) = d_\infty$, donde $d_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m$ y para cada $m \geq 1$, d_m satisface la ecuación E_m dadas a seguir:

$$E_1 : \quad 2\lambda_1^{-d_1} + 2\lambda_2^{-d_1} = 1$$

$$E_2 : \quad 2(\lambda_1^2)^{-d_2} + 4(\lambda_1 \lambda_2)^{-d_2} + 2(\lambda_2^2)^{-d_2} = 1$$

inductivamente se tiene la ecuación

$$E_k : \quad \sum_{j=1}^{2^k} b_j \left(\lambda_{i(j)}^{k(j)} \right)^{-d_k} = 1$$

donde $i(j) = 1$ o 2 y $\lambda_{i(j)}^{k(j)}$ es un elemento de la forma $\lambda_1^{l(j)} \lambda_2^{t(j)}$, y cada b_j es un número entero positivo, De las expresiones de las ecuaciones E_k se sigue que

$$\sum_{j=1}^{2^k} b_j \left(\lambda_{i(j)}^{k(j)} \right)^{-d_k} = 2 \left(\lambda_1^{-d_k} + \lambda_2^{-d_k} \right)^m$$

luego

$$\lambda_1^{d_k} + \lambda_2^{-d_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{2}}$$

es decir: las ecuaciones

$$(*) \quad \lambda_1^{d_m} + \lambda_2^{-d_m} = \frac{1}{\sqrt[m]{2}} \quad m = 1, 2.$$

que definen la sucesión d_m para la cual $d_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m$. Tomando límite cuando $m \rightarrow \infty$ en la ecuación (*) tenemos que $d = d_\infty$ satisface la ecuación

$$(**) \quad \lambda_1^{-d} + \lambda_2^{-d} = 1$$

Para obtener los posibles valores que puede asumir d estudiemos en el plano (λ_1, λ_2) las curvas de nivel de la función $C_d = C_d(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^{-d} + \lambda_2^{-d}$. Recordemos que

$$(a) \quad \text{si } \lambda_1 \in \left] 1, \frac{1}{\alpha} \right] \text{ entonces } \lambda_2 \in \left[\frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\alpha(\lambda_1-1)}, +\infty \right[$$

$$(b) \quad \text{si } \lambda_1 \in \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right] \text{ entonces } \lambda_2 \in \left[\frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\alpha(\lambda_1-1)}, \frac{\lambda_1\alpha}{\alpha(\lambda_1+1)-1} \right]$$

y que $d_* = d(K_\alpha) = \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{1}{\alpha})}$ es decir, d_* satisface la ecuación $2(\frac{1}{\alpha})^{-d_*} = 1$

Observemos también que $1 < \lambda_1^{-d_*} + \lambda_2^{-d_*} \Leftrightarrow d_\infty > d_*$

En la Figura 4 aparecen los gráficos de las funciones $C_d = C_d(\lambda_1, \lambda_2) = 1$. i.e.,

$$\lambda_2(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}}}$$

Figura 4

Consideremos ahora la función C_d definida por la ecuación $\lambda_1^{-d} + \lambda_2^{-d} = 1$, es decir. $\lambda_2(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}}}$ Para $d = d_*$, se tiene que $\lambda_2(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}$, pues d_* satisface $(\frac{1}{d})^{-d_*} = 2$ Definamos también las funciones

$$\tilde{\lambda}_2(\lambda_1) = \frac{\lambda_1(1 - \alpha)}{\alpha(\lambda_1 - 1)} \quad y$$

$$\tilde{\tilde{\lambda}}_2(\lambda_1) = \frac{\lambda_1 \alpha}{\alpha(\lambda_1 + 1) - 1} \quad ,$$

se tiene que $\tilde{\lambda}_2(\frac{1}{\alpha}) = \tilde{\tilde{\lambda}}_2(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}$, además cuando $\lambda_1 \rightarrow 1^+$, $\tilde{\lambda}_2 \rightarrow +\infty$, y cuando $\lambda_1 \rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}$, $\tilde{\tilde{\lambda}}_2 \rightarrow +\infty$ Por otra parte cuando $\lambda_1 \rightarrow +\infty$, $\tilde{\lambda}_2 \rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}$ y $\tilde{\tilde{\lambda}}_2 \rightarrow 1$ Para $d < d_*$ y $d > d_*$ los gráficos de las funciones $C_d = 1$ son dados en la figura 5, donde R_1 y R_2 son las regiones

$$R_1 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2): 1 \leq \lambda_1 \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}, \tilde{\lambda}_2(\lambda_1) \leq \lambda_2 \leq +\infty \right\} \quad y$$

$$R_2 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2): \frac{1-\alpha}{\alpha} \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{\alpha}, \tilde{\lambda}_2(\lambda_1) \leq \lambda_2 \leq \tilde{\tilde{\lambda}}_2(\lambda_1) \right\}$$

Figura 5

Ahora fijemos $d \in [0, 1]$. Sean $y = \lambda_1 x$ e $y = \lambda_2 x - \lambda_2 \alpha + 1$ denotemos por v el vertice de la aplicación lineal por partes L_{λ_1, λ_2} , tenemos que v viene dado por las ecuaciones $\lambda_1 x = \lambda_2 x - \lambda_2 \alpha + 1$ y $y = \lambda_1 x$, de donde $x = \frac{1 - \lambda_2 \alpha}{\lambda_1 - \lambda_2}$ e $y = \frac{\lambda_1(1 - \lambda_2 \alpha)}{\lambda_1 - \lambda_2}$, y como $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}}}$, se tiene

$$x = x(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - \lambda_1 \alpha}{\lambda_1((\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - 1)}$$

$$y = y(\lambda_1) = \lambda_1 x(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - \lambda_1 \alpha}{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - 1} \quad y$$

$$v = v(\lambda_1) = (x(\lambda_1), y(\lambda_1)) = \left(x = x(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - \lambda_1 \alpha}{\lambda_1((\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - 1)} \right.$$

$$\left. y = y(\lambda_1) = \lambda_1 x(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - \lambda_1 \alpha}{(\lambda_1^d - 1)^{\frac{1}{d}} - 1} \right)$$

De la definición de $v(\lambda_1)$, es claro que dado $\lambda_1 \in [1, \frac{1}{\alpha}]$, si el vértice v de la aplicación lineal por partes L_{λ_1, λ_2} esta sobre la curva $v(\lambda_1)$, entonces $HD(K_{\lambda_1, \lambda_2}) = C(K_{\lambda_1, \lambda_2}) = d$. Finalmente observe que si $\lambda_1 \rightarrow 1$, entonces $v(\lambda_1) \rightarrow (\alpha, \alpha)$ y si $\lambda_1 \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ entonces $v(\lambda_1) \rightarrow (\alpha, 1)$.

REFERENCIAS

- [1] *Bamón, R. and Plaza, S.: Cantor Sets, Numerical Invariants and Perron-Frobenius Theory. Pre-print 1991.*
- [2] *Palis, J. and Takens, F.: Homoclinic Bifurcations: hiperbolicity, fractional dimensions and infinitely many attractors. Cambridge University Press: To appear.*

- [3] Takens, F.: Limit Capacity and Hausdorff Dimension of Dynamically Defined Cantor Set. *Lecture Notes in Math.*, vol. 1331, Springer-Verlag (1988), pp 196-212.

Recibido : 4 de septiembre de 1991.

Rodrigo Bamón
Departamento de Matemática
Universidad de Chile
Casilla 653, Santiago, Chile.

Sergio Plaza
Departamento de Matemática
Universidad de Santiago
Casilla 55659, correo 2, Santiago, Chile.