PROPIEDADES DE INVARIANZA DE TRAYECTORIAS PARA SISTEMAS DE CONTROL LINEALES.*

Hernán Henríquez M.
Víctor Delgado A.
María E. San Martín A.

1. INTRODUCCION

Este trabajo está dedicado al estudio de algunas propiedades geométricas de trayectorias en sistemas de control lineales invariantes del tipo:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1)$$

donde $x(t)$ en R^n representa el estado, $u(t)$ en R^m la acción de control y tanto A como B representan matrices de órdenes apropiados.

Un concepto esencial de la teoría geométrica de los sistemas del tipo (1) es el de subespacio (A,B) -invariante.

Un subespacio S de R^n se llama (A,B) -invariante si $A(S)$ está contenido en $S + R(B)$, donde $R(B)$ denota el rango del operador lineal B . Este y otros conceptos relacionados ha sido extensamente estudiado por varios autores ([1], [7]). En particular se ha demostrado que la propiedad de invarianza de un subespacio S equivale al hecho de que, para todo x_0 en S , exista una trayectoria de (1) con origen

* Proyecto 84-86-36, Dirección de Investigación, UACH; parcialmente financiado por Proyecto DICYT-8933-H.M.UACH.

en x_0 y completamente contenida en S . En efecto, S es (A,B) -invariante si y solo si existe una aplicación lineal $F: R^n \rightarrow R^m$ tal que $(A+BF)(S)$ está contenido en S ([7]). De allí que si $x(t)$ es solución de $\dot{x} = Ax + Bu$, $u = Fx$, tal que $x(0) = x_0$ pertenece a S entonces $x(t) = e^{t(A+BF)}x_0$ permanece en S .

En lo que sigue consideraremos como controles admisibles a funciones $u(\cdot)$ localmente integrables y denotaremos por $x(t, x_0, u)$ a la respectiva trayectoria que sale de x_0 . Esto es:

$$x(t, x_0, u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds \quad (2)$$

Así, el concepto de (A,B) invarianza puede ser reformulado en la forma siguiente: un subespacio S de R^n es (A,B) -invariante si para cada x_0 existe un control admisible $u(\cdot)$ tal que $x(t, x_0, u)$ pertenece a S para todo $t \geq 0$.

Los resultados sobre subespacios (A,B) -invariantes son insuficientes para describir algunas situaciones que se presentan en teoría de control, como por ejemplo cuando se requiere que las trayectorias permanezcan en una variedad lineal. Esto ocurre para algunos métodos de control óptimo con restricciones de estado de tipo poliédrico ([2]) o cuando en presencia de una observación del tipo

$$y(t) = C x(t) \quad (3)$$

se desea determinar los controles $u(t)$ para los cuales la observación $y(t)$ es constante. Esto es equivalente a estudiar el problema de determinar controles $u(\cdot)$ tal que $x(t, x_0, u)$ pertenezca a $x_0 + \ker(C)$. En efecto si $x(t, x_0, u)$ pertenece a $x_0 + \ker(C)$ entonces $Cx(t, x_0, u) = Cx_0$, es decir, la observación es constante. Recíprocamente, si $Cx(t, x_0, u)$ es constante entonces su valor es Cx_0 y, en consecuencia, $C(x(t, x_0, u) - x_0) = 0$, esto es $x(t, x_0, u)$ pertenece a $x_0 + \ker(C)$.

Sea x_0 en R^n y S un subespacio vectorial de R^n . En la siguiente sección caracterizaremos el problema de determinar una función de control $u(t)$ tal que la respectiva trayectoria $x(t, x_0, u)$, pertenezca a $x_0 + S$. Denotaremos por M a la variedad lineal $x_0 + S$.

2. RESULTADOS

Denotaremos por S^* el supremo de los subespacios (A,B) -invariantes contenidos en el subespacio vectorial S de R^n ([7]). Entonces S^* es (A,B) -invariante ([1]) y, por lo mencionado en la introducción, para cada punto de S^* existe una solución de (1) que sale de ese punto y permanece en S^* .

Definición 1.

Diremos que x_0 es M -invariante si existe $u(\cdot)$ en $L^1(0,T; R^m)$, para algún T positivo, tal que la trayectoria $x(t, x_0, u)$ pertenece a $M = x_0 + S$ para todo t en $[0, T]$.

El siguiente resultado caracteriza los estados M -invariantes.

Teorema 1.

Un punto x_0 es M -invariante si y solo si Ax_0 pertenece a $S^* + R(B)$. (4)

Demostración.

Supongamos que x_0 es M -invariante y denotemos por $x(t) = x(t, x_0, u)$ una trayectoria completamente contenida en M para t en $[0, T]$.

Entonces $x(a) - x_0$ pertenece a S^* para cada a en $[0, T]$. En efecto, basta verificar que existe una trayectoria en S que sale de $x(a) - x_0$. Con este propósito consideremos la función de control $v(s) = u(s+a) - u(s)$ definida en $[0, T-a]$. De la expresión (2) se deduce que la trayectoria $y(t)$, con condición inicial $x(a) - x_0$, correspondiente al control $v(\cdot)$ es

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}(x(a) - x_0) + \int_0^t e^{A(t-s)} Bv(s) ds \\ &= e^{At}(e^{Aa}x_0 + \int_0^a e^{A(a-s)} Bu(s) ds - e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bv(s) ds) \\ &= e^{A(t+a)}x_0 + \int_0^{t+a} e^{A(t+a-s)} Bu(s) ds - e^{At}x_0 \\ &\quad - \int_a^{t+a} e^{A(t+a-s)} Bu(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} Bv(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x(t+a) - x_0 - (e^{At}x_0 - x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds) \\
 &= x(t+a) - x_0 - (x(t) - x_0)
 \end{aligned}$$

que pertenece a S para todo t en $[0, T-a]$.

Por otra parte, como $x(t)$ es una función absolutamente continua que verifica la ecuación (1) casi en todas partes, entonces

$$x(t) - x_0 = A \int_0^t x(s)ds + B \int_0^t u(s)ds$$

lo que junto a la observación precedente implica que

$$A \int_0^t x(s)ds \text{ pertenece a } S^* + R(B)$$

para todo t en $[0, T-a]$ y, en consecuencia,

$$Ax_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} A \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds$$

también pertenece a $S^* + R(B)$.

Recíprocamente, como S^* es un subespacio (A, B) -invariante, de (4) se deduce la existencia de una sucesión $(x_k)_{k \geq 1}$ en S^* y una sucesión $(u_k)_{k \geq 0}$ en R^m tal que

$$Ax_k = x_{k+1} + Bu_k, \text{ para todo } k \geq 0.$$

Si $x_0 = 0$ entonces $M = S$ y x_0 es un punto de equilibrio. En consecuencia, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 \neq 0$.

Sea n_0 el mayor entero tal que $x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}$ son vectores linealmente independientes y sea $F: R^n \rightarrow R^m$ una aplicación lineal tal que $Fx_i = -u_i$ para $i = 0, 1, \dots, n_0-1$. Por consiguiente,

$$x_{i+1} = (A + BF)x_i, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n_0-1.$$

De esta expresión se deduce que

$$x_{i+1} = (A + BF)^{i+1} x_0, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n_0-1.$$

Por lo tanto $(A+BF)^k x_0$ pertenece a S^* para todo $k \geq 1$ y la función $x(t) = e^{(A+BF)t} x_0$ pertenece a $x_0 + S^* \subset M$ para todo $t \geq 0$.

Como $x(t)$ es la solución de (1) con condición inicial x_0 y control $u(t) = \Gamma e^{(A+BF)t} x_0$, resulta que existe una trayectoria que sale de x_0 y permanece en M , lo cual significa que x_0 es M-invariante.

De la demostración efectuada se deduce que si x_0 es un punto M-invariante, entonces existe una función de control analítica $u(\cdot)$ tal que la trayectoria correspondiente $x(t, x_0, u)$ pertenece a M para todo $t \geq 0$.

Si M es una variedad lineal denotaremos por M^* el conjunto formado por todos los puntos x_0 en M que son M-invariantes.

Definición 2.

Diremos que una variedad lineal es invariante si $M = M^*$.

Las siguientes propiedades son consecuencia directa de las definiciones y del teorema 1.

Proposición 1.

Sea M una variedad lineal en R^n . Entonces:

- El conjunto M^* es la mayor variedad lineal invariante contenida en M y $M^* = M \cap A^{-1}(S^* + R(B))$. (6)
- La variedad lineal M es invariante si y sólo si $AM \subset S^* + R(B)$.
- Si $x(t, x_0, u)$ es una trayectoria del sistema (1) contenida en M para todo t en $[0, T]$, entonces $x(t, x_0, u)$ pertenece a M^* para t en $[0, T]$.

Demostración.

Si M^* no es vacío y fijamos un punto x_0 en M^* entonces

$$M^* = x_0 + S \cap A^{-1}(S^* + R(B)).$$

En efecto, si x_1 está en M^* entonces tanto x_0 como x_1 satisfacen la condición (4). Se deduce de esto que $x_1 - x_0 \in S$ y

$$A(x_1 - x_0) \in S^* + R(B) \text{ .}$$

Recíprocamente, si $x_1 \in x_0 + S \cap A^{-1}(S^* + R(B))$ entonces por el teorema precedente resulta que $x_1 \in M^*$.

En consecuencia M^* es una variedad lineal y la expresión (6) es una consecuencia directa de la condición (4) .

Por otra parte, si $x(t) = x(t, x_0, u)$ es una trayectoria contenida en M para t en $[0, T]$, entonces de la demostración del teorema se obtiene que $x(t) - x_0 \in S^*$ para todo t en $[0, T]$. Por consiguiente $Ax(t) \in Ax_0 + AS^* \subset S^* + R(B)$ y utilizando nuevamente el teorema 1 concluimos que $x(t)$ pertenece a M^* . Esto completa la demostración de a) y c). La afirmación b) es consecuencia inmediata del teorema 1.

La utilidad del resultado establecido en el teorema 1 está condicionada por la posibilidad de calcular el subespacio S^* , para lo cual existen varios algoritmos bien conocidos (ver [7] y las referencias allí indicadas). El siguiente resultado es también de gran ayuda :

Proposición 2.

Sea S un subespacio vectorial de R^n . Entonces el conjunto $I(S) = \{x_0 \in R^n : x_0 \text{ es } (x_0 + S)\text{-invariante}\}$ es un subespacio vectorial de R^n que contiene a S^* .

Esta proposición es una consecuencia inmediata del teorema 1, por lo cual omitimos su demostración.

Ejemplo 1.

Consideremos un sistema n -dimensional del tipo

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) \quad (7)$$

donde $b \in R^n$ y $u(t) \in R$.

Si S es un hiperplano tal que $S \oplus \langle b \rangle = R^n$ entonces S es (A, b) invariante y todo punto x_0 verifica las condiciones del teorema 1.

Ejemplo 2.

Consideremos nuevamente el sistema (7) pero en la forma canónica de sistemas controlables ([7]), es decir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

y estudiemos la factibilidad de movimientos en trayectorias rectilíneas. Esto significa que el subespacio S es del tipo $\langle v \rangle$ para un vector $v \neq 0$. En este caso $S^* = \{0\}$ ó $S^* = S$. Pero para que ocurra esto último debe verificarse que $Av = \beta v + \alpha b$, de lo cual se deduce que $v = v_1(1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1})^T$. Cuando $v_1 = 0$ reobtenemos el caso $S^* = \{0\}$ de manera que podemos suponer que

$$v = (1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1})^T.$$

Para determinar los puntos x_0 que son M -invariantes, siendo $M = x_0 + \langle v \rangle$, debemos analizar dos situaciones $S^* = \{0\}$ y $S^* = \langle v \rangle$. Utilizando el teorema 1, para el primer caso obtenemos $x_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$, mientras que en el segundo caso resultan los elementos del subespacio generado por $(1, 0, \dots, 0)^T$ y $(0, 1, \beta, \dots, \beta^{n-2})^T$.

Esto significa que los vectores en el espacio $\langle (1, 0, \dots, 0)^T \rangle$ pueden transferirse en cualquier dirección y corresponden a los vectores estacionarios del sistema, mientras que los vectores del espacio $\langle (0, 1, \beta, \dots, \beta^{n-2})^T \rangle$ pueden transferirse en la dirección del vector $v = (1, \beta, \dots, \beta^{n-1})^T$.

En particular, para $n = 2$, los vectores en el espacio $\langle (1, 0)^T \rangle$ son estacionarios y los vectores en el espacio $\langle (0, 1)^T \rangle$ pueden desplazarse en la dirección $(1, \beta)^T$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$, es decir, en cualquier dirección excepto precisamente en la dirección $(0, 1)^T$.

En [3] aparecen otros ejemplos que ilustran las ideas anteriores.

Es bien conocido que varios resultados esenciales de la teoría de control se expresan en términos de la existencia de un control realimentado $u(t) = Fx(t)$. Así ocurre, por ejemplo, en el problema del regulador con costo cuadrático y en los problemas de estabilización. Por este motivo es importante analizar la dependencia del concepto de invarianza con respecto a realimentaciones del sistema.

Proposición 3.

Si x_0 es M-invariante para el par (A, B) entonces x_0 también es M-invariante para el par $(A + BF, B)$, para toda matriz F de orden $m \times n$.

La demostración es una consecuencia directa del teorema 1.

Proposición 4.

Un punto x_0 es M-invariante si y sólo si existe una realimentación F y un vector b en $R(B)$ tal que x_0 es M-invariante para el par $(A + BF, b)$.

Demostración.

Supongamos que x_0 es M-invariante.

Como S^* es (A, B) invariante, existe una realimentación F tal que $(A + BF)S^* \subset S^*$ ([7], lema 4.2) y $Ax_0 \in S^* + Bu_0$ para cierto u_0 en R^n .

Por consiguiente $(A + BF)x_0$ pertenece a $S^* + B(u_0 + Fx_0)$. Si definimos $b = B(u_0 + Fx_0)$ resulta evidente que x_0 es M-invariante para el par $(A + BF, b)$.

Recíprocamente, si existen F y b tales que x_0 es M-invariante para el par $(A + BF, b)$ entonces del teorema 1 deducimos que existe un subespacio $S^* \subset S$ tal que

$$(A + BF)S^* \subset S^* + \langle b \rangle \quad \text{y} \quad (A + BF)x_0 \in S^* + \langle b \rangle$$

$$\text{En consecuencia } AS^* \subset S^* + R(B) \quad \text{y} \quad Ax_0 \in S^* + R(B)$$

Utilizando nuevamente el teorema 1 concluimos que x_0 es M-invariante para el par (A,B).

En teoría de control es frecuente que la función de control se encuentra sometida a algunas restricciones. Si Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ y agregamos a la ecuación (1) la restricción

$$u(t) \text{ pertenece a } \Omega \quad (8)$$

entonces la misma demostración efectuada en el teorema 1 permite obtener la siguiente condición necesaria.

Proposición 5.

Si un punto x_0 es M-invariante para el sistema (1) - (8), entonces

$$Ax_0 \text{ pertenece a } S^* + \overline{c(B\Omega)} \quad (9)$$

Retornando al problema sin restricciones, hemos observado anteriormente que si x_0 es M-invariante entonces existe una función de control analítica $u(t)$ tal que la trayectoria $x(t, x_0, u)$ permanece en M. En ciertos casos uno puede asegurar que existe un control polinomial

$$u(t) = u_0 + \frac{t}{1!} u_1 + \dots + \frac{t^k}{k!} u_k \quad (10)$$

tal que la trayectoria $x(t, x_0, u)$ está en M.

Cuando se presente esta situación diremos que el punto x_0 es polinomialmente M-invariante.

Teorema 2.

Un punto x_0 en $\mathbb{R}^n$ es polinomialmente M-invariante si y sólo si existe una cadena de subespacios

$$S_{k+1} \subset S_k \subset \dots \subset S_1 \subset S \quad (11)$$

tal que

$$a) \quad Ax_0 \in S_1 + R(B) \quad (12)$$

$$b) \quad AS_i \subset S_{i+1} + R(B), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13)$$

$$c) \quad AS_{k+1} \subset S_{k+1} \quad (14)$$

Demostración.

Supongamos en primer término que x_0 es polinomialmente M -in variante y sea $u(\cdot)$ un polinomio expresado como en (10) tal que la trayectoria $x(t, x_0, u)$ pertenezca a M para todo $t \geq 0$. De las expresiones (1) y (10) deducimos que

$$\dot{x}(0) = Ax_0 + Bu_0$$

$$x^{(i+1)}(0) = Ax^{(i)}(0) + Bu_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$x^{(j+1)}(0) = Ax^{(j)}(0), \quad j > k+1.$$

Además, como $x(t, x_0, u)$ pertenece a $x_0 + S$ y S es un subespacio cerrado, entonces todas las derivadas $x^{(i)}(0)$ pertenecen a S para $i \geq 1$.

Si definimos los subespacios S_j por

$$S_j = \langle \{ x^{(i)}(0) : i \geq j \} \rangle$$

para todo $j = 1, 2, \dots, k+1$, entonces las relaciones (11), (12), (13) y (14) son consecuencia inmediata de las observaciones precedentes.

Recíprocamente, supongamos que existe una cadena de subespacios que verifican (11) y las propiedades a), b) y c). Esto implica que existen vectores x_i en S_i con $i = 1, \dots, k+1$ y u_i en R^m para $i = 0, \dots, k$ tal que

$$Ax_i = x_{i+1} - Bu_i; \quad i = 0, 1, \dots, k \quad \text{y} \quad Ax_{k+1} \in S_{k+1} \quad (15)$$

Definamos la función $u(t)$ mediante la expresión (10) y sea

$x(t) = x(t, x_0, u)$. Se deduce de (15) que $x^{(i)}(0) = x_i \in S_i \subset S_1$,

$i = 1, 2, \dots, k+1$ y $x^{(i+1)}(0) = Ax^{(i)}(0) \in S_{k+1}$; $i \geq k+1$.

Como $x(t)$ es una función analítica resulta $x(t) \in x_0 + S$ para $t \geq 0$.

En la situación analizada en el teorema 2, siempre podemos suponer que S_{i+1} está estrictamente contenido en S_i , para los índices $i = 1, 2, \dots, k$.

Se deduce de esta observación la siguiente consecuencia :

Corolario 1.

Si x_0 es polinomialmente M -invariante, entonces existe un polinomio $u(\cdot)$ de grado menor o igual a la dimensión de M tal que la trayectoria $x(t, x_0, u)$ pertenece a M .

Con el objeto de describir un algoritmo que permita determinar si un punto x_0 es polinomialmente invariante, consideremos la siguiente propiedad, cuya demostración omitimos por ser inmediata.

Lema 1.

Sean V y W subespacios vectoriales tales que $W \subset V$ y W es (A, B) -invariante. Entonces $U = A^{-1}(W + R(B)) \cap V$ es el mayor subespacio de V tal que $W \subset U \subset V$ y $AU \subset W + R(B)$.

A continuación denotaremos por $J(W, V)$ al subespacio U introducido en el lema precedente.

Proposición 6.

Sea S un subespacio vectorial de R^n . Si existe una cadena de subespacios

$$S_{k+1} \subset S_k \subset \dots \subset S_1 \subset S^*$$

que verifican las condiciones :

$$a) \quad AS_i \subset S_{i+1} + R(B) , \quad i = 1, \dots, k$$

$$b) \quad AS_{k+1} \subset S_{k+1} ,$$

entonces existe otra cadena

$$S'_{k+1} \subset S'_k \subset \dots \subset S'_1 \subset S^*$$

tal que S'_{k+1} es el mayor subespacio invariante bajo A contenido en S ; cada espacio $S_j \subset S'_j$, $j = 1, \dots, k+1$ y $S'_i = \mathcal{J}(S'_{i+1}, S^*)$, $i = 1, \dots, k$

Demostración.

Sea S'_{k+1} el mayor subespacio A -invariante contenido en S .

Claramente $S_{k+1} \subset S'_{k+1}$. Definamos $S'_i = \mathcal{J}(S'_{i+1}, S^*)$; $i = k, \dots, 1$.

Se demuestra inductivamente que $S_i \subset S'_i$ para $i = 1, \dots, k$.

En vista de esta proposición, para determinar si un punto x_0 es polinomialmente invariante procederemos a calcular la secuencia de subespacios

$$W_0 = \mathcal{J}(\{0\}, S), \quad \text{con } B = 0,$$

$$W_{k+1} = \mathcal{J}(W_k, S).$$

Como la secuencia de subespacios W_i , $i \geq 0$, es finita, podemos suponer que $W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k = W_{k+1}$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

Obtenemos así el siguiente resultado que establece un algoritmo para determinar si un punto es polinomialmente invariante.

Corolario 2.

Un punto x_0 es polinomialmente invariante si y sólo si Ax_0 pertenece a $W_k + R(B)$.

La demostración es una consecuencia directa del teorema 2 y las observaciones precedentes.

Estudiaremos a continuación el concepto de invarianza aproximada para variedades.

El concepto de subespacio aproximadamente invariante fue introducido por Willems en [6] y posteriormente ha sido objeto de mucha actividad de investigación ([4], [5]).

En la definición siguiente el tiempo $T > 0$ debe considerarse fijo.

Definición 3.

Un punto x_0 en M se llama aproximadamente M -invariante si para todo ϵ positivo existe u_ϵ en $L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que $d(x(t, x_0, u_\epsilon), M) < \epsilon$ para todo $0 < t < T$.

Si agregamos la condición que los controles u_ϵ sean acotados en L^1 , es decir si existe $k > 0$ tal que :

$$\int_0^T \|u_\epsilon(t)\| dt < k, \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

y denotamos por M_a^* al conjunto formado por los puntos aproximadamente M -invariante en el sentido anterior, entonces extendiendo levemente el desarrollo realizado por Stern en [5] puede obtenerse el siguiente resultado :

Teorema 3.

En las condiciones precedentes

$$M^* + S \cap R(B) = M_a^*.$$

REFERENCIAS

- [1] BASILE, G.; MARRO, G., Self-bounded controlled invariant subspaces. J. Opt. Th. Appl., 38(1), (1982), 71-81.
- [2] BLAGODATSKIKH, V.I., Sufficient conditions for optimality in problems with state constraints, Appl. Math. and Opt. Vol. 7 (1981).
- [3] DELGADO, V., Controlabilidad direccional uniparamétrica en Sistemas lineales, Anales III CLAIO, Tomo 1, 231-239, (1988).
- [4] SCHUMACHER, J.M., Algebraic characterizations of almost invariance, International J. of Control, 38(1), (1983), 107-124.
- [5] STERN, R., Asymtotic Holdability. IEEE Trans. Aut. Control, AC-25, N° 6, (1980), 1196-1198.
- [6] WILLEMS, J.C., Almost $A(\text{mod } B)$ -invariant subspaces. Astérisque 75/76, (1980), 239-248.
- [7] WONHAM, W.M., Linear multivariable control. Springer Verlag, (1985).

Hernán Henríquez M. * Víctor Delgado A. y María F. San Martín A. **

* Universidad de Santiago
Departamento de Matemáticas
Casilla 5659- Correo 2
Santiago - CHILE

** Universidad Austral
Instituto de Matemáticas
Casilla 567
Valdivia - CHILE