Proyecciones

Vol. 11 N° 1, pp.29-35 Mayo 1992

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

ALGUNAS T -ALGEBRAS DE RANGO 3 CON FORMAS BILINEALES ASOCIATIVAS *

R. BAEZA-VEGA y R. BENAVIDES

Universidad de la Frontera, Temuco, Chile.

Resumen

Sean (A, ω) una T -álgebra con idempotente, cuya ecuación rango es $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$ y B una forma bilineal asociativa en A . En este trabajo establecemos que si $0 \neq \gamma \neq 1$, B es degenerada. Además se demuestra que la simetría de B sólo depende de la simetría de $B|_V$ y que $B(e, e)$ es constante para todo idempotente $e \in A$.

* Proyectos FONDECYT 165-91 y DIUFRO 9107.

1. T -ÁLGEBRAS.

En lo que sigue, K es un cuerpo conmutativo de característica diferente de 2 y toda K -álgebra es conmutativa, de dimensión finita y no necesariamente asociativa.

Decimos que (A, ω) es una K -álgebra ponderada si existe un homomorfismo no nulo de álgebras $\omega: A \rightarrow K$. La K -álgebra ponderada (A, ω) es una *train algebra* o simplemente T -álgebra si existen $r \in \mathbb{N}$ y constantes $\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1} \in K$ tales que todo $x \in A$ satisface la igualdad $x^r + \gamma_1 \omega(x) x^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} \omega(x) x + \gamma_r \omega(x)^r = 0$. El menor de tales r es llamado el rango de A y la ecuación correspondiente es llamada ecuación rango de A .

Las siguientes propiedades son válidas en toda T -álgebra (A, ω) .

- (a) $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{r-1} = 0$
- (b) El núcleo N de ω es un ideal de codimensión 1 satisfaciendo la identidad $x^r = 0$
- (c) ω es el único homomorfismo no nulo de A en K

Lema 1.1. Si en la T -álgebra (A, ω) vale $\omega(x)(x^2 - \omega(x)x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces $x^2 - \omega(x)x = 0$, $\forall x \in A$. Es decir (A, ω) es una T -álgebra de rango 2.

Demostración: Notemos que para cualquier elemento $x \notin \ker \omega$ vale $x^2 - \omega(x)x = 0$. Si $x \in \ker \omega$ con $x^2 - \omega(x)x \neq 0$, entonces $x^2 \neq 0$ pero para cualquier $y \notin \ker \omega$ tenemos $\omega(x + \lambda y)((x + \lambda y)^2 - \omega(x + \lambda y)(x + \lambda y)) = 0 \forall \lambda \in K$. Luego, en particular $\omega(y)x^2 = 0$, pero $\omega(y) \neq 0$, entonces $x^2 = 0$. Esto indica que necesariamente $x^2 - \omega(x)x = 0 \forall x \in A$.

Proposición 1.2. Sea (A, ω) una T -álgebra cuya ecuación rango es $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$, entonces A es una álgebra de Jordan si y sólo si $\gamma = 0$ o $\gamma = 1$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Si $\gamma = 0$ o $\gamma = 1$, la ecuación rango de A es $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ o $x^3 - 2\omega(x)x^2 = 0$, luego A es de Jordan por Teorema 2.3.2 [3].

$\Rightarrow$) Si A es una álgebra de Jordan, por Teorema 2.3.2 [3], se tiene que la ecuación rango de A está dada por $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ o $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$.

Supongamos que la ecuación es la primera de éstas, restándola de $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$ obtenemos la igualdad $\gamma(\omega(x)x^2 - \omega(x)^2x) = 0$. Si $\gamma \neq 0$, entonces $\omega(x)(x^2 - \omega(x)x) = 0 \forall x \in A$, y por el Lema 1.1 anterior

tenemos que $\mathbf{A}$ es una T -álgebrade rango 2. Esto contradice la hipótesis. luego $\gamma = 0$

Análogamente se prueba que si la ecuación rango de $\mathbf{A}$ es $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ entonces $\gamma = 1$

Las T -álgebras tienen su origen al modelar problemas de tipo genético y ahí es frecuente la existencia de un elemento idempotente. Por tal razón. consideraremos, de aquí en adelante que la T -álgebra $(\mathbf{A}, \omega)$ tiene un idempotente e de peso 1. Además sólo consideraremos las T -álgebrasde rango 3. es decir aquellas que satisfacen la ecuación rango

$$(1.1) \quad x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$$

Es bien sabido que para cualquier idempotente e de peso 1. podemos descomponer $\mathbf{A}$ en la forma $\mathbf{A} = Ke \oplus N$ donde $N = \ker \omega$. Sea ahora $x = e + \lambda n$ con $\lambda \in K$ y $n \in N$ entonces de (1.1) obtenemos las siguientes dos identidades válidas en N

$$(1.2) \quad \gamma n + 2e(en) - (1 + 2\gamma)en = 0$$

$$(1.3) \quad en^2 + 2n(en) = (1 + \gamma)n^2$$

Reescribiendo (1.2) obtenemos $e(n - 2en) = \gamma(n - 2en)$ y $e(en - \gamma n) = \frac{1}{2}(en - \gamma n)$. Sea $\tau: N \rightarrow N$ el K -homomorfismo dado por la multiplicación a la izquierda por el idempotente e . Denotando $U = \{n \in N / en = \frac{1}{2}n\}$ y $V = \{n \in N / en = \gamma n\}$, las igualdades anteriores indican que $en - \gamma n \in \ker(\tau - \frac{1}{2}I) = U$ y $n - 2en \in \ker(\tau - \gamma I) = V$. Así tenemos que

$$(1.4) \quad (\frac{1}{2} - \gamma)n = (en - \gamma n) + \frac{1}{2}(n - 2en) \in U + V$$

Si $\gamma \neq \frac{1}{2}$, N se descompone en dos sumandos directos y en consecuencia

$$(1.5) \quad \mathbf{A} = Ke \oplus U \oplus V$$

Linealizando la identidad (1.3) obtenemos las relaciones

$$(1.6) \quad U^2 \subseteq V, \quad UV \subseteq U \quad y \quad V^2 = 0$$

2. FORMAS BILINEALES.

Sea $\mathcal{B}: \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow K$ una forma bilineal, decimos que $\mathcal{B}$ es asociativa, si $\mathcal{B}(ab, c) = \mathcal{B}(a, bc) \ \forall a, b, c \in \mathbf{A}$. El radical izquierdo de una forma bilineal $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los $x \in \mathbf{A}$ tales que $\mathcal{B}(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathbf{A}$. $\mathcal{B}$ es una forma bilineal no degenerada izquierda si su radical izquierdo es cero. Análogamente son definidos los conceptos de radical y forma bilineal no degenerada derechos. Si las formas bilineales fuesen simétricas o antisimétricas ($\mathcal{B}(x, y) = \varepsilon \mathcal{B}(y, x) \ \forall x, y \in \mathbf{A}$, $\varepsilon = \pm 1$) la distinción entre derecha e izquierda desaparece.

Consideremos la $\mathcal{T}$ -álgebra $(\mathbf{A}, \omega)$ (naturalmente de rango 3 y con un elemento idempotente e) y supongamos $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Como $\mathbf{A} = Ke \oplus U \oplus V$, observamos que las hipótesis del Lema que aparece en [1] se satisfacen, pues basta hacer $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \gamma$, $N_1 = U$ y $N_2 = V$. Utilizando la primera afirmación de este Lema, con $i = 1$ tenemos $\mathcal{B}(e, U) = \mathcal{B}(U, e) = 0$. Del mismo modo, en la segunda afirmación podemos hacer $i = 1, j = 2$, obteniendo $\mathcal{B}(U, V) = \mathcal{B}(V, U) = 0$. Así la matriz asociada a la forma bilineal $\mathcal{B}$ correspondiente a la descomposición $\mathbf{A} = Ke \oplus U \oplus V$ es

$$(2.1) \quad [\mathcal{B}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} e & \beta_1 & \beta_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{B}(e, e) & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \end{matrix}$$

donde β_1 es una K -base de U y β_2 es una K -base de V .

Proposición 2.1. Si una $\mathcal{T}$ -álgebra de rango 3, con idempotente admite una forma bilineal asociativa no degenerada, entonces ella es de Jordan.

Demostración: Sea $(\mathbf{A}, \omega)$ una $\mathcal{T}$ -álgebra con ecuación rango (1.1) y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal asociativa en $\mathbf{A}$.

- i) Si $\gamma = \frac{1}{2}$, tenemos que $n = 4en - 4e(en)$, luego para todo $n \in N$ vale la igualdad $\mathcal{B}(e, n) = \mathcal{B}(e, 4en) - \mathcal{B}(e, 4e(en)) = 4(\mathcal{B}(e, en) - \mathcal{B}(e^2, en)) = 0$, es decir $\mathcal{B}(e, N) = 0$. Además para $n_1, n_2 \in N$ arbitrarios, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(n_1, n_2) &= \mathcal{B}(4en_1 - 4e(en_1), 4en_2 - 4e(en_2)) \\ &= 16(\mathcal{B}(en_1, en_2) - \mathcal{B}(en_1, e(en_2)) - \mathcal{B}(e(en_1), en_2) \\ &\quad + \mathcal{B}(e(en_1), e(en_2))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puesto que $\mathcal{B}$ es asociativa y N es una subálgebra de $\mathbf{A}$. Luego

$$[\mathcal{B}] = \begin{matrix} & e & \beta \\ \begin{matrix} e \\ \beta \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{B}(e,e) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

donde β es cualquier K -base de N . Entonces si $\mathcal{B}$ es no degenerada, necesariamente $N = \langle 0 \rangle$, de donde $\mathbf{A} = K\mathbf{e}$ y $\mathbf{A}$ es de Jordan.

- ii) Si $\gamma \neq \frac{1}{2}$, ya hemos visto que la forma canónica matricial en bloques de $\mathcal{B}$ está dada por (2.1)

Cada vez que $0 \neq \gamma \neq 1$, por Lema enunciado en [1], esta matriz toma la forma

$$[\mathcal{B}] = \begin{matrix} & e & \beta_1 & \beta_2 \\ \begin{matrix} e \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{B}(e,e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

es decir la forma bilineal $\mathcal{B}$ es degenerada, salvo que $N = \langle 0 \rangle$. En tal caso tenemos que $\mathbf{A}$ es una K -álgebra de Jordan.

Cuando $\gamma = 0$ o $\gamma = 1$, aplicando la Proposición 1.1, se concluye lo deseado.

Proposición 2.2. La forma bilineal asociativa $\mathcal{B}$ definida en una T -álgebra de rango 3 con idempotente es simétrica si y sólo si $\mathcal{B}|_V$ es simétrica.

Demostración: En el caso $\gamma \neq \frac{1}{2}$, observemos que si $v \in V$, $u_1, u_2 \in U$ entonces valen las igualdades

$$\mathcal{B}(e, v) = \mathcal{B}(e^2, v) = \mathcal{B}(e, ev) = \mathcal{B}(ev, e) = \mathcal{B}(v, e^2) = \mathcal{B}(v, e) \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u_1, u_2) &= 2\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}u_1, u_2\right) = 2\mathcal{B}(eu_1, u_2) = 2\mathcal{B}(e, u_1u_2) \\ &= 2\mathcal{B}(eu_2, u_1) = \mathcal{B}(u_2, u_1) \end{aligned}$$

Luego la simetría de $\mathcal{B}$ sólo depende de la simetría de $\mathcal{B}|_V$.

Si $\gamma = \frac{1}{2}$ se tiene que $\mathcal{B}(x, y) \neq 0$ sólo cuando $x = y = e$, como se demostró en la Proposición 2.1.

Proposición 2.3. Sea $(\mathbf{A}, \omega)$ una T -álgebra con idempotente e tal que $\mathbf{A} \neq K\mathbf{e}$ y cuya ecuación de rango está dada por $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Entonces las formas bilineales

asociativas no degeneradas están dadas por las formas bilineales no degeneradas sobre un subespacio vectorial complementario de U^2 en V

Demostración: $\mathbf{A}$ es una T -álgebra de rango 3, con $\gamma = 0$. De acuerdo con el teorema demostrado por Walcher, [4], $\mathbf{A}$ es simultáneamente de Bernstein y Jordan. En este caso las formas bilineales asociativas no degeneradas están dadas por las formas bilineales no degeneradas sobre un subespacio vectorial complementario de U^2 en V como se demuestra en [1]

Proposición 2.4. Sea $(\mathbf{A}, \omega)$ una T -álgebra con idempotente e tal que $\mathbf{A} \neq Ke$ y cuya ecuación de rango sea $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$. Entonces cualquier forma bilineal asociativa está determinada por sus valores en (e, e) y (e, V)

Demostración: $\mathbf{A}$ es una T -álgebra con $\gamma = 1$. Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal asociativa en $\mathbf{A}$, entonces la forma de su matriz conónica por bloques está dada por (2.1). Cuando $v_1, v_2 \in V$ usamos el hecho que $v_1 v_2 \in V^2 = 0$, para probar que $\mathcal{B}(v_1, v_2) = 0$, es decir que $\mathcal{B}(V, V) = 0$. Además si $u_1, u_2 \in U$, notemos que $\mathcal{B}(u_1, u_2) = 2\mathcal{B}(\frac{1}{2}u_1, u_2) = 2\mathcal{B}(e, u_1 u_2)$, luego conocidos los valores que toma $\mathcal{B}(e, V)$, son conocidos los valores de $\mathcal{B}(U, U)$

Proposición 2.5. Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal asociativa definida en una T -álgebra de rango 3. Si e, e_1 son dos idempotentes de peso 1 entonces $\mathcal{B}(e_1, e_1) = \mathcal{B}(e, e)$

Demostración: Sea $(\mathbf{A}, \omega)$ la T -álgebra.

- i) Supongamos que $\gamma = \frac{1}{2}$. Como $\mathbf{A} = Ke \oplus N$ con $N = \ker \omega$ y e_1 es de peso 1, podemos escribir $e_1 = e + n_0$ obteniendo $n_0 = 2en_0 + n_0^2$ y $\mathcal{B}(n_0, n_0) = 4\mathcal{B}(en_0, en_0) = 4\mathcal{B}(e, n_0(en_0))$. La identidad (1.2) indica que para cualquier $n \in N$ tenemos $n = 4en - 4e(en)$, entonces $\mathcal{B}(e, n) = 0$, y en consecuencia $\mathcal{B}(n_0, n_0) = 0$. Ahora, un cálculo directo prueba la tesis.
- ii) Sea $\gamma \neq \frac{1}{2}$. R. Costa demostró en [2], que en este caso existe $u \in U$ tal que $e_1 = e + u + (1 - 2\gamma)^{-1}u^2$. Es fácil verificar que $\mathcal{B}(e_1, e_1) = \mathcal{B}(e, e) + \frac{4(1-\gamma)}{(1-2\gamma)}\mathcal{B}(e, u^2)$. Observe que sólo debemos preocuparnos del caso $\gamma \neq 1$. Como $\mathcal{B}(e, u^2) = \mathcal{B}(e, eu^2) = \gamma\mathcal{B}(e, u^2)$, entonces $\mathcal{B}(e, u^2) = 0$.

Observación: Bajo las hipótesis de la Proposición 2.5, cada vez que exista $u \in U$ tal que $u^2 = 0$, toda forma bilineal asociativa en $\mathbf{A}$ es degenerada.

REFERENCES

- [1] Baeza R., Catalán A., Costa R.: Bernstein algebras with associative bilinear forms. *Arch. Math.* (por aparecer).

- [2] *Costa R.* Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5 . *Proccedings of the Edinburg Math. Soc.*, **33**, pp 61-70, 1990.
- [3] *Ouattara M.* Algebres de Jordan et algebres genetiques. *Tesis Doctorado*, Montpellier. Francia, 1989.
- [4] *Walcher S.* Bernstein algebras which are Jordan algebras. *Arch. Math.* **50**, pp 218-222. 1988.

Recibido: 9 de Septiembre de 1991.

R. Baeza-Vega y R. Benavides
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D, Temuco, Chile.